Лабораторная работа

Определение момента инерции и проверка теоремы Штейнера методом крутильных колебаний

Описание целей работы

Конкретные цели	Критерий достижения цели
Изучение теоретических вопросов	
1. Момент инерции	1.Студент должен сформулировать определение понятий: момент инерции точки относительно оси, момент инерции тела и проиллюстрировать их на примерах.
2. Теорема Штейнера о переносе осей.	2. Студент должен сформулировать теорему Штейнера и объяснить, как она используется в данной работе.
3. Закон сохранения энергии	3. Студент должен назвать виды энергии, их расчетные формулы и условия сохранения энергии.
Практические навыки	
Студент должен научиться: - определять период крутильных колебаний; - определять момент инерции тела.	

Приборы и оборудование: трифилярный подвес, секундомер, набор грузов, штангенциркуль.

1. Описание установки

1. В данной работе предлагается проверить теорему Штейнера, определяя моменты инерции тел методом крутильных колебаний трифилярного подвеса (рис.1).

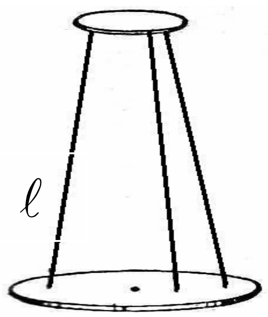

Рис.1

Трифилярный подвес (рис.1) состоит из круглой платформы, подвешенной на трех нитях, симметрично расположенных относительно оси симметрии платформы. Наверху эти нити также симметрично прикреплены к неподвижной платформе, радиус которой меньше, чем у нижней подвижной платформы. При закручивании нижней платформы относительно оси симметрии происходит её перемещение вверх, т.е. ее центр тяжести поднимается по оси вращения. Возникает момент сил, стремящийся вернуть платформу в исходное положение равновесия. Опускаясь и раскручиваясь в обратном направлении, платформа приобретает кинетическую энергию вращательного движения. Вследствие этого, в положении равновесия она не остановится и продолжает раскручиваться в другом направлении, что и приводит к периодическому движению: центр тяжести периодически смещается вверх-вниз, а сама платформа в то же время совершает крутильные колебания. Период таких колебаний определяется величиной момента инерции платформы и тел, помещенных на ней. Это позволяет, определив период колебаний трифилярного подвеса, вычислить моменты инерции тел, помещенных на нижнюю платформу.

2. Вывод формулы периода крутильных колебаний.

Пусть платформа массы m, вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту h. При этом увеличивается потенциальная энергия платформы, приращение которой обозначим U=mgh . Вращаясь в обратном направлении, платформа возвращается в положение равновесия с кинетической энергией $T=\frac{1}{2}I\omega_0^2$, где I - момент инерции платформы, ω_0- угловая скорость вращения платформы в момент достижения ею положения равновесия, т.е. в самой нижней точке движения. Если пренебречь силами трения в подвесе и сопротивлением воздуха (они малы), то можно применить закон сохранения механической энергии. В произвольный момент движения, полная энергия платформы E складывается из её потенциальной и кинетической:

$$E = U + T = Mgh + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1)$$

Здесь E - полная энергия системы, M - полная масса нагруженной платформы, I – её момент инерции, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ - угловая скорость вращения. В уравнении (1) величина h - высота поднятия центра тяжести платформы - может быть выражена через угол поворота платформы, что позволит упростить уравнение закона сохранения энергии.

Для этого рассмотрим геометрические соотношения для данной платформы (рис.2).

Пусть R_1 - радиус верхней платформы, а R_2 - нижней платформы соответственно. Тогда высота, на которую поднимается платформа, будет равна: $h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC - BC_1)(BC + BC_1)}{BC + BC_1} = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}$ (2)

Так как длина нити подвеса равна ℓ, то

$$(BC)^2=(BA)^2-(CA)^2=\ell^2-(R_2-R_!)^2 \qquad (3)$$

А величина $(BC_1)^2=(BA_1)^2-(A_1C_1)^2=\ell^2-(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\varphi)$, (4) где φ - угол, на который поворачивается платформа.

Таким образом, из уравнений (2), (3), (4) получим:

$$h = \frac{2R_1R_2(1-\cos\varphi)}{BC+BC_1} = \frac{4R_1R_2\sin\frac{\varphi}{2}}{BC+BC_1}$$

Если учесть, что углы поворота платформы должны быть малы, (не более 5^0), то при малых φ значение функции sinφ можно заменить на значение угла φ

$$\sin\frac{\varphi}{2} \to \frac{\varphi}{2}$$

Рис.2

В знаменателе $BC + BC_1 \approx 2\ell$. Таким образом, для h имеем:

$$h = \frac{R_1R_2\varphi^2}{2\ell} \qquad (5)$$

Это позволяет в выражении (1), для закона сохранения энергии произвести замену:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Mg\frac{R_1R_2\varphi^2}{2\ell} = E \qquad (6)$$

Учитывая, что полная энергия системы сохраняется, т.е. не меняется во времени, продифференцируем это уравнение по времени:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Mg\frac{R_1R_2}{\ell}\varphi = 0 \qquad (7)$$

Последнее уравнение имеет вид: $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, причем $\omega^2 = \frac{MgR_1R_2}{I\ell}$ (8)

Если уравнение движения тела имеет вид $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, то это означает, что оно совершает гармонические колебания с круговой частотой ω. Такое уравнение имеет решение $\varphi = \varphi_{\max}\sin\omega t = \varphi_{\max}\sin\frac{2\pi t}{T}$ (9)

$\varphi_{\max}$ – амплитудное значение угла φ.

В данном случае $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{MgR_1R_2}{I\ell}$, откуда получим выражение для периода колебаний платформы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I\ell}{MgR_1R_2}} \qquad (10)$$

Таким образом, экспериментально измеряя период колебаний платформы и все остальные необходимые параметры, можем определить момент инерции платформы:

$$I = \frac{MgR_1R_2T^2}{4\pi^2\ell} \qquad (11)$$

Для данного Вам прибора геометрические параметры известны:

R_1= (70±1)мм, R_2= (80±1)мм, ℓ = (76±0,5)мм.

Масса пустой платформы M = (150±1)г.

Полученная нами формула (11) справедлива при полном отсутствии потерь энергии в системе. Чтобы убедиться в выполнении этого условия, надо измерить время τ, в течение которого амплитуда колебаний платформы уменьшается в два раза. Если $\tau \gg T$, то потери энергии на трение невелики и ими можно пренебречь.

3. Порядок выполнения работы

1. Получив допуск к работе, приведите нижнюю платформу в колебательное движение (с помощью рычага на верхней платформе).

   PS! Возвратно – поступательное движение платформы должно отсутствовать (т.е. ось вращения должна быть неподвижна).
2. Измерьте период колебаний пустой платформы. Для этого:

- измерьте несколько раз время t, за которое платформа совершит *n* полных колебаний ($n \approx 20$) и найдите среднее значения времени <t>;
- найдите среднюю погрешность измерения времени <Δt>;
- определите период колебаний $T = \frac{\langle t \rangle}{n}$;
- определите погрешность определения периода $\Delta T = \frac{\langle \Delta t \rangle}{n}$.

3. Убедитесь, что закон сохранения энергии выполняется в данном случае. Для этого определите время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшится вдвое. Если $\tau \gg T$, то работу можно продолжать.
4. Используя полученное значение периода колебаний пустой платформы вычислите по формуле (11) момент инерции пустой платформы $I_{пп}$ и погрешность её измерения $\Delta I_{пп}$.
5. Расположите оба груза (цилиндры) в центре платформы так, чтобы их ось симметрии совпадала с осью вращения платформы, и определите (см.п.2) период колебаний платформы с грузами.
6. Вычислите момент инерции платформы с двумя грузами $I_{пгр}$. Так как момент инерции (как и масса) величина аддитивная, то должно выполняться соотношение: $I_{пгр} = I_{пп} + 2I_0$, (*)

   где I_0 – момент инерции одного груза относительно оси, проходящей через центр груза.

   Из соотношения (*) вычислите I_0.

7. Расположите оба груза ближе к краям платформы, но симметрично относительно оси вращения платформы. Определите расстояние от оси вращения платформы до центра грузов *a*. Определите период колебаний платформы и погрешность этого измерения.
8. Вычислите момент инерции платформы с грузами, расположенными на расстоянии *a* от оси вращения I′ по формуле (11).
9. Так как $I' = I_{nn} + 2I$, где I – момент инерции одного цилиндра относительно оси вращения платформы, найдите I.
10. Согласно теореме Штейнера $I = I_0 + m \cdot a^2$, где m – масса грузов. Проверьте это соотношение. Определите погрешность, с которой выполняется это соотношение.
11. Момент инерции цилиндра относительно его оси можно рассчитать по формуле $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$, где r-радиус цилиндра. Сравните рассчитанное значение I_0 с полученным Вами экспериментально.

Таблица

№n/n	n	m,кг	t,сек	T,сек	I, $\frac{нсек}{м}$	I_{cp}, $\frac{нсек}{м}$	ΔI, $\frac{нсек}{м}$	ΔI_{cp}, $\frac{нсек}{м}$	σ,%

Контрольные вопросы

1. От чего зависит момент инерции тела? Приведите примеры.
2. Что происходит с моментом инерции тела, если оно удаляется от оси вращения? Приближается к ней?
3. В каких случаях момент инерции тела равен нулю? Приведите примеры. Как оно может двигаться в этом случае?
4. Сформулируйте теорему Штейнера и укажите:
   - условия, при которых она выполняется;
   - смысл величин, входящих в формулу.
5. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. При каких условиях от может быть применен? Приведите примеры.
6. Объясните (можно по конспекту) вывод формулы для периода крутильных колебаний платформы.
7. Объясните цель работы и ход её выполнения.