Лекция 1

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ХАОС. ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Что общего между прыгающим по земле мячиком, лазером, планетной системой, бурлящим потоком воды в ручье, биологической популяцией? Общее в том, что все эти объекты могут рассматриваться (по крайней мере, в известном приближении) как *динамические системы*. Абстрагируясь от конкретной физической природы объекта, о нем говорят как о динамической системе, если можно указать такой набор величин, называемых *динамическими переменными* и характеризующих *состояние* системы, что их значения в любой последующий момент времени получаются из исходного набора по определенному правилу. Это правило задает, как говорят, *оператор эволюции* системы.

Например, для прыгающего мячика оператор эволюции определяется законами движения в поле тяжести и удара мячика о поверхность. Мгновенное состояние задается двумя величинами — расстоянием от земли и скоростью. Геометрически оно изображается как точка на фазовой плоскости, где эти две величины отложены, соответственно, по оси абсцисс и ординат. Изменение состояния во времени или, для краткости, динамика системы, отвечает движению изображающей точки по определенной кривой — фазовой траектории. Если состояние системы задается набором N величин, динамику можно представить как движение точки по траектории в N-мерном фазовом пространстве.

Выделяют два класса динамических систем — консервативные (к ним относятся, например, механические колебательные системы в отсутствие трения) и диссипативные. Для диссипативных систем характерно то, что режим динамики, возникающий в системе, предоставленной себе в течение длительного времени, становится не зависящим от начального состояния (по крайней мере, при вариации начальных условий в некоторых конечных пределах). Множество точек в фазовом пространстве диссипативной системы, посещаемых в установившемся режиме, называется *аттрактором*. Простые примеры аттракторов — устойчивое состояние равновесия и предельный цикл, отвечающий режиму периодических автоколебаний (замкнутая фазовая траектория, к которой приближаются все соседние траектории).

Замечательным достижением теории динамических систем стало открытие хаотической динамики. Возникновение хаоса кажется на первый взгляд несовместимым с определением динамической системы, подразумевающим возможность однозначного предсказания конечного состояния по исходному. На самом деле противоречия нет. В хаотическом режиме сколь угодно малая неточность в задании начального состояния системы быстро нарастает во времени, так что предсказуемость становится недостижимой на достаточно больших интервалах времени. Такого рода режимы характеризуются нерегулярным, хаотическим изменением динамических переменных во времени. В фазовом пространстве диссипативных систем им отвечают *странные аттракторы* — сложно устроенные множества, демонстрирующие все более тонкую структуру на разных уровнях ее разрешения (фракталы).

В этой вводной лекции мы обсудим, по необходимости кратко, многоплановую картину истории развития и становления представлений о сложной динамике нелинейных систем. Этот обзор не может претендовать на полноту, его цель в том, чтобы показать, каким широким фронтом наука подошла к концепции динамического хаоса.

1.1. Механика

Первая линия развития, которая вела к представлениям о динамическом хаосе, связана с механикой, в частности и в особенности, с небесной механикой. Основоположниками классической механики принято считать Исаака Ньютона (1643–1727; основной труд «Математические начала натуральной философии», 1687), Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813; основной труд «Аналитическая механика», 1788), Пьера Симона Лапласа (1749–1827; основной труд «Трактат о небесной механике»), Уильяма Гамильтона (1805–1865). Результатом их деятельности стало формирование представления о том, что мы сейчас называем гамильтоновой или консервативной динамической системой.

Проблема трех тел в небесной механике — первая задача, анализируя которую исследователи столкнулись с возникновением сложной динамики и хаоса. Впервые эту возможность глубоко осознал великий французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912). В частности, он описал так называемую гомоклиническую ситуацию, ставшую предметом дотошного анализа специалистов по нелинейной динамике 50–60 лет спустя: «Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел, в которых нет однозначного интеграла и ряды [теории возмущений] расходятся».

Была развита теория возмущений и понято, какую роль играют в ней резонансные взаимодействия — именно они отвечают за расходимость рядов, упомянутых в высказывании Пуанкаре. Было осознано, что среди гамильтоновых систем можно выделить класс интегрируемых и класс неинтегрируемых систем. В случае числа степеней свободы больше единицы системы второго класса являются гораздо более типичными, чем первого. Именно они и могут демонстрировать сложную динамику и хаос.

С развитием компьютеров возможности изучения и наглядного представления сложной динамики революционным образом расширились. Одним из первых примеров компьютерного исследования сложной динамики стала работа французских астрофизиков (M. Hénon and C. Heiles, 1964), рассмотревших модель движения звезды через галактический диск.

Значительный прогресс в понимании соотношения между квазипериодической динамикой и хаосом связан с теорией, которую создали в 50–60-х годах советские математики А. Н. Колмогоров (1903–1987) и В. И. Арнольд и американский математик Ю. Мозер (теория КАМ). Основная теорема утверждает, что при включении достаточно слабого взаимодействия между движениями нелинейных систем с иррациональным соотношением частот квазипериодический характер динамики в большинстве случаев сохраняется.

Основываясь на анализе условий возникновения гомоклинической структуры, В. К. Мельников установил в 1963 г. критерий возникновения сложной динамики в системах близких к интегрируемым.

В качественном отношении большое значение имело развитие представлений о перекрытии (взаимодействии) резонансов в случае достаточно сильной нелинейности, приведшее к формулировке критерия стохастизации Б. В. Чирикова и Г. М. Заславского (обзор 1971).

1.2. Статистическая физика

Вторая линия развития связана со статистической физикой и формированием так называемой эргодической теории. Как теперь известно, вполне состоятельное описание в статистической физике достигается только в рамках квантовой теории. Однако много интересного и важного было сделано в предположении, что на фундаментальном уровне законы движения микрочастиц, из которых построены физические системы, подчиняется классической гамильтоновой механике.

Основоположники статистической физики Джозайя Уиллард Гиббс (1839–1903) и Людвиг Больцман (1844–1906) рассматривали фазовое пространство гамильтоновых систем, образованных совокупностью большого числа микрочастиц (атомов или молекул). В силу закона сохранения энергии, предоставленная себе система должна оставаться все время на некоторой гиперповерхности в этом пространстве, задаваемой условием постоянства энергии. Больцман ввел эргодическую гипотезу — предположение о том, что имеется по существу только одна фазовая траектория, проходящая через все точки энергетической поверхности. В 1913 г. было доказано, что такое, в принципе, невозможно. Исправленная версия эргодической гипотезы принадлежит Паулю Эренфесту (1883–1933) и состоит в том, что фазовая траектория с течением времени должна проходить сколь угодно близко от любой точки на энергетической поверхности.

В обоснование эргодической теоремы внесли вклад Энрико Ферми (1901–1954), Джордж Биркгоф (1884–1944), Джон фон Нейман (1903–1957). Результатом явилось формирование отдельной математической дисциплины — эргодической теории или метрической теории динамических систем.

Новые возможности для проработки вопроса о релаксации сложных механических систем к термодинамическому равновесию стали открываться с развитием компьютеров, и одним из первых это осознал Э. Ферми. В начале 50-х годов Ферми, Паста и Улам предприняли попытку пронаблюдать в вычислительном эксперименте процесс установления термодинамического равновесия в цепочке связанных нелинейных осцилляторов. Результат оказался неожиданным: вместо релаксации к равновесию наблюдался явно квазипериодический процесс. Эта работа показала, что проблема сложнее, чем она виделась раньше. Результаты Ферми, Паста и Улама дали толчок исследованиям, приведшим впоследствии к представлению о распределенных системах, относящихся к классу вполне интегрируемых, эффективным методам решения соответствующих уравнений, а также к понятию солитона.

Оказалось, что свойство эргодичности само по себе не является ни необходимым, ни достаточным для желаемого обоснования статистической физики. По-настоящему существенным является наличие другого свойства — неустойчивости фазовых траекторий системы по отношению к малым возмущениям начальных условий и связанное с этим более сильное, чем эргодичность, свойство перемешивания. Одним из первых эту идею разработал советский физик Н. С. Крылов (1917–1947), сотрудник академика В. А. Фока (1898–1974). Книга Крылова была опубликована посмертно, в 1950 г., благодаря усилиям Фока, который осознавал принципиальное значение развитых его учеником идей.

Количественная характеристика неустойчивости траекторий известна как ляпуновский характеристический показатель — величина, введенная русским математиком А. М. Ляпуновым (1857–1918; докторская диссертация «Общая задача об устойчивости движения», 1892). В 1968 г. советский математик В. И. Оселедец опубликовал важнейший результат — так называемую мультипликативную эргодическую теорему, которая позволяет говорить о ляпуновских показателях, определенных не для одной индивидуальной фазовой траектории, а для множества траекторий. Эта теорема лежит в основе современного понимания и применения в нелинейной динамике концепции ляпуновских показателей.

Были введены и другие характеристики, позволяющие различать простую и сложную динамику, — динамическая энтропия, известная как энтропия Колмогорова–Синая (Колмогоров, 1959) и топологическая энтропия (Adler et al., 1965)

Замечательным недавним достижением стало доказательство Я. Г. Синаем наличия неустойчивости и перемешивания в задачах о движении частицы с упругими отражениями в сосуде с вогнутыми во внутрь стенками («бильярд Синая») и в задачах уже по-настоящему близких к интересующим статистическую физику (двумерная модель газа из частиц в виде жестких дисков).

1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника

До сих пор, подчиняясь логике истории предмета, мы вели речь о гамильтоновых системах. Однако основным содержанием нашего курса будут диссипативные динамические системы. На уровне окружающих нас макроскопических явлений, именно с ними чаще всего приходится встречаться. Необходимость изучения диссипативных динамических систем становилась все более и более насущной по мере развития таких дисциплин, как радиофизика и гидродинамика.

Итак, третья линия связана с радиотехникой, электроникой, теорией автоматического регулирования. Здесь стоит начать с работ голландского физика и инженера Б. Ван-дер-Поля (1889–1959). С его именем связан генератор или осциллятор Ван-дер-Поля — классическая модель нелинейной системы, демонстрирующей периодические автоколебания. Около 1927 г. Ван-дер-Поль и Ван-дер-Марк исследовали динамику такого генератора под периодическим внешним воздействием. Интересно, что режим работы устройства контролировался по звуку в наушниках. Исследователи отметили явление синхронизации при определенных рациональных соотношениях частоты воздействия и собственной частоты и шумоподобные колебания при переходах между областями захвата. Возможно, это первое документально зарегистрированное экспериментальное наблюдение хаоса.

Работа Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка повлияла на работу Картрайт и Литтлвуда (Cartwright, Littlewood, 1945). В этой работе, посвященной математическому исследованию уравнения автогенератора под периодическим внешним воздействием, была обнаружена необычайная сложность динамики, в частности, наличие у системы (при достаточно большой амплитуде внешней силы) бесконечного числа неустойчивых периодических орбит. Эта работа впоследствии оказала влияние на математиков, создававших основы математической теории сложной динамики и хаоса.

В России в 20-е годы в Московском университете сформировалась сильная научная школа Л. И. Мандельштама (1879–1944). Интересы этой школы охватывали, в частности, радиофизику, оптику, колебательные процессы в системах различной природы. Мандельштам первым пришел к пониманию возможности такой дисциплины, как теория нелинейных колебаний, — до этого полагали, что нелинейные явления должны изучаться для каждой конкретной системы отдельно. В конце 20-х годов ученик Мандельштама А. А. Андронов (1901–1952) установил, что адекватным математическим образом периодических автоколебаний являются предельные циклы, введенные Пуанкаре в его качественной теории дифференциальных уравнений. Мандельштам сразу понял важность этого достижения и настоял на немедленной публикации результата. Андронов привлек также для анализа автоколебательных систем созданный А. М. Ляпуновым аппарат теории устойчивости. Одно из важных достижений — исследование момента возникновения автоколебаний при изменении параметров, ситуации, которую теперь называют бифуркацией Андронова–Хопфа. С 1931 г. Андронов работает в Нижнем Новгороде (Горьком), где вокруг него формируется крупная научная школа в области теории колебаний. В 1937 г. выходит классическая книга А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина «Теория колебаний». Один из соавторов книги — Витт оказался жертвой репрессий и погиб в лагерях, в издании книги 1937 г. его имя было исключено и восстановлено только в последующих изданиях.

Одним из важных достижений развивающейся теории нелинейных колебаний стало формирование Андроновым и Понтрягиным представления о грубых или структурно-устойчивых системах. Представим себе пространство, точки которого изображают динамические системы. Система грубая, если около соответствующей ей точки пространства систем можно указать такую окрестность, что в ней будут располагаться только системы с топологически эквивалентным устройством фазового пространства. В пространстве параметров грубые системы занимают целые области. Эти области разграничены поверхностями, где располагаются негрубые системы коразмерности один. На этих поверхностях могут располагаться линии коразмерности два и т. д.

Исследовательская программа нелинейной теории колебаний по Андронову и Понтрягину и состоит в выделении и изучении грубых ситуаций, а затем негрубых в порядке возрастающей коразмерности. Что касается негрубых ситуаций, то они составляют предмет теории бифуркаций — глубокой и хорошо развитой математической дисциплины, одного из краеугольных камней нелинейной динамики.

С 1970 г. с интервалом в 2 года в Горьком организуются школы-семинары по нелинейным колебаниям и волнам, в которых участвуют ведущие советские ученые. Этих школ состоялось 9, и они во многом определили распространение в нашей стране идей нелинейной динамики и динамического хаоса. Еще одна школа, восстанавливающая прерванную традицию, уже международная, состоялась в 1995 г. В формировании, распространении и популяризации в России представлений о хаотической динамике большую роль сыграли А. В. Гапонов-Грехов, Ю. И. Неймарк, М. И. Рабинович, Л. П. Шильников. В 1979 г. Кияшко, Пиковский и Рабинович предложили, по-видимому, первый простой радиотехнический автогенератор, в котором целенаправленно был реализован режим хаотических автоколебаний.

1.4. Гидродинамика

Четвертая линия развития связана с гидродинамикой и проблемой турбулентности.

В 1883 г. была опубликована работа английского физика Осборна Рейнольдса (1842–1912) «Экспериментальное исследование обстоятельств, которые определяют, будет ли движение воды прямолинейным или волнистым, и о законе сопротивления в параллельных каналах». В зависимости от безразмерного параметра, известного теперь как число Рейнольдса [1]), движение воды в трубке было ламинарным или турбулентным. Хотя основные уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости — уравнения Навье–Стокса, уже были известны, причины возникновения турбулентности оставались загадкой. С тех пор вопрос о природе турбулентности стоял перед наукой, приобретая со временем все большую остроту. Около 1920 г. английский физик Л. Ричардсон развил качественные представления о том, что в турбулентном течении имеется перенос энергии от крупных ко все более и более мелким завихрениям, пока энергия не диссипирует из-за вязкости в малых масштабах. В 1941 г. была предложена теория турбулентности Колмогорова–Обухова. Анализ основывался на предположении, что при больших числах Рейнольдса турбулентное состояние можно считать локально однородным и изотропным в статистическом смысле, и о том, что имеет место каскадная передача энергии от крупных пространственных масштабов к мелким в так называемом «инерционном интервале» — области масштабов, где вязкость несущественна. Замечательно простая и глубокая тео-

[1]) Число Рейнольдса выражается соотношением $\mathrm{Re} = \nu d/v$, где d — характерный геометрический размер исследуемой системы, v — характерная скорость течения, ν — коэффициент кинематической вязкости.

рия приводила ко вполне определенному теоретическому предсказанию — распределение энергии по спектру должно быть пропорционально $k^{-5/3}$, где k — волновое число («закон пяти третей»). К настоящему времени получены экспериментальные данные, хорошо согласующиеся с этим законом, но осознана также необходимость внесения уточнений в теорию.

Другое направление в попытках понять природу турбулентности состояло в поисках ответа на вопрос — как возникает турбулентность, если постепенно увеличивать число Рейнольдса, начав от малых значений, когда течение заведомо ламинарное. В 1944 г. была опубликована статья советского физика Л. Д. Ландау (1908–1968) «К проблеме турбулентности». В этой замечательной для своего времени статье Ландау предположил, что турбулентность возникает в результате большого числа (каскада) последовательных бифуркаций, каждая из которых состоит в появлении колебаний с новой частотой. Вновь возникающие частоты в типичном случае находятся в иррациональном соотношении с ранее возникшими частотами. Аналогичные представления развивал несколько позже немецкий математик Э. Хопф (1902–1983; работа «Математический пример, демонстрирующий особенности турбулентности» опубликована в 1948). Поэтому данную картину возникновения турбулентности называют сценарием Ландау–Хопфа. Подчеркнем, что этим работам предшествовало формирование представлений об автоколебаниях, предельных циклах и бифуркациях в радиофизике и теории колебаний.

В 1963 г. американский метеоролог Э. Лоренц опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение», в которой обсуждались результаты численного интегрирования с помощью компьютера системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующей динамику жидкости при конвекции в подогреваемом снизу слое. Будучи хорошо образованным математически, Лоренц подверг полученные результаты тщательному и глубокому обсуждению, акцентировав внимание на взаимосвязи между наблюдаемой сложной динамикой и присущей системе неустойчивостью фазовых траекторий. Позднее это свойство хаотической динамики пропагандировалось им под названием «эффект бабочки» (butterfly effect): в приложении к метеорологии взмах крыльев бабочки может через достаточное время повлечь существенное изменение погоды где-то совсем в другом месте. Примерно в то же самое время А. Н. Ораевский с соавторами также получили непериодические решения для аналогичных уравнений в теории одномодового лазера. Как работа Лоренца, опубликованная в метеорологическом журнале, так и работа Ораевского не были своевременно замечены и оценены.

В 1971 г., основываясь на достигнутом к этому времени продвижении в математических исследованиях, Д. Рюэль и Ф. Такенс выступили с работой «О природе турбулентности». Подвергнув критике теорию Ландау, они аргументировали, что уже после включения в игру относительно небольшого числа частот (трех или четырех в зависимости от некоторых математических деталей) динамика может стать турбулентной и, в частности, демонстрировать характерный для случайного процесса сплошной спектр. Это связывалось с появлением в фазовом пространстве «странного аттрактора» — ключевой термин, введение которого определило историческое значение работы Рюэля и Такенса. Подчеркивалось наличие неустойчивости фазовых траекторий на странном аттракторе и его нетривиальная геометрическая структура — он представлял собой то, что стали называть фрактальным множеством или просто фракталом. С точки зрения интерпретации результатов, работа Рюэля и Такенса также оказалась уязвимой для критики. Многие вопросы, которые возникают в связи с предложенной ими картиной перехода к турбулентности, до сих пор остаются открытыми.

Надо сказать, что аргументация и в работе Ландау, и в работе Рюэля и Такенса носила столь общий характер, что имела равное отношение как к возникновению турбулентности, так и к возникновению сложной динамики в диссипативных системах другой физической природы. Дальнейшее понимание возможных типов перехода произошло благодаря еще одной линии развития.

1.5. Дискретные отображения

Попытки математического описания биологических проблем динамики популяций восходят к Томасу Мальтусу (1766–1834), автору нашумевшей концепции о том, что численность людей возрастает в геометрической прогрессии, а средства поддержания жизни лишь в арифметической. Поэтому численность населения должна регулироваться войнами, эпидемиями и пр. Марксисты, как известно, заклеймили эту теорию как человеконенавистническую. Не входя в полемику, заметим, что в отсутствие факторов, сдерживающих рост населения, изменение численности популяции из года в год «по Мальтусу» можно описать как $x_{n+1} = Rx_n$, где R — параметр, определяющий условия жизни популяции. Ввести сдерживающий фактор можно, если добавить в уравнение нелинейный, например, квадратичный член: $x_{n+1} = R(x_n - x_n^2)$. Полученное соотношение называют логистическим отображением и оно действительно неплохо описывает, по крайней мере, с качественной стороны, динамику некоторых биологических популяций.

Интересный результат, проливающий свет на возможность сложной динамики в логистическом отображении, был получен в конце 40-х годов в работе американских математиков Станислава Улама (1909–1984) и Джона фон Неймана. Они показали, что для случая $R = 4$ это отображение путем замены переменных сводится к форме, допускающей тривиальный анализ, причем оказывается, что выбором начальной точки x можно реализовать любую наперед заданную последовательность знаков величины $x - x_{\max}$. В 1975 г. американские математики Ли и Йорке опубликовали работу «Период три означает хаос». Речь шла о том, что если при частном значении параметра логистическое или другое одномерное отображение вида $x_{n+1} = f(x_n)$ имеет цикл периода три, то оно имеет бесконечное множество циклов всех прочих периодов. Эта работа привлекла большое внимание, и стоит отметить, что именно в ней в контексте нелинейной динамики впервые появился термин «хаос», ставший впоследствии общепринятым обозначением всей области деятельности, о которой мы ведем речь. Только через несколько лет на Западе стало широко известно, что еще в 1964 г. советский математик А. Н. Шарковский опубликовал гораздо более содержательную теорему, устанавливающую самые общие закономерности сосуществования циклов различного периода в одномерных непрерывных отображениях.

К середине 70-х годов было уже хорошо известно, что при увеличении параметра в логистическом отображении имеет место последовательность бифуркаций удвоения периода. Соответствующие компьютерные результаты очень наглядно были представлены, например, в работе Роберта Мэя (May, 1976). В это время, занимаясь исследованием удвоений периода с помощью карманного калькулятора, американский физик Митчел Фейгенбаум, работавший в Лос-Аламосской национальной лаборатории, обнаружил, что точки бифуркаций удвоения периода накапливались к определенному пределу — порогу возникновения хаоса по закону геометрической прогрессии с показателем 4,669... Этот показатель оказался универсальным, т. е. возникал и в других отображениях, и, как затем выяснилось, в нелинейных диссипативных системах самого разного вида. Используя аппарат, аналогичный развитому ранее в теории фазовых переходов, — метод ренормализационной группы, Фейгенбаум построил замечательную теорию, объясняющую универсальность удвоений периода (Feigenbaum 1978, 1979). Теория эта выглядела слишком формально, с точки зрения физиков, и слишком нестрого, с точки зрения математиков, так что Фейгенбауму далеко не сразу удалось опубликовать статью с изложением своих результатов. Эта задержка отчасти компенсировалась тем, что Фейгенбаум активно рассказывал о своей работе на конференциях и семинарах. В дальнейшем переход к хаосу через удвоения периода, демонстрирующий обнаруженные свойства универсальности, наблюдался в огромном количестве нелинейных систем различной физической природы и в их моделях. Одна из первых очень аккуратных работ — эксперимент по конвекции в жидком гелии (Maurer, Libchaber, 1979). Работа Фейгенбаума стимулировала также изучение и ренормгрупповое описание других сценариев возникновения хаоса — через перемежаемость (Pomeau, Manneville, 1980) и через разрушение квазипериодического движения в диссипативных системах (Shenker, 1982; Feigenbaum et al., 1982; Rand et al., 1982; Ostlund et al., 1983).

1.6. Математика

Следует отметить ту неоценимую роль, которую сыграли для науки о динамическом хаосе казалось бы абстрактные исследования, диктовавшиеся внутренней логикой развития самой математики. Это, в первую очередь, теория множеств и теория размерности. Разработанные великим немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918) представления о бесконечных множествах, их сравнении посредством установления взаимно-однозначного соответствия, определение счетного множества и континуума, знаменитый пример множества Кантора служат рабочими инструментами исследователей в области нелинейной динамики. Эти концепции будут неоднократно встречаться в нашем курсе. Другие примеры «математических монстров» (снежинка Коха, ковер Серпиньского и др.), придуманных математиками для объяснения тонких моментов теории множеств, используются для иллюстрации свойств объектов, с которыми приходится иметь дело при изучении сложной динамики (странные аттракторы). Нетривиальное обобщение понятия размерности, применимое к таким множеством, было разработано немецким математиком Феликсом Хаусдорфом (1868–1942) и также стало рабочим инструментом в нелинейной динамике.

Множества с нецелой размерностью Хаусдорфа называют фракталами. Этот термин был введен сравнительно недавно Бенуа Мандельбротом. Именно он обратил внимание на то, что странные объекты, «математические монстры», могут во многих ситуациях служить вполне реалистичными моделями различных образований в природе. Такого рода примеров известно теперь очень много (облака, горные массивы, кластеры из частиц во взвесях, магнитные домены, вихри в турбулентной жидкости и так далее). Будучи далекой от принятых в математике стандартов стиля и строгости изложения, книга Мандельброта представляла собой скорее произведение научно-популярного жанра. Тем не менее, она вызвала массовый интерес научного сообщества и стимулировала бурное развитие новой дисциплины — фрактальной геометрии, соприкасающейся по многим пунктам с нелинейной динамикой.

Нетривиальным синтезом теории размерности, теории меры, концепций статистической физики, стал так называемый мультифрактальный или термодинамический формализм, обеспечивающий разностороннее описание свойств странных множеств, встречающихся при изучении сложной динамики нелинейных систем (Вул и др., обзор 1984; Halsey et al., 1986).

Выше мы упоминали об исследовательской программе теории колебаний по Андронову и Понтрягину. Эта программа реализована в изящной и законченной форме для систем с двумерным фазовым пространством. Однако начиная с размерности три, возникают глубокие проблемы, из-за которых выполнение этой программы становится принципиально невозможным. Оказывается, что в пространстве систем могут существовать области, где структурно неустойчивые системы образуют всюду плотное множество. Само осознание этого обстоятельства было важным событием в теории динамических систем и оно связано с именем американского математика Стефана Смейла. В нашем курсе будет рассмотрено отображение подковы Смейла — простой пример искусственной системы с нетривиальной динамикой.

Интересно, что на Смейла оказала влияние упоминавшаяся выше работа Картрайт и Литтлвуда о неавтономном генераторе Ван-дер-Поля. Работы Смейла, в свою очередь, стимулировали создание советским математиком Д. В. Аносовым так называемой гиперболической теории, имеющей в основе систему аксиом, выполнение которых обеспечивает хаотическую динамику.

1.7. Прикладной хаос

Очень часто дискутируется вопрос: для чего нужен хаос?

Прежде всего, нельзя недооценивать колоссального мировоззренческого значения этой концепции. Окружающий нас мир полон нелинейных явлений и процессов, правильное представление о которых немыслимо без понимания возможности хаоса, а также связанных с этим принципиальных ограничений на предсказуемость поведения сложных систем. Например, становится вполне очевидной несостоятельность учения об однозначной определенности исторического процесса.

Сказанное не мешает обсуждать возможность использования хаоса в системах различной природы для каких-либо конкретных практических целей или же учета тех последствий, к которым может привести возникновение сложной динамики.

Приведем простой пример — задачу о динамике судна или нефтяной платформы при наличии волнения (Thompson, Stewart, 1986). В известном приближении, это нелинейная динамическая система с внешним периодическим воздействием. Нормальное, рабочее расположение судна отвечает одному аттрактору системы, перевернутое — другому. Можно задаться вопросом, как расположен и как устроен бассейн притяжения второго аттрактора. Как он зависит от интенсивности волнения? Ясно, что попадание в бассейн притяжения второго аттрактора ведет к катастрофе! Подчеркнем, что только нелинейный анализ обеспечивает всестороннее понимание ситуации, выработку условий и рекомендаций по избежанию катастрофы.

Благодаря динамической природе хаотических режимов и их чувствительности по отношению к малым возмущениям они допускают эффективное управление посредством внешнего контролируемого воздействия. Целью такого воздействия может быть реализация в системе периодического режима вместо хаоса или попадание в заданную область фазового пространства. Эта идея, выдвинутая первоначально группой американских исследователей из университета штата Мериленд (Ott, Grebogi, Yorke, 1990), представляется очень перспективной и плодотворной в прикладном плане. К настоящему времени по этому предмету имеется обширная литература, проведено множество международных научных конференций.

Успешные примеры управления хаосом реализованы в механических системах, электронных устройствах, лазерах. В качестве примера можно привести работу (Bollt, Meiss, 1995), где рассматривается применение методики управления хаосом для того, чтобы направить космический аппарат на Луну. Оказывается, что с помощью малых контролируемых воздействий задачу удается решить с очень существенной экономией топлива, правда, ценой увеличения продолжительности полета.

Другое направление применения идей и методов нелинейной динамики связано с проблемой обработки сигналов. Представим себе, что исследуется удаленный и недоступный объект, так что наши возможности ограничиваются анализом поступающего от него сигнала. За последние годы были предложены методики, позволяющие выяснить, произведен ли сигнал динамической системой, а также получить информацию о свойствах и характеристиках этой системы. Таким образом, аппарат нелинейной динамики превращается в инструмент исследования, позволяющий сделать заключение или предположение о структуре объекта, сконструировать его динамическую модель и т. д. Разработку методов и алгоритмов анализа сигналов можно считать важным направлением нелинейной динамики, непосредственно связанным с возможными приложениями.

Очень высоко оцениваются перспективы использования анализа и обработки сигналов, конструирования моделей, а также методик управления хаосом применительно к проблемам медицины и биологии.

В радиотехнике и электронике известен целый ряд приложений, где необходимы генераторы шумоподобных колебаний, в роли которых могут выступать различные устройства, функционирующие в режиме динамического хаоса. Примерами могут служить генераторы с запаздывающей связью на лампе бегущей волны (Кислов, Залогин, Мясин, 1979) и на лампе обратной волны (Гинзбург, Кузнецов, 1981; Безручко, Кузнецов, Трубецков, 1979; Безручко и др., 1983).

Одно из возможных приложений хаоса состоит в использовании генерируемых динамическими системами хаотических сигналов в целях коммуникации. Благодаря хаотической природе сигналов открываются новые возможности кодирования информации, которая становится труднодоступной для перехвата. Предложен целый ряд схем, обеспечивающих связь на хаотических сигналах, проведены демонстрационные эксперименты (см. обзор Hasler, 1998).

Результаты, полученные в нелинейной динамике, открывают новые нетривиальные возможности для сжатия и хранения, а также обработки информации. Интересным примером такого рода может служить предложенная в Институте радиотехники и электроники РАН схема кодирования и обработки информации с использованием одномерных отображений (Andreev, Dmitriev et al., 1992). Эффективные методы сжатия информации разработаны на основании идей фрактальной геометрии (см. обзор Дьюдни, 1990). Прорабатывается вопрос о реализации вычислительных процессов в системах, отличных от традиционной компьютерной архитектуры и опирающихся на феномены нелинейной динамики (Sinha, Ditto, 1998).