

# THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE

# THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE

Benoit B. Mandelbrot

БЕНУА Б. МАНДЕЛЬБРОТ

# ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРИРОДЫ

Перевод с английского А. Р. Логунова



Москва

2002

Интернет-магазин  
**MARFESS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Серия «Компьютинг в математике, физике, биологии»

### **Редакционный совет:**

В. А. Садовничий (председатель)  
А. В. Борисов (ответственный редактор)

И. Антониу, В. В. Белокуров, А. В. Болсинов, К. А. Валиев,  
В. А. Журавлев, А. А. Килин, В. В. Козлов, В. Д. Лахно, И. С. Мамаев,  
И. Пригожин, К. Симо, И. А. Тайманов, Д. В. Трещев, О. А. Хрусталева,  
А. И. Шафаревич

### **Мандельброт Б.**

Фрактальная геометрия природы. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.

Классическая книга основателя теории фракталов, известного американского математика Б. Мандельброта, которая выдержала за рубежом несколько изданий и была переведена на многие языки. Перевод на русский язык выходит с большим опозданием (первое английское издание вышло в 1977 г.). За прошедший период книга совсем не устарела и остается лучшим и основным введением в теорию фракталов и фрактальную геометрию. Написанная в живой и яркой манере, она содержит множество иллюстраций (в том числе и цветных), а также примеров из различных областей науки.

Для студентов и аспирантов, физиков и математиков, инженеров и специалистов.

**ISBN 5-93972-108-7**

© Б. Мандельброт, 2002

© Перевод на русский язык,

Институт компьютерных исследований, 2002

<http://rcd.ru>

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> . . . . .	11
<b>I. ВВЕДЕНИЕ</b>	
1. Тема . . . . .	13
2. Иррегулярное и фрагментированное в Природе . . . . .	20
3. Размерность, симметрия, расходимость . . . . .	30
4. Вариации на тему . . . . .	38
<b>II. ТРИ КЛАССИЧЕСКИХ ФРАКТАЛА — СОВЕРШЕННО РУЧНЫЕ</b>	
5. Какова протяженность побережья Британии? . . . . .	46
6. Снежинки и другие кривые Коха . . . . .	59
7. Покорение чудовищных кривых Пеано . . . . .	89
8. Фрактальные события и канторова пыль . . . . .	112
<b>III. ГАЛАКТИКИ И ВИХРИ</b>	
9. Фрактальный взгляд на скопления галактик . . . . .	127
10. Геометрия турбулентности; перемежаемость . . . . .	144
11. Фрактальные особенности дифференциальных уравнений . . . . .	156
<b>IV. МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ФРАКТАЛЫ</b>	
12. Соотношения между длиной, площадью и объемом . . . . .	160
13. Острова, кластеры и перколяция . . . . .	170
14. Ветвление и фрактальные решетки . . . . .	191
<b>V. НЕМАСШТАБИРУЕМЫЕ ФРАКТАЛЫ</b>	
15. Поверхности положительного объема. Живая плоть . . . . .	211
16. Деревья. Скейлинговые остатки. Неоднородные фракталы . . . . .	217
17. Деревья и диаметрический показатель . . . . .	224

**VI. САМООТБРАЖАЮЩИЕСЯ ФРАКТАЛЫ**

18. Самоинверсные фракталы, аполлониевы сети и мыло . . . 238  
 19. Канторова пыль и пыль Фату. Самоквадрируемые драконы 257  
 20. Фрактальные аттракторы и фрактальные эволюции . . . 274

**VII. СЛУЧАЙНОСТЬ**

21. Случай как инструмент для создания моделей . . . . . 284  
 22. Условная стационарность и космографические принципы 292

**VIII. СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФРАКТАЛЫ**

23. Случайный творог . . . . . 299  
 24. Случайные цепи и сквиг-кривые . . . . . 316  
 25. Броуновское движение и броуновские фракталы . . . . . 326  
 26. Случайные кривые срединного смещения . . . . . 342

**IX. ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЫ**

27. Стоки рек. Масштабно-инвариантные сети и шумы . . . 346  
 28. Рельеф и береговые линии . . . . . 358  
 29. Площади островов, озер и чаш . . . . . 380  
 30. Изотермические поверхности однородной турбулентности 387

**X. СЛУЧАЙНЫЕ ТРЕМЫ. ТЕКСТУРА**

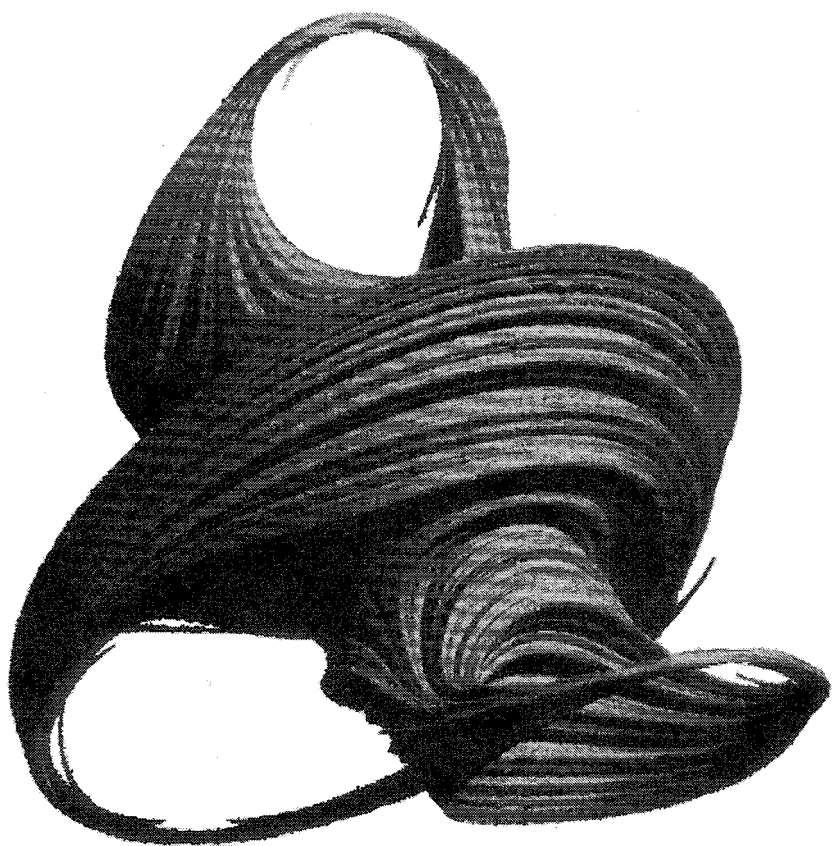
31. Тремы в интервале. Линейная пыль Леви . . . . . 391  
 32. Субординация. Упорядоченные галактики . . . . . 401  
 33. Круговые и сферические тремы . . . . . 417  
 34. Текстура . . . . . 428  
 35. Обобщенные тремы и управление текстурой . . . . . 440

**XI. РАЗНОЕ**

36. Фрактальная логика в статистической решеточной физике 449  
 37. Колебания цен и масштабная инвариантность в экономике 461  
 38. Масштабная инвариантность и степенные законы без геометрии . . . . . 471  
 39. Математическое приложение и дополнения . . . . . 482

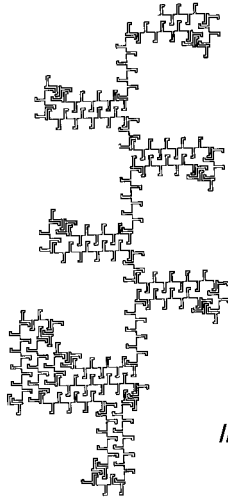
**XII. О ЛЮДЯХ И ИДЕЯХ**

40. Биографические очерки . . . . .	542
41. Исторические очерки . . . . .	561
42. Эпилог: путь к фракталам . . . . .	584
<b>Авторы компьютерной графики . . . . .</b>	<b>588</b>
<b>Благодарности . . . . .</b>	<b>590</b>
<b>Указатель избранных размерностей . . . . .</b>	<b>592</b>
<b>Дополнение, вошедшее во второе издание . . . . .</b>	<b>594</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>605</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>641</b>

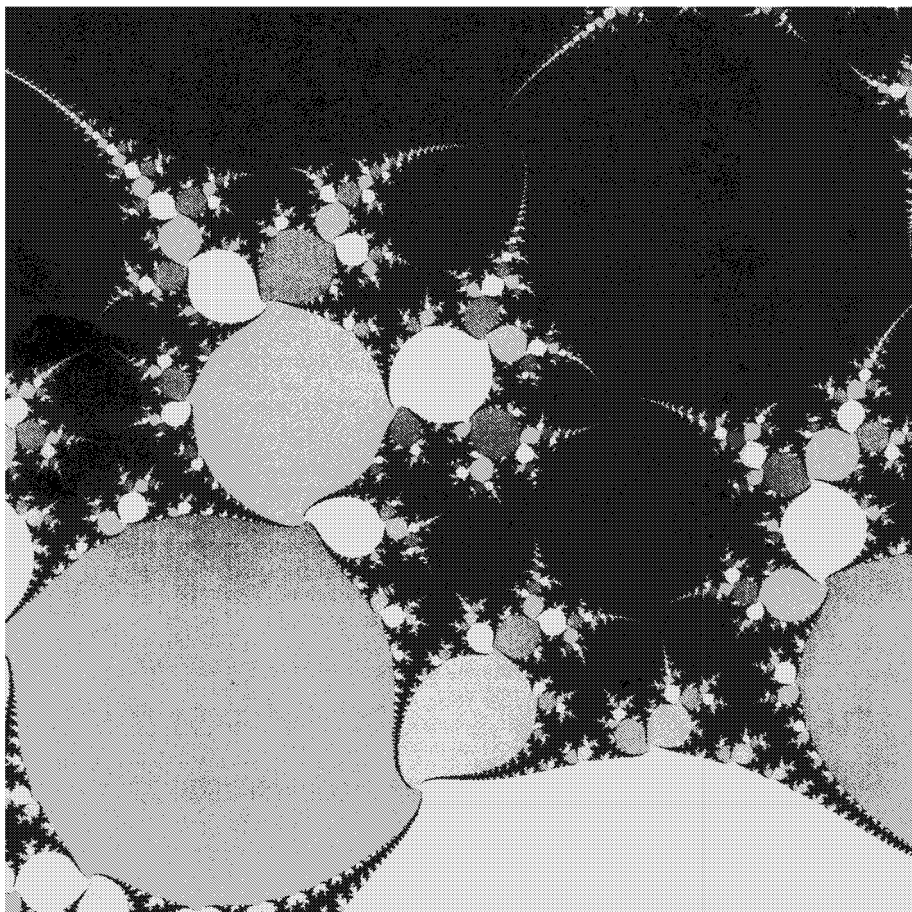


**Рис. 8. ИЛЛЮСТРАЦИЯ К СТР. 603**





*In Memoriam, B. et C.*  
*Pour Alette*



**Рис. 10. ИЛЛЮСТРАЦИЯ К СТР. 603**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная работа представляет собой расширенное переиздание моего эссе 1977 г. «Фракталы: форма, случайность и размерность», которое, в свою очередь, явилось расширенным переизданием написанного на французском языке эссе 1975 г. «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность»<sup>1</sup>. В переиздания добавлялись новые иллюстрации, текст серьезно пересматривался, в результате чего почти каждый раздел подвергался изменениям, а некоторые места я удалял совсем; кроме того, в книгу вносились дополнения, посвященные моей прежней работе, и — что более важно — обширные дополнения, посвященные новым исследованиям.

Существенный вклад и в эссе 1977 г., и в эту книгу внес Рихард Ф. Фосс, в особенности благодарен я ему за создание фрактальных хлопьев, большей части ландшафтов и планет. Программы, с помощью которых были выполнены многие поразительные иллюстрации специально для нового издания настоящего эссе, были предоставлены В. Аланом Нортоном.

За неоценимое, тесное и длительное сотрудничество я хочу поблагодарить Зигмунда В. Хандельмана и Марка Р. Лаффа, которые выполнили вычисления и подготовили графический материал, а также Х. Катарин Дитрих и Дженис Т. Ризничок, редактировавших и набиравших текст.

Благодарности отдельным лицам за программы, с помощью которых выполнены иллюстрации, и за прочее разнообразное содействие можно найти в конце книги после библиографического списка.

Я чувствую себя в неоплатном долгу перед Исследовательским Центром имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM за поддержку моих исследований и книг. Ральф Э. Гомори — сначала руководитель группы, затем управляющий отделом, а ныне вице-президент IBM по исследовательской работе — находил способы поддержать мою работу еще тогда, когда она была не более чем игрой, и сейчас продолжает оказывать мне любую помощь, какая бы ни потребовалась.

Моя первая научная публикация увидела свет 30 апреля 1951 г. На протяжении прошедших лет многим казалось, что я слишком непостоянен в выборе тем для своих исследований. Однако этот кажущийся беспорядок скрыл под собой глубокое единство цели, которое как раз и призвано открыть настоящее эссе — наряду с двумя предшествующими работами. Как бы то ни было, большая часть моих трудов — это муки рождения новой научной дисциплины.

---

<sup>1</sup>Les objets fractals: forme, hasard et dimension. — *Прим. перев.*

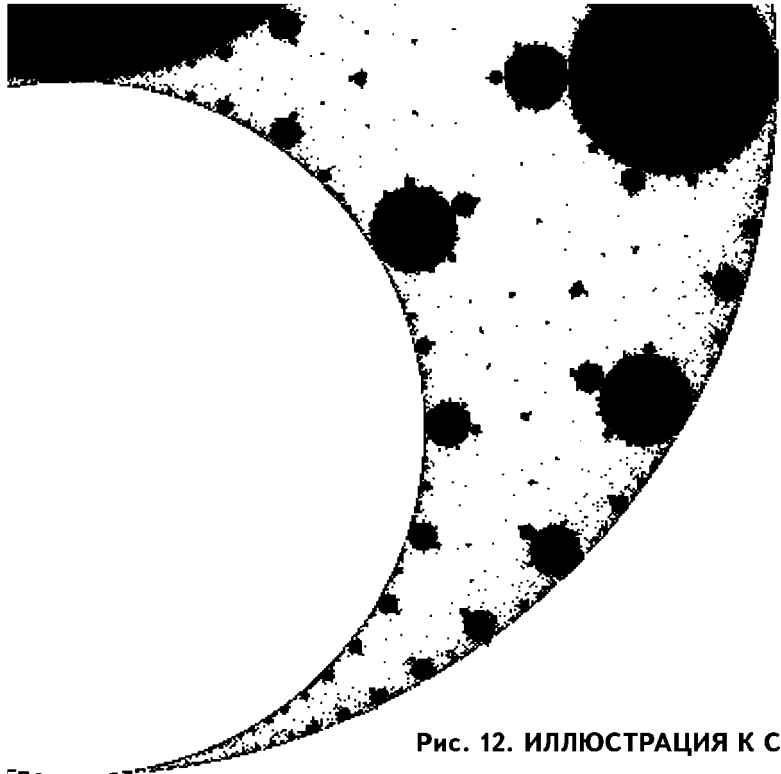


Рис. 12. ИЛЛЮСТРАЦИЯ К СТР. 604

# I ◇ ВВЕДЕНИЕ

---

## 1 ◇ ТЕМА

Почему геометрию так часто называют «холодной» и «сухой»? Одна из причин — ее неспособность описать форму облака, горы, дерева или береговой линии. Облака не являются сферами, горы — конусами, береговые линии нельзя изобразить с помощью окружностей, кору деревьев не назовешь гладкой, а путь молнии — прямолинейным.

В более общем виде я заявляю, что многие формы Природы настолько неправильны и фрагментированы, что в сравнении с *евклидовыми* фигурами (евклидовым в данной работе мы будем называть все, что относится к обычной геометрии) Природа демонстрирует не просто более высокую степень, но совершенно иной уровень сложности. Количество различных масштабов длины в естественных формах можно считать бесконечным для каких угодно практических задач.

Существование таких феноменов бросает нам вызов и побуждает заняться подробным изучением тех из форм, которые Евклид отложил в сторону из-за их «бесформенности» — исследовать, так сказать, морфологию «аморфного». Математики же пренебрегли этим вызовом и предпочли бежать от природы путем изобретения всевозможных теорий, которые никак не объясняют того, что мы видим или ощущаем.

Рискнув ответить на вызов, я задумал и разработал новую геометрию Природы, а также нашел для нее применение во многих разнообразных областях. Новая геометрия способна описать многие из неправильных и фрагментированных форм в окружающем нас мире и породить вполне законченные теории, определив семейство фигур, которые я называю *фракталами*. Наиболее полезные фракталы включают в себя элемент *случайности*; как правильность, так и неправильность их подчиняется статистическим законам. Кроме того, описываемые здесь фигуры стремятся к масштабной инвариантности, т. е. степень их неправильности и/или/ фрагментации неизменна во всех масштабах. Центральное место в настоящей работе занимает *фрактальная* (или хаусдорфова) *размерность*.

Одни фрактальные множества представляют собой кривые или поверхности, другие — несвязную «пыль»; есть и такие, чья форма столь причудлива, что ни наука, ни искусство не в состоянии предложить подходящее для них название. Я предлагаю читателю ознакомиться с ними прямо сейчас, просмотрев иллюстрации в книге.

На многих из этих иллюстраций представлены формы, которые до сих пор никто не рассматривал, на других же показаны давно известные конструкции, причем нередко впервые именно в таком виде. В самом деле, хотя фрактальная геометрия как таковая появилась лишь в 1975 г., многие из ее концепций и инструментов были разработаны раньше — пусть и для целей, в корне отличных от моей. Старые камни в кладке стен нового здания обеспечили фрактальной геометрии чрезвычайно мощный строго математический фундамент, в результате чего математика обогатилась новыми захватывающими идеями и проблемами.

И все же, в рамках данной работы меня не интересуют ни абстракция, ни обобщение ради самих себя; эта книга не является ни учебником, ни математическим трактатом. Несмотря на ее размер, я склонен определить ее жанр как научное эссе, так как изложенный в ней материал представляет только мою собственную точку зрения и ни в коем случае не претендует на всеохватывающую полноту. Кроме того, как и во многих других эссе, в ней немало отступлений и интерлюдий.

Такой неформальный подход призван помочь читателю избежать тех частей текста, которые лежат вне области его интересов или за пределами его компетенции. По всей книге разбросано множество «легких» в математическом смысле мест, особенно ближе к концу. Листайте книгу, где-то останавливаясь, что-то пропуская — по крайней мере, при первом и втором прочтении.

## ИЗЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧ

В этом эссе сводятся вместе аналитические методы различных наук с целью создания нового философско-математического синтеза. Таким образом, оно может рассматриваться и как *сборник прецедентов*, и как *манифест*. Кроме того, оно открывает изумленному взгляду совершенно новый мир пластичной красоты.

## СБОРНИК НАУЧНЫХ ПРЕЦЕДЕНТОВ

Термином «сборник прецедентов» юристы называют собрание реальных, имевших место в юридической практике случаев, объединенных общей темой. В науке соответствующего термина нет, поэтому я предлагаю его позаимствовать. Наиболее важные случаи требуют многократного рассмотрения, однако и менее значительные также заслуживают

внимания; на интенсивность обсуждения нередко влияет и наличие похожих «прецедентов».

Рассмотрение одного из прецедентов касается широко известного приложения широко известного математического аппарата к одной широко известной задаче природы; я имею в виду винерову геометрическую модель физического броуновского движения. К нашему удивлению, винеровский процесс нигде больше непосредственно не применим, и это наводит на мысль, что среди феноменов высокой степени сложности, с которыми мы имеем дело, броуновское движение представляет собой особый случай, исключительно простой и неструктурированный. Тем не менее, я включил броуновское движение в настоящую книгу, поскольку многие весьма полезные фракталы представляют собой не что иное, как тщательные его модификации.

Другие исследования затрагивают, главным образом, мою собственную работу, ее дофрактальные предпосылки и дальнейшее развитие, которым она обязана трудам тех ученых, которые откликнулись на предшествующие данному эссе 1975 и 1977 гг. Некоторые «прецеденты» относятся к высокорелищным горным ландшафтам и тому подобным вещам, тем самым выполняя, наконец, обещание, заложенное давным-давно в слово «геометрия». Другие имеют дело с субмикроскопическими ансамблями частиц — важнейшим объектом изучения для современной физики.

Основная тема некоторых примеров носит несколько эзотерический характер. В других примерах тема близка и знакома, однако ее геометрические аспекты не были до сих пор адекватно рассмотрены. В этой связи вспоминается замечание Пуанкаре о том, что есть вопросы, которыми задаемся мы, и вопросы, которые задают себя сами. А вопрос, который уже давно и безответно себя задает, считается детским.

Из-за этого в своих предыдущих эссе я неустанно подчеркивал тот факт, что фрактальный подход является одновременно и эффективным, и «естественным». Следует не только принять его с распростертыми объятиями, но еще и поразиться тому, как мы смогли так долго без него обходиться. Во избежание ненужных дискуссий я также сократил в ранних текстах до минимума разрыв между изложением стандартных взглядов и опубликованных материалов, изложением их с новых позиций и представлением своих собственных идей и результатов. В настоящем эссе я, напротив, весьма тщательно разграничиваю заслуги.

Кроме того, хочу со всей категоричностью заявить, что я не считаю фрактальную точку зрения панацеей; анализ каждого случая должен оцениваться согласно критериям, принятым в соответствующей области (т.е., как правило, исходя из его способности организовать, объяснить и предсказать), а не рассматриваться как очередной пример чисто математического построения. Поскольку я был вынужден обрывать рассмотрение каждого случая прежде, чем оно принимало узкоспециализиро-

ванный характер, подробную информацию читателю придется поискать где-то в другом месте. Данное эссе — от начала и до конца — одно сплошное предисловие (в подражание д'Арси Томпсону [568]). Специалист, ожидающий большего, будет разочарован.

## МАНИФЕСТ: У ГЕОМЕТРИИ ПРИРОДЫ ФРАКТАЛЬНОЕ ЛИЦО

Причиной же, собравшей все эти предисловия под одной обложкой, является то, что каждое из них помогает понять другие, так как все они имеют общую математическую структуру. Фримен Дэйсон дал однажды очень красноречивое резюме этой моей темы.

«Фрактал — это слово, изобретенное Мандельбротом для того, чтобы объединить под одним заголовком обширный класс объектов, которые [сыграли]... историческую роль... в развитии чистой математики. Классическую математику XIX в. от современной математики века XX отделяет великая революция идей. Корни классической математики лежат среди правильных геометрических структур Евклида и поступательной динамики Ньютона. Современная математика начинается с канторовой теории множеств и заполняющей пространство кривой Пеано. Исторически революция была вызвана открытием математических структур, не уместившихся в рамках построений Евклида и Ньютона. Эти новые структуры рассматривались... как «патологические»... как некая «выставка чудовищ», вроде кубистской живописи и атональной музыки, перевернувших примерно в то же время установленные стандарты хорошего вкуса в искусстве. Математики же, сотворившие этих чудовищ, считали их важными свидетельствами того, что мир чистой математики содержит в себе необыкновенное изобилие возможностей, далеко выходящее за рамки тех простых структур, что можно наблюдать в Природе. Математика XX в. расцвела в убежденности, что она уже оставила далеко позади все ограничения, налагаемые на нее ее естественным происхождением.

И тут, как отмечает Мандельброт... Природа сыграла с математиками шутку. Возможно, математикам XIX в. недоставало воображения — Природа же никогда таким недостатком не страдала. Как оказалось, окружающим нас и хорошо знакомым нам объектам всегда были присущи те самые патологические структуры, которые математики изобрели, чтобы избавиться от уз натурализма XIX в.»<sup>1</sup>

Короче говоря, я лишь подтвердил наблюдение Блеза Паскаля, заключающееся в том, что воображение иссякает прежде Природы. («L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir».)

<sup>1</sup>Из статьи Фримена Дэйсона «Characterizing Irregularity» (*Science*, May 12, 1978, vol. 200, no. 4342, pp. 677–678. Copyright ©1978 by the American Association for the Advancement of Science.)



Тем не менее, фрактальная геометрия *не является* прямым «приложением» идей, доминирующих в математике XX в. Это — новая отрасль, несколько запоздало родившаяся из кризиса математики, который начался в 1875 г., когда Дюбуа-Реймон впервые сообщил миру о непрерывной недифференцируемой функции, построенной Вейерштрассом ([115], главы 3, 39 и 41). В списке главных действующих лиц кризиса, продолжавшегося приблизительно до 1925 г., отметим такие выдающиеся имена, как Кантор, Пеано, Лебег и Хаусдорф. Этих людей, а вместе с ними и Безиковича, Больцано, Чезаро, Коха, Осгуда, Серпинского и Урысона, вы вряд ли встретите среди авторов эмпирических исследований Природы, однако я заявляю, что влияние трудов этих великих людей оказалось значительно шире рамок их первоначальных замыслов.

Я намерен показать, что за упомянутыми безумными творениями лежат необъятные миры, которых так и не увидели ни их создатели, ни несколько поколений последователей, — миры, которые будут небезынтересны тем, кто воспекает Природу, стремясь ей подражать.

И снова удивляемся мы — хотя некоторые недавние события должны были бы показать нам, что ничего удивительного тут нет — тому, что «применение языка математики к естественным наукам оказывается неспостижимо эффективным . . . , дар, которого мы настолько же не понимаем, насколько не заслуживаем. Мы должны быть благодарны за этот дар и надеяться, что будущие исследования не только не обесценят его, но и позволят распространить на многие области человеческого знания, будь то на горе или на радость, ко всеобщему удовольствию или, что гораздо более вероятно, к не менее всеобщему недоумению» [598].

## МАТЕМАТИКА, ПРИРОДА, ЭСТЕТИКА

Вдобавок ко всему, благодаря фрактальной геометрии мы узнаём о том, что некоторые из наиболее сухих и холодных разделов математики скрывают за внешней суровостью целый мир чистой пластичной красоты, доселе неведомой.

## «ФРАКТАЛ» И ПРОЧИЕ НЕОЛОГИЗМЫ

У римлян была поговорка, согласно которой «назвать — значит узнать»: *Nomen est numen*. До того, как я принялся за изучение упомянутых в предыдущих разделах множеств, они были не настолько важны, чтобы требовать для себя особого термина. Однако по мере того, как, благодаря моим усилиям, теряли свои клыки и покорялись классические чудовища, и поднимали головы новые монстры, все более очевидной становилась необходимость как-то их всех называть. Особенно остро

эта проблема встала передо мной, когда нужно было дать имя первому предшественнику настоящего эссе.

Термин *фрактал* я образовал от латинского причастия *fractus*. Соответствующий глагол *frangere* переводится как *ломать, разламывать*, т. е. создавать фрагменты неправильной формы. Таким образом, разумно — и как кстати! — будет предположить, что, помимо значения «фрагментированный» (как, например, в словах *фракция* или *рефракция*), слово *fractus* должно иметь и значение «неправильный по форме» — примером сочетания обоих значений может служить слово *фрагмент*.

Словосочетание *фрактальное множество* мы впоследствии определим строго, сочетания же *естественный* или *природный фрактал* я предполагаю применять более свободно для обозначения естественных структур, которые с той или иной целью могут быть представлены в виде фрактального множества. Например, броуновские кривые являются фрактальными множествами, а броуновское движение мы назовем природным фракталом.

(Так как слово *алгебра* происходит от арабского *jabara* («связывать, соединять»), получается, что *фракталы* и *алгебра* — этимологически противоположны.)

В своих странствиях по только что открытым или только что заселенным землям я часто испытывал искушение воспользоваться своим правом первооткрывателя и дать имена всем местным достопримечательностям. Вообще, мне кажется, что подходящий неологизм, как правило, удобнее, чем новое значение и без того затертого до дыр термина.

Кроме того, нельзя забывать и о том, что первичное значение слова часто так глубоко впечатано в сознание, что его не сотрешь оттуда никакими переопределениями. Вольтер писал в 1730 г.: «Если бы Ньютон не воспользовался в своих трудах словом *притяжение*<sup>1</sup>, [Французская] Академия в полном составе прозрела бы и увидела бы, наконец, свет. К несчастью, произнося это слово в Лондоне, он и не подозревал о том, что в Париже оно ничего, кроме смеха, не вызывает». А что можно сказать о таком вот неуклюжем творении: «распределение вероятностей распределения Шварца в пространстве по отношению к распределению галактик»?

Для того, чтобы избежать этой ловушки, я выбирал при создании новых терминов, в основном, малоиспользуемые латинские и греческие корни (например, *трема*), и изредка заимствовал из простой и здоровой лексики домохозяйек, рабочих и фермеров. Дайте чудовищу какое-нибудь уютное, домашнее имя, и вы удивитесь, насколько легче будет его приручить! Специальными терминами стали у меня такие, например, слова, как *пыль*, *творог* и *сыворотка*. Я также готов отстаивать термин *пертай-*

<sup>1</sup>*Attraction*. Во французском языке это слово означает скорее взаимное влечение людей друг к другу, либо привлечение людей к какому-либо зрелищу (аттракцион), нежели притяжение в физическом смысле. — Прим. перев.

линг<sup>1</sup>, который мы будем применять для обозначения полного покрытия некоторой площади плотно прилегающими друг к другу самоподобными плитками (как на мостовой).

## ИЗЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧ (ЗАКЛЮЧЕНИЕ)

Суммируя вышеизложенное, отмечу, что в настоящем эссе описаны предлагаемые мной для множества конкретных задач — некоторые из этих задач имеют весьма почтенный возраст — решения с помощью математики (орудие, конечно, тоже не ново, однако таким образом его еще никто не использовал, если не считать математического аппарата броуновского движения). Случаи, с которыми позволяет справиться такая математика, и расширения, которых эти случаи от нее требуют, составляют основу новой научной дисциплины.

Ученые мужи будут очень удивлены (я в этом уверен) и обрадованы, обнаружив, что отныне и впредь они получают возможность рассматривать со строгих (но справедливых) количественных позиций те формы, которые раньше им приходилось характеризовать различными «ненаучными» словами — такими, например, как *ветвистый*, *водорослеобразный*, *волнистый*, *извилистый*, *клочковатый*, *промежуточный*, *прыщавый*, *пушистый*, *рябой*, *сморщенный*, *спутанный*, *странный*, *шероховатый* и т. д.

Собственно математики будут удивлены (я надеюсь) и обрадованы и тем, что множества, считавшиеся ранее исключительными [68], становятся в некотором смысле правилом, и тем, что конструкции, полагавшиеся ранее патологическими, естественным образом развиваются из весьма конкретных задач, и тем, что внимательное изучение Природы несомненно разрешит все старые вопросы и предложит взамен множество новых.

И все же в данном эссе я избегал чисто специальных проблем. Оно адресовано прежде всего людям науки вообще, а не только специалистам-математикам. Представление каждой новой темы начинается с конкретных примеров. Читатель самостоятельно и постепенно раскрывает для себя природу фракталов — такой путь представляется мне более результативным, нежели внезапное озарение с подачи автора.

А что касается искусства, то оно ценно само по себе.

---

<sup>1</sup> Термин образован слиянием латинской приставки *per-*, означающей, помимо прочего, полноту, завершенность либо длительность действия, и английского слова *tiling* — выкладывание плиткой, покрытие черепицей (используется также как термин в топологии). См. также пояснение к рис. 75 и 76. — *Прим. перев.*

## 2 ◊ ИРРЕГУЛЯРНОЕ И ФРАГМЕНТИРОВАННОЕ В ПРИРОДЕ

«Красота всегда относительна. . . Не следует. . . полагать, что берега океана и впрямь бесформенны только потому, что их форма отлична от правильной формы построенных нами причалов; форму гор нельзя считать неправильной на основании того, что они не являются правильными конусами или пирамидами; из того, что расстояния между звездами неодинаковы, еще не следует, что их разбросала по небу неумелая рука. Эти неправильности существуют только в нашем воображении, на самом же деле они таковыми не являются и никак не мешают истинным проявлениям жизни на Земле, ни в царстве растений и животных, ни среди людей.» Эти слова английского ученого XVII в. Ричарда Бентли (источник вдохновения для начальных строк настоящего эссе) свидетельствуют о том, что идея объединить формы берегов, гор и небесных объектов и противопоставить их евклидовым построениям возникла в умах людей уже очень давно.

### ИЗ-ПОД ПЕРА ЖАНА ПЕРРЕНА

Прислушаемся теперь к голосу, обладатель которого несколько более близок к нам — как по времени, так и по роду занятий. Прежде чем мы приступим к обсуждению неправильности и фрагментированности береговых линий, броуновских траекторий и других рисунков Природы, исследуемых в настоящем эссе, позвольте мне представить на ваш суд несколько цитат из одной статьи Жана Перрена [468] в моем вольном переводе. Последующие работы Перрена, посвященные броуновскому движению, принесли ему Нобелевскую премию и стимулировали развитие теории вероятности. Я же намерен привести здесь некоторые строки из его раннего философского манифеста. Хотя этот текст в несколько измененном виде появился позднее в предисловии к книге «Атомы» [470], *заметили его, похоже, только тогда, когда я процитировал его в первом (французском) издании моего эссе. Я слишком поздно обратил внимание на это обстоятельство, чтобы оно как-то существенно повлияло на книгу, однако этот отрывок вдохновлял меня в час нужды, не говоря уже о том, что он являет собой прекрасный образец ораторского искусства.*

«Общеизвестно, что хороший учитель, давая ученикам строгое определение непрерывности, покажет прежде, что лежащая в основе

этого понятия идея хорошо им знакома. Он построит на доске какую-нибудь вполне непрерывную кривую и, перемещая вдоль нее линейку, скажет: «Как видите, касательная существует во всех точках кривой». Или, например, для того, чтобы ознакомить учеников с понятием истинной скорости движущегося объекта в некоторой точке его траектории, учитель говорит: «Вы, разумеется, понимаете, что среднее между значениями скорости в двух соседних точках не изменяется сколько-нибудь существенно при приближении этих точек друг к другу на бесконечно малое расстояние». И многие люди, полагая, что для некоторых всем знакомых движений такой взгляд достаточно точно отражает положение вещей, не желают замечать, что все не так просто.

Математики, однако, прекрасно понимают, что попытка показать при помощи построения кривых то, что каждая непрерывная функция имеет производную, по меньшей мере, наивна. Хотя дифференцируемые функции и являются самыми простыми, они все же представляют собой исключение. Говоря языком геометрии, кривые, не имеющие касательных, могут считаться правилом, в то время как правильные кривые — такие, например, как окружность — любопытным, но весьма частным случаем.

Изучение же общего случая представляется, на первый взгляд, остроумным, но совершенно искусственным упражнением для праздного интеллекта — этакое стремление к абсолютной точности, доведенное до абсурда. Те, кто впервые слышит о кривых без касательных или о функциях без производных, часто склонны полагать, что в Природе не существует ни подобных сложных конструкций, ни даже намек на них.

Это, однако, неверно — математики со своей логикой оказываются ближе к реальности, нежели физики с их практическими представлениями. В качестве иллюстрации к этому утверждению взглянем непредвзято на некоторые экспериментальные данные.

Возьмем, например, одну из белых чешуек, которые образуются при добавлении соли в раствор мыла. С некоторого расстояния может показаться, что чешуйка имеет четко очерченный контур, однако при более близком рассмотрении четкость исчезает. Мы больше не можем провести мысленно касательную к любой точке этого контура. Вполне удовлетворительная, на первый взгляд, линия оказывается либо перпендикулярной к границе, либо наклонной. Использование увеличительного стекла или даже микроскопа ничуть не уменьшает неопределенности — при каждом очередном увеличении возникают новые неправильности, и нам никак не удастся получить такую же четкую и гладкую границу, как, например, у стального шарика. Таким образом, если считать последний классической иллюстрацией непрерывности, то на примере нашей чешуйки можно сформулировать более общее понятие непрерывной функции, не имеющей производной.»

Прервемся ненадолго, чтобы взглянуть на рисунки 25 и 26.

Здесь и далее черно-белые иллюстрации приводятся сразу же после соответствующей главы и нумеруются номерами страниц, на которых они расположены. Цветные иллюстрации собраны в отдельной вклейке, причем пояснения к этим иллюстрациям не связаны непосредственно с остальным содержанием книги.

Продолжим цитату.

«Не следует забывать о том, что данная неопределенность положения касательной в некоторой точке контура ни в коей мере не то же самое, что и неопределенность, наблюдаемая, скажем, на карте побережья Бретани. Хотя карта также будет изменяться в зависимости от масштаба, мы всегда сможем найти касательную, так как карта — это всего лишь условный рисунок. Напротив, существенным свойством нашей чешуйки, равно как и самого побережья, является следующее: можно только *предполагать* — так как увидеть этого мы не в состоянии, — что их границы в любом масштабе включают в себя такие детали, которые полностью исключают возможность существования какой-либо определенной касательной.

Не покидая экспериментально подтверждаемой реальности, мы наблюдаем под микроскопом проявление броуновского движения на примере малой частицы, взвешенной в толще жидкости (см. рис. 29). Мы видим, что направление прямой, соединяющей точки, соответствующие двум очень близким во времени положениям частицы, изменяется по мере уменьшения временного промежутка между двумя измерениями совершенно беспорядочно. Беспристрастный наблюдатель заключит из этого, что он имеет дело с функцией, не имеющей производной, а вовсе не с кривой, к которой в любой ее точке можно провести касательную.

Хотя близкое рассмотрение любого объекта ведет в общем случае к обнаружению его в высшей степени неправильной структуры, не следует забывать и о том, что можно весьма достоверно оценить его свойства с помощью непрерывных функций. Древесина бесконечно пориста, однако нам удобнее считать, что поверхность отпиленного и обструганного деревянного бруска имеет конечную площадь. Иными словами, в определенном масштабе и при определенных методах исследования можно полагать, что многие феномены представимы в виде правильных непрерывных функций — так, оборачивая кусок губки фольгой, вовсе не обязательно точно следовать всем изгибам сложной поверхности губки.

Более того, если мы считаем, что материя обладает *бесконечно* зернистой структурой — а это вполне в духе атомной теории, — то возможность применять к реальности *строгое* математическое понятие непрерывности сводится почти на нет.

Рассмотрим, например, способ, с помощью которого мы определяем плотность воздуха в заданной точке в заданный момент времени.

Мы мысленно рисуем сферу объема  $v$  с центром в упомянутой точке, содержащую массу воздуха  $m$ . Отношение  $m/v$  определяет среднюю плотность воздуха внутри сферы, *истинной* же плотностью мы считаем некоторое предельное значение этого отношения. Это понятие, однако, предполагает, что средняя плотность для сфер, меньших некоторого объема, практически постоянна. Средняя плотность воздуха в сфере объемом  $1\,000\text{ м}^3$  может значительно отличаться от плотности в сфере объемом  $1\text{ см}^3$ , но для сфер объемом в  $1\text{ см}^3$  и  $0,001\text{ мм}^3$  ожидаемая разница составит величину лишь порядка  $10^{-6}$ .

Предположим, что объем постепенно уменьшается. Вместо того, чтобы уменьшаться вместе с ним, флуктуации только растут. Для масштабов, при которых наблюдается броуновское движение, флуктуации достигают уже  $10^{-3}$ , а когда радиус нашей гипотетической сферы достигает сотых долей микрона, порядок флуктуаций возрастает до 0,2.

Еще немного, и радиус малой сферы достигает размеров молекулярного порядка. Будучи помещена внутрь области, заполненной газом, такая сфера, в общем случае, оказывается в межмолекулярном пространстве, где средняя плотность по определению *обращается в нуль*. *Истинная* плотность в данной точке также *обращается в нуль*. Но приблизительно в одном случае из тысячи точка окажется внутри молекулы, и средняя плотность в ней будет в тысячи раз больше, чем то значение, которое мы обычно считаем истинной плотностью газа.

Предположим, что радиус сферы продолжает постепенно уменьшаться. Вскоре, если не возникнет никаких исключительных обстоятельств, сфера совершенно опустеет и далее будет оставаться пустой, поскольку пусто межатомное пространство. Истинная плотность *обращается в нуль* почти везде — за исключением бесконечного множества изолированных точек, где она бесконечно возрастает.

Похожие соображения можно применить и к другим физическим свойствам — таким, например, как скорость, давление или температура. Вглядываясь в нарисованную нами неизбежно несовершенную картину Вселенной при все возрастающем увеличении, мы видим, что поведение этих свойств становится все более нерегулярным. Функция, описывающая любое физическое свойство, образует в межматериальном пространстве *континуум*, состоящий из бесконечного количества сингулярных точек.

Пример бесконечно разрывной материи — непрерывный эфир с вкраплениями крошечных звезд — являет нам космическая Вселенная. Разумеется, все те заключения, к которым мы пришли выше, могли бы быть достигнуты с помощью воображаемой сферы, с легкостью вмещающей в себя планеты, солнечные системы, звезды и туманности. . .

Позволим себе высказать одно предположение, достаточно произвольное, но непротиворечивое. Наверняка мы вскоре столкнемся с такими случаями, для описания которых окажется проще использовать

недифференцируемые функции, нежели те, что имеют производную. Когда такое произойдет, практическая ценность математических исследований иррегулярных континуумов станет очевидной всем».

И далее, подчеркивая мысль, с новой строки:

«Однако это — всего лишь мечтания. Пока».

## КОГДА «ВЫСТАВКА ЧУДОВИЩ» СТАНОВИТСЯ МУЗЕЕМ НАУКИ

Часть из тех мечтаний, относящаяся к броуновскому движению, и впрямь воплотилась в реальности еще при жизни Перрена. Случилось так, что его статья [469] привлекла внимание Норберта Винера, причем восторженный и удивленный Винер тут же решил должным образом исследовать и строго определить недифференцируемую первую модель броуновского движения ([595], с. 38–39 или [596], с. 2–3).

Эта модель до сих пор сохраняет свое значение, хотя физики и указывают на то, что ее недифференцируемость проистекает из злостной идеализации, а именно — из пренебрежения инерцией. Поступая так, физики поворачиваются спиной к наиболее существенному для данного труда свойству модели Винера.

Что касается других предсказываемых Перреном применений математических исследований в физике, то до сегодняшнего дня никто даже не пытался этим заниматься. Собрание множеств, о которых упоминал Перрен (кривые Вейерштрасса, канторова пыль и подобные им), до сих пор остается предметом изучения «чистой математики».

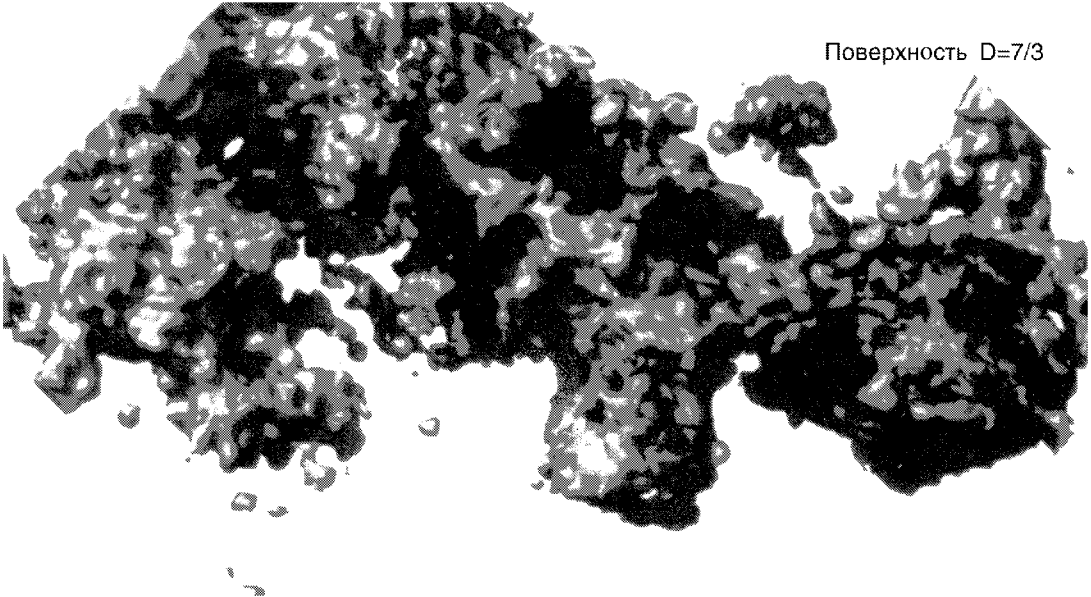
Некоторые авторы (например, Виленкин [573]) называют это собрание «Музеем математических искусств», не подозревая (я уверен), насколько точно и полно доказываются эти слова в данном эссе. Из первой главы мы помним, что кое-кто (начиная еще с Анри Пуанкаре) предпочитает использовать для упомянутого собрания словосочетание «Выставка чудовищ» — подобно Джону Валлису с его «Трактатом об алгебре» (1685), где четвертое измерение было описано как «чудовище в Природе, не более возможное, чем *химера* либо *кентавр*».

Одна из задач настоящего эссе состоит в том, чтобы посредством беспристрастного рассмотрения всевозможных явных «случаев» показать читателю, что та же самая «Выставка» с полным правом может называться «Музеем науки».

Можно только похвалить математиков за то, что они в столь давние времена додумались до первых из упомянутых множеств; однако то, что те же математики так долго отпугивали нас от этих множеств, достойно всяческого осуждения.







### Рис. 25 и 26. ИСКУССТВЕННЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ ЧЕШУЙКИ

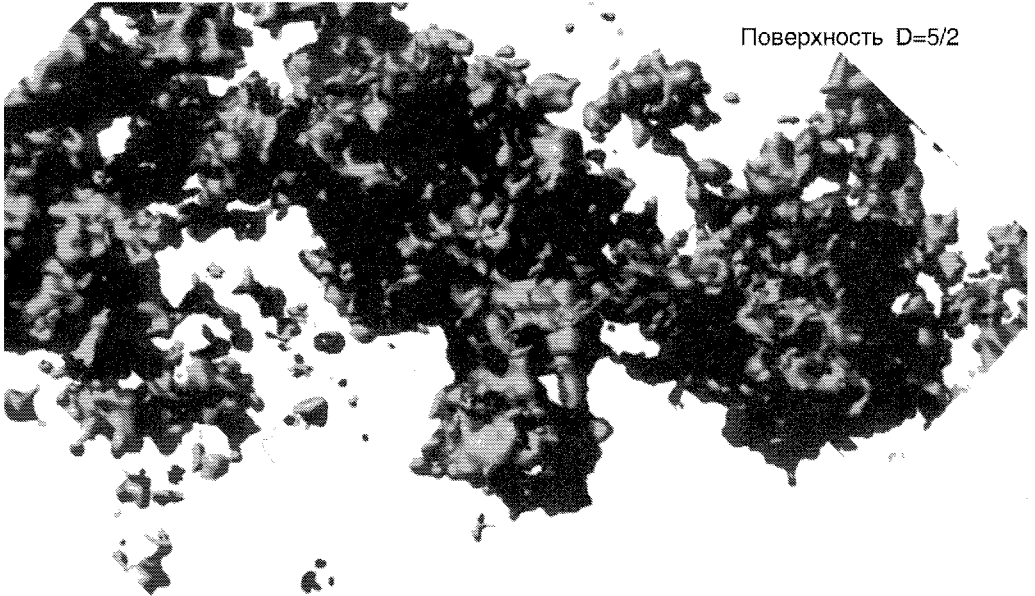
В процитированных во второй главе вдохновенных словах Жана Перрена описывается форма «белых чешуек, которые образуются при добавлении соли в раствор мыла». Помещенные здесь рисунки иллюстрируют замечания Перрена.

Спешу заверить вас, что эти иллюстрации не являются ни фотографиями, ни смоделированными с помощью компьютера изображениями каких бы то ни было реальных объектов, будь то чешуйки мыла, дождевые облака, тучи вулканического пепла, астероиды или медные самородки.

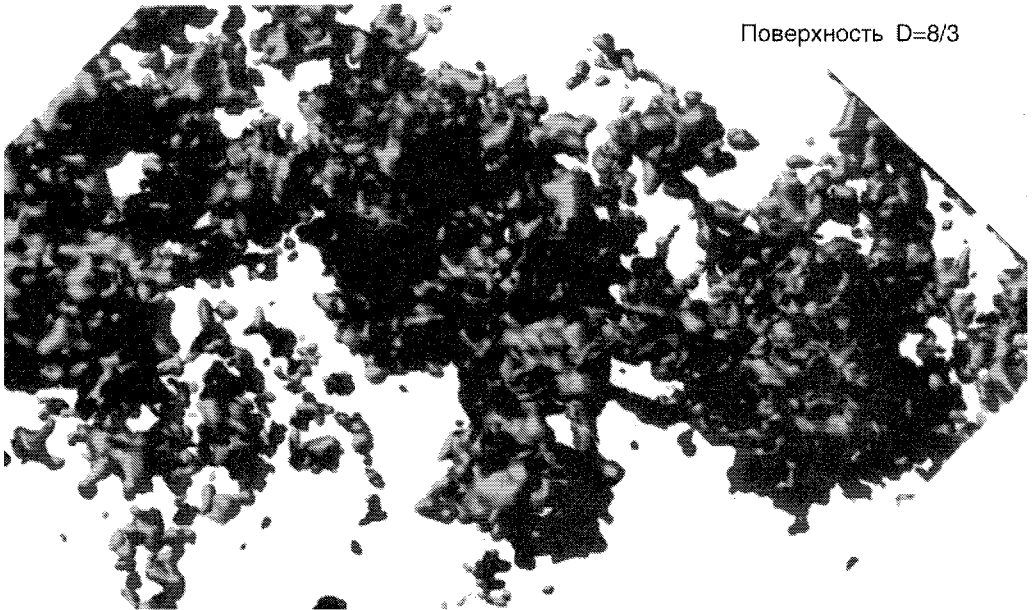
Они также не претендуют на то, чтобы считаться продуктом теории, описывающей различные аспекты образования реальных чешуек — химические, физико-химические и гидродинамические.

Более того, они вообще не имеют никакого отношения к каким бы то ни было научным принципам.

Это — полученные с помощью компьютера изображения, призванные по возможности наглядно проиллюстрировать некоторые геометрические характеристики, которые, как мне показалось, присутствуют в описании Перрена, и которые я смоделировал, используя понятие фрактала.



Поверхность  $D=5/2$



Поверхность  $D=8/3$

Эти чешуйки существуют только в памяти компьютера. Насколько мне известно, никто и никогда не создавал их реальных моделей. Затенение также считал компьютер.

Построение таких чешуек описывается в главе 30. Видимые невооруженным глазом различия между ними объясняются разными значениями параметра  $D$ , которые указаны над рисунками. Этот параметр, называемый фрактальной размерностью и являющийся ключевым понятием настоящего труда, вводится в главе 3. Похожесть общих очертаний фигур во всех трех случаях объясняются смещением, которое является результатом аппроксимации и обсуждается в пояснении к рис. 372 и 373.

Более ранняя версия этих иллюстраций странно напоминала якобы фотографию лох-несского чудовища. Можно ли считать подобное сходство случайным совпадением?

---

### **Рис. 29. ФИЗИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАРИСОВКИ ЖАНА ПЕРРЕНА**

В статье [469] физическое броуновское движение описывается следующим образом: «Все части находящейся в состоянии равновесия жидкой массы (такой, например, как вода в стакане), представляются нам совершенно неподвижными. Если поместить в нее объект с большей плотностью, то он опустится вниз. Скорость этого падения, разумеется, будет тем меньше, чем меньше объект, и все же в конце концов любой видимый объект опускается на дно сосуда и не проявляет стремления вновь подняться на поверхность. Однако, наблюдая за взвесью в жидкости очень мелких частиц, нетрудно заметить, что их движение абсолютно беспорядочно. Они движутся, останавливаются, снова начинают движение, *взбираются вверх*, опускаются, *снова поднимаются* и совершенно не желают оставаться неподвижными».

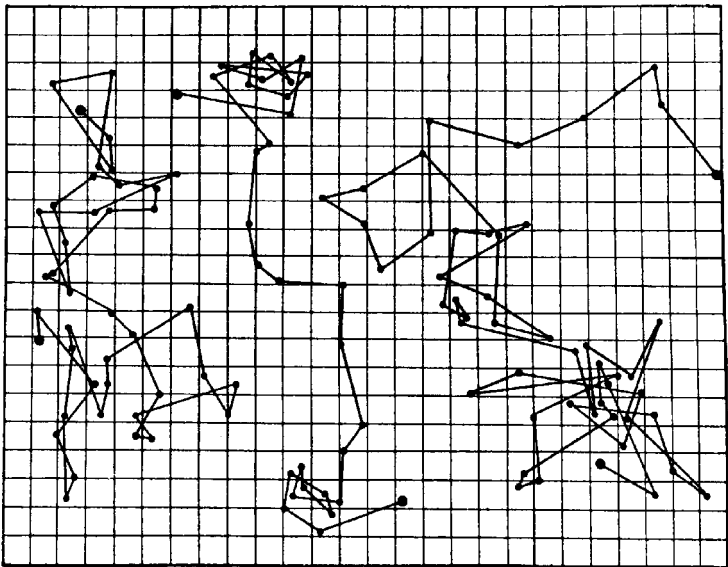
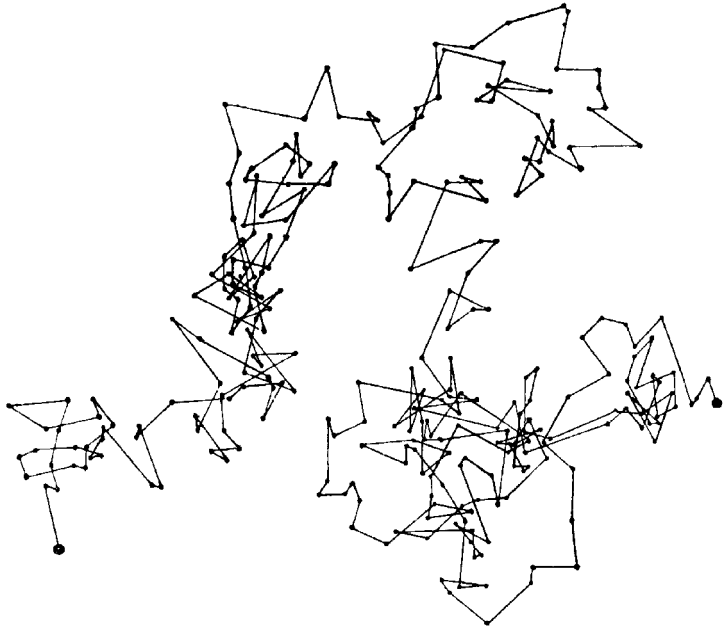
В качестве иллюстрации приводится один из многих изображающих этот естественный феномен рисунков из книги Перрена «Атомы» [470]. На нем изображены четыре индивидуальные траектории движения коллоидной частицы радиуса  $0,53 \mu$ , полученные с помощью микроскопа. Через каждые 30 секунд на координатной сетке отмечались последовательные положения частицы (шаг сетки  $3,2 \mu$ ), которые соединялись затем прямыми (эти прямые, таким образом, не имеют никакого физического смысла).

Продолжим наш вольный перевод из Перрена [469]. «Может возникнуть искушение определить «среднюю скорость частицы», как можно точнее последовав за ней по ее извилистому пути. Однако подобная оценка окажется *в корне неверной*. И величина, и направление видимой

средней скорости частицы изменяются самым безумным образом. Рисунок дает лишь слабое представление об изумительной запутанности реальной траектории. Если бы положения частицы регистрировались в 100 раз чаще, то вместо каждого отрезка прямой мы получили бы ломаную, столь же сложную как и исходный рисунок, хотя и меньших размеров — и так далее. Нетрудно убедиться, что на практике понятие касательной в применении к таким кривым является полной бессмыслицей».

Автор настоящего эссе разделяет мнение Перрена, однако рассматривает неправильность под несколько иным углом. Мы подчеркиваем тот факт, что при последовательном увеличении разрешения микроскопа, длина траектории наблюдаемого броуновского движения возрастает до бесконечности (см. главу 25).

Кроме того, след, оставляемый броуновской частицей, в конце концов почти заполняет всю плоскость. Разве не напрашивается вывод, что в каком-то смысле (смысл этот нам еще предстоит отыскать) размерность этой необычной кривой должна совпадать с размерностью плоскости? Самое интересное — так оно и есть. Одна из главных задач этой книги заключается в том, чтобы показать, как расплывчатое понятие размерности расщепляется на несколько вполне определенных составляющих. *Топологически* след движения броуновской частицы является кривой (размерность 1). Однако так как он способен заполнить практически всю плоскость, то во *фрактальном* смысле его размерность равна 2. Расхождение между этими двумя величинами дает броуновскому движению право называться, согласно вводимой ниже терминологии, фракталом. ■



### 3 ◊ РАЗМЕРНОСТЬ, СИММЕТРИЯ, РАСХОДИМОСТЬ

Центральную роль в этой книге играют древние понятия *размерности* (т. е. количества пространственных измерений или степени многомерности) и *симметрии*. Кроме того, позже мы неоднократно столкнемся с различными симптомами *расходимости*.

#### ИДЕЯ РАЗМЕРНОСТИ

Во время кризиса 1875–1925 гг. математики осознали, что невозможно достичь истинного понимания неправильности и фрагментации (равно как правильности и связности), по-прежнему определяя размерность как число пространственных координат. Первый шаг в направлении строгого анализа был сделан Кантором в его письме к Дедекинду от 20 июня 1877 г., следующий — Пеано в 1890 г., а к середине 20-х гг. XX в. процесс благополучно завершился.

Как случается со всеми значительными интеллектуальными достижениями, результат этого процесса может иметь весьма различные интерпретации. Во всех попадавших мне на глаза математических исследованиях теории размерности подразумевается, что теория эта единственна и неповторима. Главным здесь, на мой взгляд, является то, что довольно расплывчатое понятие размерности, судя по всему, имеет много математических аспектов, которые не только принципиально различны, но еще и дают различные числовые значения этой самой размерности. То, что Уильям из Оккама говорил о сущностях, относится и к размерностям — не следует множить размерности без необходимости, однако от множественности размерностей нам никуда не деться. Евклид в свое время ограничился множествами, все существенные размерности которых совпадают — эти множества можно назвать *размерностно-согласованными* множествами. С другой стороны, различные размерности множеств, которым посвящена значительная часть этой книги, *отказываются* совпадать, т. е. эти множества *размерностно-несогласованы*.

Переходя от размерностей математических множеств к «эффективным» размерностям моделируемых этими множествами физических объектов, мы встречаемся с другой двусмысленностью, неизбежной и реально необходимой. И математические, и физические аспекты понятия размерности вкратце предваряются в данной главе.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМИНА «ФРАКТАЛЬНЫЙ»

В нижеследующем тексте используются не определенные ранее математические термины, однако многие читатели, возможно, сочтут этот отрывок полезным для себя или хотя бы просто занимательным. Остальные же вольны его пропустить.

Это и последующие отступления от основной линии настоящего эссе я буду помечать особыми скобками — ◁ и ▶. Последний символ намеренно сделан более заметным, чтобы любой затерявшийся в отступлениях и желающий двигаться дальше читатель мог с легкостью его найти. *Открывающая скобка* не столь привлекает внимание: мне не хотелось, чтобы отступления слишком сильно выделялись в тексте. В отступлениях часто можно встретить предварительное упоминание материала, обсуждаемого в последующих главах.

◁ Размерностную несогласованность основных фракталов можно использовать для трансформации интуитивного понятия фрактала в строго математическое. Я решил сосредоточиться на двух определениях, каждое из которых ставит в соответствие всякому множеству  $\mathbb{R}^E$  в евклидовом пространстве — каким бы «патологическим» оно ни выглядело — некое вещественное число, которое и с интуитивной, и с формальной точки зрения имеет полное право называться размерностью этого множества. Более неформальным из двух является определение топологической размерности по Брауэру, Лебегу, Менгеру и Урысону. Эта размерность описана в соответствующем разделе главы 41. Обозначим ее через  $D_T$ . Определение второй размерности было сформулировано Хаусдорфом в [203] и приведено в окончательный вид Безиковичем. Ее описание можно найти в главе 39, а обозначать ее мы будем через  $D$ .

◁ В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^E$  величины размерностей  $D_T$  и  $D$  заключены в промежутке от 0 до  $E$ . Однако на этом их сходство заканчивается. Размерность  $D_T$  всегда является целым числом, в то время как для размерности  $D$  это *вовсе не обязательно*. Эти две размерности не обязательно должны совпадать, они должны лишь удовлетворять неравенству Спилрайна (см. [231], глава 4)

$$D \leq D_T.$$

В случае евклидовых множеств  $D = D_T$ . Однако почти для всех множеств в этой книге  $D > D_T$ . Такие множества необходимо было как-то называть, поэтому я придумал термин *фрактал*, определив его следующим образом:

◁ *Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича для которого строго больше его топологической размерности.*

◁ Любое множество с нецелым значением  $D$  является фракталом. Например, исходное канторово множество представляет собой фрактал, поскольку, как мы увидим в главе 8, его размерность

$$D = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,6309 > 0, \quad \text{при } D_T = 0.$$

Канторово множество в пространстве  $\mathbb{R}^E$  можно обобщить так, чтобы  $D_T = 0$ , а  $D$  принимала бы любые желаемые значения в промежутке от 0 до  $E$  (включительно).

◁ Фракталом является и исходная кривая Коха, поскольку, как будет показано в главе 6, ее размерность

$$D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,2618 > 1, \quad \text{при } D_T = 1.$$

◁ Фрактал может иметь и целочисленную размерность. Например, в главе 25 показано, что траектория броуновского движения представляет собой фрактал, так как ее размерность

$$D = 2, \quad \text{при } D_T = 1.$$

◁ Тот поразительный факт, что размерность  $D$  не должна непременно быть целым числом, заслуживает некоторого терминологического отступления. Если понимать термин «дробь»<sup>1</sup> в широком смысле, т. е. как синоним термина «нецелое вещественное число», то некоторые из вышеперечисленных значений размерности  $D$  являются дробными — размерность Хаусдорфа–Безиковича иногда даже называют *дробной размерностью*. Однако учитывая, что  $D$  может принимать и целые значения (меньшие, чем  $E$ , но строго большие, чем  $D_T$ ), я предпочитаю называть величину  $D$  *фрактальной размерностью*. ►

## ФРАКТАЛЫ В ГАРМОНИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

◁ Исследование фракталов частично затрагивает и геометрический аспект гармонического анализа, однако в настоящем труде этот факт не слишком подчеркивается. Большинству читателей гармонический анализ (иначе называемый спектральным или анализом Фурье) мало известен, а многие из тех, кто эффективно используют его на практике, мало знакомы с его фундаментальными структурами.

Кроме того, каждый из этих подходов — и фрактальный, и спектральный — имеет свои характерные особенности и свою прелесть, которые лучше постигать на своем собственном опыте. И наконец, на мой взгляд, по сравнению с гармоническим анализом фракталы просты и интуитивно понятны. ►

<sup>1</sup> Англ. *fraction*. — Прим. перев.



## О «ПОНЯТИЯХ, КОТОРЫЕ . . . НОВЫ, НО . . . »

В свое время Лебег немало потешался над некоторыми «понятиями, которые, безусловно, новы, но абсолютно бесполезны». К размерности  $D$  эту характеристику никто не применял, однако ее использование было ограничено весьма узким кругом областей, причем все эти области относились к чистой математике. Я, пожалуй, был первым, кто успешно применил размерность  $D$  к описанию Природы. Одной из важнейших целей моей работы является закрепление за размерностью  $D$  центрального места в эмпирической науке и демонстрация таким образом того, что размерность эта обладает гораздо более широкой применимостью, чем кто-либо может себе представить.

В некоторых областях физики мое утверждение о важности размерности  $D$  было принято с исключительной готовностью. Более того, многие ученые, работающие в этих областях, сознавая неадекватность обычной размерности, уже пытались вести поиски в этом направлении, получая в результате всевозможные *дробные*, *аномальные*, либо *непрерывные* размерности. К сожалению, эти поиски никак не были связаны друг с другом. К тому же в некоторых случаях различные размерности определялись одинаково, ни одна из них не могла похвастать наличием математического теоретического обоснования, и ни одна не была должным образом разработана, так как из-за отсутствия математического обоснования эти размерности невозможно было отличить друг от друга. Для тех разработок, которые будут описаны ниже, существование математической теории жизненно необходимо.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ — ЭТО НЕ ТОЛЬКО ТОПОЛОГИЯ

Если вы спросите у математика, какая четко определенная область математики имеет дело с формами, он почти наверняка упомянет топологию. Топология, безусловно, имеет к нашим целям самое непосредственное отношение — мы даже упоминали о ней в предыдущей главе, — однако в настоящем эссе выдвигается и защищается утверждение, что довольно расплывчатое понятие формы содержит не только топологические, но и другие математические аспекты.

Топология, которую раньше называли *геометрией местоположений* или *analysis situs*<sup>1</sup> (греческое слово *Топος* переводится как «место» или «положение»), полагает, что все горшки с двумя ручками имеют одинаковую форму, так как если бы они обладали неограниченной гибкостью и сжимаемостью, то можно было бы из одного горшка вылепить любой другой, причем непрерывным образом, не делая никаких новых отверстий и не закрывая старых. Топология также учит, что форма бере-

<sup>1</sup> Анализ мест, или положений (лат.). — Прим. перев.

овой линии любого острова идентична форме береговой линии любого другого острова, поскольку все такие линии топологически идентичны окружности. Топологическая размерность береговой линии равна топологической размерности окружности, и обе они равны 1. Если добавить к острову несколько не соприкасающихся с ним «спутников», то совокупная береговая линия получившегося архипелага будет топологически идентична совокупности нескольких окружностей. Таким образом, топология *не видит* разницы между различными береговыми линиями.

В главе 5 показано, что различные береговые линии имеют, как правило, различные фрактальные размерности. Различия между фрактальными размерностями обусловлены различиями между *нетопологическими аспектами формы*, которые я предлагаю называть *фрактальными*.

Большинство действительно важных и интересных задач сложным образом сочетают в себе фрактальный и топологический аспекты формы.

Заметим, что в топологии определения собственно поля и размерности  $D_T$  развивались параллельно, а понятие фрактальной размерности  $D$  появилось на полвека раньше настоящего исследования в области фрактальных форм.

Кстати, из-за того, что некий класс топологических пространств носит имя Феликса Хаусдорфа, широко используемый для обозначения размерности  $D$  термин «хаусдорфова размерность» может быть воспринят как сокращение от «размерности хаусдорфова пространства», создавая тем самым впечатление, что  $D$  является топологическим понятием — это *абсолютно не так*. Вот вам еще одна причина, почему я предпочитаю термин *фрактальная размерность*.

## ЭФФЕКТИВНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Помимо математических идей, лежащих в основе размерностей  $D_T$  и  $D$ , я часто прибегаю к помощи *эффективной размерности* — понятия, которому *не следует* давать точного определения. Это мощное интуитивное понятие представляет собой возврат к древнегреческой пифагорейской геометрии. Новизна заключается в том, что в настоящем эссе значение эффективной размерности может быть дробным.

Эффективная размерность выражает соотношение между математическими множествами и естественными объектами. Строго говоря, все физические объекты — такие, например, как вуаль, нить или маленький шарик — должны быть представлены трехмерными телами. Однако физики предпочитают считать, что вуаль имеет размерность 2, а размерности нити и шарика равны соответственно 1 и 0 (при условии, разумеется, что и вуаль, и нить, и шарик достаточно малы). Например, для описания нити относящиеся к множествам с размерностями 1 или 3 теории должны быть соответствующим образом скорректированы с помощью поправочных членов. После этого строится более точная геометриче-

ская модель, требующая меньших поправок. Если повезет, такая модель оказывается верной даже без учета поправок. Иными словами, эффективная размерность неизбежно опирается на субъективный фундамент; она обусловлена приближением и, как следствие, степенью разрешения.

## ЭФФЕКТИВНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ, СКРЫТЫЕ В СКРУЧЕННОМ ИЗ НИТИ ШАРЕ

Для подтверждения последнего заявления скрутим из толстой нити диаметром 1 мм шар диаметром 10 см и рассмотрим скрытые в таком клубке эффективные размерности.

Удаленному наблюдателю наш клубок покажется фигурой с нулевой размерностью, т. е. точкой. (Да что там клубок! — еще Блез Паскаль и средневековые философы утверждали, что в космическом масштабе весь наш мир есть не более, чем точка!) С расстояния в 10 см шар из нитей выглядит как трехмерное тело, а с расстояния в 10 мм — как беспорядочное переплетение одномерных нитей. На расстоянии в 0,1 мм каждая нить превратится в толстую колонну, а вся структура целиком опять станет трехмерным телом. На расстоянии 0,01 мм колонны превратятся в переплетение волокон — шар снова станет одномерным. При дальнейшем приближении процесс становится периодическим — размерность наблюдаемой фигуры переключается с одного значения на другое и наоборот. Наконец, когда клубок превратится в скопление, состоящее из какого-то конечного числа точек, имеющих размеры порядка атомных, его размерность снова становится равной нулю. Похожую последовательность смены размерностей можно наблюдать при разглядывании листа бумаги.

Тот факт, что численный результат может и должен зависеть от соотношений между объектом и наблюдателем, не только вполне в духе сегодняшней физики, но и являет собой достойный подражания пример.

Большинство объектов, рассматриваемых в этой книге, похожи на наш нитяной клубок: они демонстрируют целую последовательность различных эффективных размерностей. Однако существует одно важное отличие: некоторые недостаточно определенные переходы между зонами с отчетливо выраженной размерностью интерпретируются здесь как фрактальные зоны, внутри которых  $D > D_T$ .

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ОДНОРОДНОСТЬ, МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И САМОПОДОБИЕ

Оставим пока размерности в покое и приготовимся к разговору о симметрии, для чего вспомним о простейших формах, с которых начинается евклидова геометрия: о линиях, плоскостях и пространствах. И о простейших физических задачах, возникающих при однородном распределении какой-либо физической величины — плотности, температуры, давления или скорости.

Однородное распределение вдоль линии, на плоскости или в пространстве обладает двумя очень привлекательными свойствами. Оно *инвариантно при смещении и при изменении масштаба*. При переходе к фракталам обе инвариантности неизбежно подвергаются модификации /или/ ограничению области их действия. Следовательно, наилучшими можно считать те фракталы, которые демонстрируют максимальную инвариантность.

В случае смещения различные участки траектории броуновского движения частицы не могут быть точно совмещены друг с другом, как, например, могут быть совмещены различные участки прямой линии. Тем не менее, можно считать, что эти участки совместимы в статистическом смысле. Почти все фракталы, представленные в этой книге, в той или иной степени инвариантны при смещении.

Более того, большинство этих фракталов инвариантны при некоторых преобразованиях масштаба. Назовем их *масштабно-инвариантными* фракталами. Фрактал, инвариантный при обычном геометрическом преобразовании подобия, называется *самоподобным*.

В составном термине *масштабно-инвариантные фракталы* прилагательное служит для смягчения существительного. Основной термин *фрактал* подразумевает неупорядоченность и относится к структурам ярко выраженной иррегулярности, тогда как определение *масштабно-инвариантный* намекает на некоторый порядок. Если же под основным термином понимать *масштабную инвариантность*, предполагающую строгий порядок, то *фрактал* сыграет роль модификатора, призванного исключить всякий намек на прямые и плоскости.

Не следует превратно понимать стремление допустить однородность и масштабную инвариантность. Как и в случае обыкновенной геометрии природы, все мы прекрасно осведомлены о том, что ни то в окружающем нас мире не является ни строго однородным, ни масштабно-инвариантным. Обыкновенная геометрия рассматривает прямые как предварительные модели. Так же и в механике понятие одноодного прямолинейного движения является лишь первым шагом.

Те же соображения применимы и к изучению масштабно-инвариантных фракталов, однако в этом случае первый шаг получается значительно более длинным, поскольку вместо прямых линий мы имеем огромное множество самых разнообразных возможностей, лишь самые яркие примеры которых вошли в эту книгу. Не следует удивляться тому, что масштабно-инвариантные фракталы используются здесь лишь как источники первых приближений к естественным структурам, подлежащим рассмотрению. Скорее, удивиться нужно тому, насколько поразительно верными оказываются эти первые приближения.

Нелишним будет напомнить, что идея самоподобия далеко не нова. В случае с прямыми эта идея пришла в голову еще Лейбницу примерно в 1700 г. (см. раздел МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПО ЛЕЙБ-

НИЦУ И ЛАПЛАСУ в главе 41). Ее математическому обобщению, не ограничивающемуся прямыми и плоскостями, скоро исполнится сто лет, хотя реальной его важности до настоящего эссе никто не признавал. Физики тоже давно знакомы с самоподобием — с тех пор, как в 1926 г. Льюис Ф. Ричардсон предположил, что турбулентность в широком диапазоне масштабов может быть разбита на самоподобные завихрения. Паразитарные *аналитические* следствия этой идеи в приложении к механике были сформулированы Колмогоровым в работе [276]. Что касается масштабной инвариантности, то ее аналитические аспекты связываются в физике с понятием ренорм-групп (см. главу 36).

И все же впервые *геометрические* аспекты нестандартной масштабной инвариантности в *Природе* были должным образом освещены лишь в первом издании настоящего эссе в 1975 г.

## «СИММЕТРИИ» ЗА ПРЕДЕЛАМИ МАСШТАБНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Покончив с прямыми, евклидова геометрия берется за фигуры, обладающие более богатыми в смысле инвариантности свойствами, обычно называемыми «симметриями». Мы с вами также не преминем отправиться на довольно продолжительную экскурсию в царство неинвариантных фракталов (в главах 15–20).

Самоотображающиеся, но масштабно-неинвариантные фракталы тесно связаны с некоторыми из наиболее тонких и сложных мест «строго классического» математического анализа. Опровергая распространенное мнение о сухости анализа, эти фракталы удивительно прекрасны.

## СИНДРОМ РАСХОДИМОСТИ

Почти все подлежащие далее рассмотрению прецеденты демонстрируют проявления синдрома расходимости. Иными словами, некоторая величина — по всем предположениям, положительная и конечная — оказывается вдруг бесконечной либо вовсе обращается в нуль. На первый взгляд, такое недостойное поведение кажется в высшей степени странным и даже пугающим, однако тщательное исследование показывает, что оно вполне объяснимо, если . . . если, конечно, вы готовы начать мыслить по-новому.

Прецеденты, в которых симметрия сопровождается расходимостью, также давно известны специалистам по квантовой физике, в которой вообще большим почетом пользуются всевозможные аргументы, устраняющие расходимость. К счастью для нас, с фрактальными расходимостями справиться гораздо проще.



## 4 ◊ ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ

Обозначив в общих чертах все разнообразные задачи настоящего эссе, рассмотрим способы, с помощью которых эти задачи решаются. Здесь можно выделить несколько ярко выраженных граней.

### НЕЯСНОСТЬ ИЗЛОЖЕНИЯ — НЕ ДОБРОДЕТЕЛЬ

Для того, чтобы книга оказалась доступной для ученых и студентов, вовсе не обязательно являющихся специалистами во всех затрагиваемых здесь областях знания (многие из которых, надо признать, весьма эзотеричны), я стремился сделать изложение как можно более ясным.

*Однако ясность изложения не является главной целью этой книги.*

Кроме того, мне не хотелось отпугнуть тех людей, кому, возможно, не слишком важна математическая точность, но наверняка интересны мои основные выводы. Вам встретятся в книге и строгие математические обоснования моих слов (более здравые, между прочим, чем у многих физиков), однако общий стиль выдержан в неформальном (хотя и точном) ключе. Большая часть математических подробностей отнесена в главу 39 — там можно навести необходимые справки и вдохновиться на создание собственных трудов.

Поскольку для оригинального исследования такие вещи, как правило, не характерны, настоящее эссе можно считать до некоторой степени *популяризаторским*.

*Однако популяризация не является его главной целью.*

### ЭРУДИЦИЯ ПОЛЕЗНА ДЛЯ ДУШИ

На примере главы 2 можно видеть, что в книге имеется довольно большое количество ссылок на труды старых и малоизвестных авторов. Большая часть этих работ привлекла мое внимание уже значительно позже того, как я завершил свои собственные исследования в родственных областях, и они никак не повлияли ни на процесс, ни на выводы. Однако после всех тех долгих лет, на протяжении которых никто не разделял моих интересов, я был счастлив обнаружить в старых книгах схожие с моими соображения, пусть высказанные мельком и не возымевшие

видимых последствий. Так у меня возник и окреп интерес к «классике», хотя в обычных обстоятельствах он, как правило, не выдерживает испытания рутинной научной практикой.

Иными словами, мне было радостно сознавать, что среди необходимых мне как архитектору и строителю теории фракталов камней есть немало таких, которых касались руки других подобных мне строителей. Однако есть ли смысл вспоминать об этом сегодня? Современная традиция вполне удовлетворилась бы краткими постраничными сносками, а если мне вдруг взбредет в голову подробно распространяться о дальних предках и длинных родословных моих идей, не рискую ли я создать у читателя абсурдное ощущение того, что построенный мною архитектурный шедевр представляет собой лишь груды древних камней, облепленных новыми ярлыками?

Очевидно, моя страсть к древностям нуждается в каком-нибудь оправдании, но я не стану оправдываться. Скажу лишь, что, на мой взгляд, интерес к истории идей полезен для души ученого.

Однако всякий раз, когда мы взираем на труды великих людей с высоты тех знаний, которыми они не обладали, уместно будет поразмыслить над замечательным предисловием, которое написал Лебег к одной из книг Лузина. В ответ на то, что автор упомянутой книги приписывал Лебегу всевозможные глубокие мысли, французский математик заявил, что он, безусловно, мог бы — или даже должен был бы — подумать об этом, однако не подумал, а посему автором этих мыслей следует все же считать Лузина. Аналогичный феномен можно наблюдать в книге Уиттекера [591]: автор заявляет, что физическая теория относительности была создана не Эйнштейном, а Пуанкаре и Лоренцем, и приводит в подтверждение цитаты из их трудов; при этом известно, что и Пуанкаре, и Лоренц подчеркнуто отрицали свою к этому причастность.

Кроме того, на каждого ученого, когда-то в прошлом высказавшего мимоходом некую идею, из которой мы можем сегодня получить рабочую теорию, найдется, по меньшей мере, еще один ученый, его современник, который уверенно заявлял, что упомянутая идея совершенно абсурдна. Стоит ли ставить в заслугу Анри Пуанкаре те идеи, которые он в молодости не удосужился разработать, а в зрелом возрасте и во все отверг? Если верить Стенту [540], то незрелые идеи, высказанные слишком рано, не заслуживают ничего большего, нежели сострадательное забвение.

Хотя избыточная эрудиция в отношении истории идей сама по себе, как оказывается, довольно бесполезна, мне все же хотелось как-то зафиксировать эти отголоски прошлого, что я и сделал в биографических и исторических очерках в главах 40 и 41.

*Однако демонстрация эрудиции автора никоим образом не является главной целью этой книги.*

## «ВИЖУ — ЗНАЧИТ ВЕРЮ»

В своем письме к Дедекинду, написанном в самом начале кризиса математики 1875 – 1925 гг., Кантор, ошеломленный своими поразительными находками, восклицает, переходя при этом с немецкого на французский, что он не может поверить в то, что он видит («*Je le vois, mais je ne le crois pas!*»<sup>1</sup>) И математика, словно бы поняв намек с полуслова, принимается усердно избегать обманчивых и искусительных ликов чудовищ. Какой контраст между безудержной вычурностью до- и контрреволюционной геометрии и практически полным отсутствием какого бы то ни было визуального сопровождения в работах Вейерштрасса, Кантора и Пеано! Аналогичный оборот приняли дела и в физике — после того, как в 1800 г. вышла в свет «Небесная механика» Лапласа без единой иллюстрации. Как выразился П. А. М. Дирак в предисловии к изданной в 1930 г. «Квантовой механике», «фундаментальные законы природы управляют мирозданием не так непосредственно, как мы себе это воображаем; они воздействуют на некий субстрат, о котором мы не можем создать для себя никакого представления, не исказив всей картины привнесением в нее наших собственных неуместных добавлений».

Широкое и некритичное приятие таких взглядов принесло в конечном счете немало неприятностей. Теория фракталов, как никакая другая, требует обратного подхода: «Вижу — значит верю.» Поэтому, прежде чем вы продолжите чтение, еще раз рекомендую некоторое время поразглядывать иллюстрации, особенно те, что вошли в цветную «книгу в книге». Я строил свое эссе таким образом, чтобы его содержимое оказалось доступным (пусть и в различной степени) самому широкому кругу читателей; кроме того, в нем я пытаюсь убедить даже самых отъявленных пуристов от математики в том, что качественные иллюстрации не только помогают разобраться в уже известных понятиях, но и незаменимы при поиске новых концепций и создании новых теорий. Не так уж часто встретишь в современной научной литературе подобную веру в полезность графики.

*Однако демонстрация красивых картинок не является главной целью этой книги; иллюстрации — это чрезвычайно полезный инструмент, но и только.*

Следует также помнить о том, что любая попытка проиллюстрировать геометрию заведомо обречена на провал. Например, прямая обладает бесконечной длиной и гладкостью, а также бесконечно малой толщиной — в то время как любое изображение этой прямой имеет конечную длину, положительную толщину и неровные края. Тем не менее, многие считают, что созерцание грубого подобия прямой весьма полезно (некоторые даже полагают, что совершенно необходимо) для развития

<sup>1</sup>«Я это вижу, но я в это не верю!» (франц.). — Прим. перев.



интуиции и облегчает нахождение решений и доказательств. Заметим, что грубое изображение прямой представляет собой более адекватную геометрическую модель, скажем, нити, чем сама идеальная математическая прямая. Иными словами, для практического использования вполне достаточно, чтобы и геометрическая концепция, и ее изображение были заключены между некоторыми определенными значениями характеристических размеров — большим, но конечным (внешний порог), и меньшим, но положительным (внутренний порог).

Сегодня, благодаря возможности строить изображения с помощью компьютера, такие грубые изображения приобрели практическую полезность и в случае фракталов. Например, все самоподобные фрактальные кривые также имеют бесконечную длину и бесконечно малую толщину. В то же время каждая из них демонстрирует свое, строго специфичное отсутствие гладкости, что делает задачу построения изображения таких кривых более трудной, чем самые сложные задачи евклидовой геометрии. Таким образом, согласно вышеупомянутым принципам даже самое лучшее изображение оказывается истинным только в очень ограниченном диапазоне. Однако установление ограничения на очень маленькие или очень большие детали не только вполне приемлемо, а даже в высшей степени разумно, поскольку и внешние, и внутренние пороги так или иначе либо присутствуют, либо предполагаются в Природе. Следовательно, типичную фрактальную кривую можно вполне удовлетворительно изобразить с помощью большого, но ограниченного количества элементарных штрихов.

Чем больше число таких штрихов и чем точнее они наносятся, тем ближе изображение к идеальной кривой, так как точное соблюдение относительных размеров штрихов и их взаимного расположения в пространстве играет весьма существенную роль в определении фрактала. Руками так не нарисуете, а вот компьютер справляется просто превосходно. На содержание всех моих эссе в немалой степени повлияла возможность использования все более сложных компьютерных систем — равно как и возможность обратиться к услугам все более искусственных программистов, настоящих виртуозов своего дела, управлявших этими системами. Кроме того, мне посчастливилось получить доступ к аппарату, способному выдавать готовые к печати иллюстрации; некоторые результаты его работы вошли и в эту книгу.

Графическое представление — это чудесное средство для сопоставления моделей с реальностью. Когда данные случайной выборки согласуются с данными, полученными при помощи какого-либо аналитического метода, и при этом результаты моделирования не выглядят «реалистичными», винить следует именно аналитический метод. Формула может описать лишь малую долю взаимоотношений между моделью и реальностью, в то время как человеческий глаз обладает огромными способностями к интеграции и различению. Конечно, глаз иногда

принимает за истинные те отношения, которые впоследствии не подтверждаются статистическим анализом, но эта проблема возникает, как правило, в тех областях науки, где исследуемые объекты очень малы. Там же, куда направляемся мы с вами, объекты просто огромны.

Кроме того, графическое представление помогает обнаружить новые области применения для уже существующих моделей. Впервые я столкнулся с такой возможностью, разглядывая иллюстрацию, посвященную случайным блужданиям, в книге Феллера [147] — кривая на рисунке выглядела как контур рассеченной пополам горы, а те точки, где она пересекала временную ось, напомнили мне о некоторых данных из проводимого мною в то время исследования закономерностей возникновения ошибок на телефонных линиях. Посетившие меня в тот момент озарения привели в конце концов к теориям, представленным, соответственно, в главах 28 и 31. Мои собственные полученные с помощью компьютера иллюстрации аналогичным образом послужили источником вдохновения как для меня, так и для тех, кто по моей просьбе «применивал» мои идеи к другим научным дисциплинам (каковых дисциплин, кстати, оказалось больше, чем я себе представлял).

Возможности графики естественным образом расширяет кинематография — фрагменты, посвященные некоторым классическим фракталам, можно увидеть в [417].

## ОБЩЕПРИНЯТЫЕ ФОРМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО «ИСКУССТВА» И ЕГО НОВЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Картинки на форзацах книги и некоторые из разбросанных там и сям узоров представляют собой непреднамеренный результат ошибочного программирования. Я много раз слышал и даже читал, что мои иллюстрации — и те, что призваны подтвердить те или иные идеи, и те, что получились случайно, — называют не иначе как «Новой Формой Искусства».

Заявляю со всей решительностью — *в задачу настоящего эссе никоим образом не входит конкурировать с художниками*. Однако раз об этом говорят, следует прояснить ситуацию. Вопрос заключается не в том, насколько аккуратно выполнены графические изображения, не в том, нарисованы они от руки или отпечатаны на принтере, и даже не в том, кто, собственно, рисовал оригиналы — человек или компьютер (хотя с экономической точки зрения последний пункт как раз весьма важен). Просто мы и впрямь имеем дело с новой формой спорного, но освященного временем утверждения, что всякое графическое представление математических концепций является формой искусства, причем согласно канонам этой формы, чем проще изображение, тем лучше — этаким, выражаясь языком художников, «минимализм».

Распространено мнение, что минималисты обязаны обходиться ограниченным набором стандартных геометрических форм: прямых, окружностей, спиралей и так далее. Однако это не совсем так. Используемые в теоретических моделях фракталы также имеют весьма простую форму (вследствие того, что теоретическая наука поощряет простоту форм). И я вполне могу согласиться с тем, что многие из фракталов можно рассматривать как новую форму минималистского геометрического искусства.

Не напоминают ли вам некоторые его образцы творения М.К.Эшера? Если да, то в этом нет ничего удивительного, так как Эшер весьма разумно подошел к выбору источника вдохновения — этим источником стали гиперболические черепичные покрытия из книги Фрикке и Клейна [154], которые (см. главу 18) очень близки к формам, характерным для царства фракталов.

Фрактальное «новое геометрическое искусство» демонстрирует поразительное родство с картинами старых мастеров или творениями «изящной» архитектуры. Одна из очевидных причин заключается в том, что и фракталы, и произведения классических визуальных жанров искусства включают в себя многие масштабы длины и элементы самоподобия (см. [399]). Вполне возможно, что именно по этим причинам, а также потому, что фрактальное искусство возникло из попыток постичь законы Природы, имитируя ее, мы и принимаем его с такой готовностью — оно нам не чуждо. К абстрактной живописи у нас двойственное отношение: те, например, картины, которые мне нравятся, близки к фрактальному геометрическому искусству, остальные же больше тяготеют к стандартной геометрии, что лично мне не доставляет никакого эстетического удовольствия.

Здесь возникает парадоксальная ситуация: если верить Дайсону (см. главу 1), может показаться, что современные математика, музыка, живопись и архитектура каким-то образом связаны между собой. Однако реальных оснований для такого вывода нет, особенно в отношении архитектуры: например, какой-нибудь шедевр Миса ван дер Роэ являет собой откровенный возврат к немасштабируемой евклидовой геометрии, в то время как любое строение эпохи расцвета изящных искусств просто изобилует фрактальными элементами.

## СООБРАЖЕНИЯ УДОБСТВА

Главы расположены в порядке возрастания сложности обсуждаемых в них предметов; сделано это для облегчения восприятия основных концепций, вводимых постепенно, по мере возникновения необходимости. То, что такой подход вообще оказывается возможным, является немалым плюсом для теории фракталов. Текст изобилует повторениями, так что

читатель едва ли сможет потерять основную нить рассуждения, даже пропустив несколько абзацев, которые покажутся ему слишком скучными или слишком сложными (особенно те, что содержат формулы, выходящие за пределы элементарной математики). Большое количество важных сведений можно почерпнуть из пояснений к иллюстрациям.

Как уже упоминалось, иллюстрации помещены после тех глав, в которых впервые рассматриваются соответствующие феномены. Кроме того, автор довольно часто испытывает необходимость побеседовать частным порядком с той, скажем так, категорией читателей, которая может испытать крайний дискомфорт, если какое-либо место в книге останется нерассмотренным или необъясненным. Такие отступления вставлены прямо в основной текст и снабжены лично мною изобретенными скобками  $\triangleleft$  и  $\blacktriangleright$  — для того, чтобы остальные могли их легко заметить и пропустить. Есть и другие отступления, посвященные не настолько существенным замечаниям, чтобы развивать их здесь в полном объеме. В целом же в этом эссе гораздо меньше отступлений, чем во «Фракталах» 1977 г.

Кроме того, теперь, как мне кажется, можно с одного взгляда на текст определить, идет речь о теоретической размерности  $D$  или же об экспериментальной. Значение последней, как правило, известно лишь с точностью до одного или двух десятичных знаков и записывается поэтому как 1, 2 или 1, 37. Значение теоретической размерности записывается в виде целых чисел, отношений целых чисел, отношений логарифмов целых чисел или в десятичной форме, по меньшей мере, с *четырьмя* знаками после запятой.

## И СНОВА ГЛАВНАЯ ТЕМА

Отрекшись от всевозможных побочных для настоящего эссе целей, хочу напомнить, о чем я говорил в первой главе. Эта книга представляет собой одновременно и *манифест*, и *собрание прецедентов*; за редкими исключениями она составлена из тех теоретических предположений, которые я в свое время высказывал и которые часто приводили к извлечению из праха всевозможных древних идей и их пересмотру с современной точки зрения.

Ни одна из этих теорий не остановилась в своем развитии, а некоторые все еще не вышли из зародышевой стадии. Для одних теорий эта книга — первый выход в свет, другие уже описаны в моих более ранних работах. Кроме моих собственных теорий, в книге упоминаются всевозможные сторонние разработки, инспирированные моими предыдущими исследованиями и давшие мне стимул продолжать работу. Я, однако, далек от мысли попытаться составить полный список областей человеческой деятельности, в которых оказались полезными фракталы — мне

не хочется разрушать стиль этого эссе в его теперешнем виде и терять дух манифеста.

И последнее напоминание: в мою задачу не входило проводить подробное исследование каждого прецедента (безусловно, желательное для специалистов). Однако многие темы упоминаются неоднократно. Да, вот еще что: не забывайте о предметном указателе.



## II ◊ ТРИ КЛАССИЧЕСКИХ ФРАКТАЛА — СОВЕРШЕННО РУЧНЫЕ

---

### 5 ◊ КАКОВА ПРОТЯЖЕННОСТЬ ПОБЕРЕЖЬЯ БРИТАНИИ?

Прежде чем познакомиться с первым видом фракталов — а именно, с кривыми, фрактальная размерность которых превышает 1, — рассмотрим типичный участок какого-нибудь берега. Очевидно, что его длина не может быть меньше расстояния по прямой между его начальной и конечной точками. Однако, как правило, береговые линии имеют неправильную форму — они извилисты и изломаны, и их длины, вне всякого сомнения, значительно превышают расстояния между их крайними точками, измеренные по прямой.

Известно много способов оценить длину береговой линии более точно, и в этой главе мы проанализируем некоторые из них. В конце концов мы приходим к очень примечательному выводу: длина береговой линии — понятие весьма скользкое, и голыми руками его не ухватишь. Какой бы метод измерения мы ни применяли, результат всегда одинаков: длина типичного побережья очень велика и настолько нечетко определена, что удобнее всего считать ее бесконечной. Следовательно, если кому-нибудь вздумается сравнить различные берега с точки зрения их протяженности, ему придется подыскать что-нибудь взамен понятия длины, которое к данному случаю неприменимо.

В этой главе мы как раз и займемся поисками подходящей замены, причем в процессе поисков нам не избежать знакомства с различными формами фрактальных концепций размерности, меры и кривой.

### АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

**Метод А.** Установим раствор измерительного циркуля на некоторую заданную длину  $\varepsilon$ , которую назовем длиной шага, и пройдемся

этим циркулем вдоль интересующей нас береговой линии, начиная каждый новый шаг в той точке, где закончился предыдущий. Количество шагов, умноженное на длину  $\varepsilon$ , даст нам приблизительную длину берега  $L(\varepsilon)$ . Со школьной скамьи нам известно, что если повторять эту операцию, каждый раз уменьшая раствор циркуля, то можно ожидать, что величина  $L(\varepsilon)$  быстро устремится к некоторому вполне определенному значению, называемому *истинной длиной*. Однако то, что происходит на деле, никак не соответствует нашим ожиданиям. В типичном случае наблюдаемая длина  $L(\varepsilon)$  склонна увеличиваться неограниченно.

Причина такого ее поведения очевидна: если рассмотреть какой-нибудь полуостров или бухту на картах масштаба  $1/100\,000$  и  $1/10\,000$ , то на последней карте мы ясно различим более мелкие полуострова и бухты, которых не было видно на первой. Карта того же участка, выполненная в масштабе  $1/1\,000$ , покажет нам еще более мелкие полуостровки и бухточки, и так далее. Каждая новая деталь увеличивает общую длину берега.

Вышеописанная процедура подразумевает, что линия берега имеет слишком неправильную форму, и поэтому ее длина не может быть непосредственно представлена в виде суммы длин простых геометрических кривых, значения длин которых можно найти в справочниках. То есть, Метод А заменяет береговую линию на последовательность ломаных линий, составленных из прямолинейных участков, длину которых мы определять умеем.

**Метод В.** Такого же «сглаживания» можно добиться и другими способами. Вообразите себе человека, проходящего вдоль берега по кратчайшему пути, траектория которого нигде не отходит от воды далее чем на заданное расстояние  $\varepsilon$ . Дойдя до конечной точки, он возвращается назад, несколько уменьшив при этом величину  $\varepsilon$ . Затем еще и еще, пока, наконец, величина  $\varepsilon$  не достигнет, скажем, 50 см. Уменьшать ее далее не представляется возможным, так как человек слишком велик и неуклюж, чтобы суметь проследить более детализированную траекторию. Мне могут возразить, что эти недостижимые мелкие детали, во-первых, не представляют для человека никакого непосредственного интереса, а во-вторых, подвержены столь значительным изменениям в зависимости от времени года и высоты прилива, что их подробная регистрация вообще теряет всякий смысл. Первое из возражений мы рассмотрим позднее в этой главе. Что касается второго возражения, то его можно нейтрализовать, ограничившись рассмотрением скалистого берега при низком приливе и спокойной воде. В принципе, человек может проследить и более детализированные приближенные кривые, призвав себе на помощь мышь, затем муравья и так далее. И снова, по мере того, как наш ходок следует все более близкой к воде тропой, расстояние, которое ему предстоит пройти, неограниченно возрастает.

**Метод С.** Метод В подразумевает определенную асимметричность между водой и берегом. Для того, чтобы избежать этой асимметричности, Кантор предложил рассматривать береговую линию словно бы через расфокусированный объектив, вследствие чего каждая точка превращается в круглое пятно радиуса  $\varepsilon$ . Другими словами, Кантор рассматривает все точки — как на суше, так и на воде, — расстояние от которых до собственно береговой линии не превышает  $\varepsilon$ . Эти точки образуют некое подобие сосиски или ленты шириной  $2\varepsilon$  (пример такой «сосиски» — правда, в ином контексте — приведен на рис. 56). Измерим площадь полученной ленты и разделим ее на  $2\varepsilon$ . Если бы береговая линия была прямой, то лента представляла бы собой прямоугольник, а найденная вышеописанным образом величина оказалась бы действительной длиной берега. Имея дело с реальными береговыми линиями, мы получаем приблизительную оценку длины  $L(\varepsilon)$ , которая неограниченно возрастает при уменьшении  $\varepsilon$ .

**Метод D.** Вообразите себе карту, выполненную в манере художников-пуантилистов, т.е. такую, где материки и океаны изображены цветными круглыми пятнами радиуса  $\varepsilon$ . Вместо того, чтобы считать центрами пятен точки, принадлежащие береговой линии, как в Методе С, потребуем, чтобы количество пятен, полностью скрывающих линию, было наименьшим. В результате у мысов пятна будут по большей части лежать на суше, а у бухт — в море. Оценкой длины береговой линии здесь будет результат деления закрытой пятнами площади на  $2\varepsilon$ . «Поведение» этой оценки также оставляет желать лучшего.

## ПРОИЗВОЛЬНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Резюмируя предыдущий раздел, заметим, что результат применения любого из четырех методов всегда один и тот же. По мере уменьшения  $\varepsilon$  приблизительная длина кривой устремляется в бесконечность.

Для того, чтобы в должной мере уяснить значение этого факта, произведем аналогичное измерение длины какой-либо обыкновенной евклидовой кривой. Например, на отрезке прямой приблизительные оценочные данные измерения в основном совпадают и определяют искомую длину. В случае окружности приблизительное значение длины возрастает, но довольно быстро устремляется к некоторому конкретному пределу. Кривые, длину которых можно определить таким образом, называются *спрямляемыми*.

Еще более поучительно попробовать измерить длину какой-нибудь из береговых линий, одомашненных человеком, — скажем, побережья вблизи Челси в его сегодняшнем виде. Поскольку очень большие складки местности человек пока оставляет без изменений, установим на нашем циркуле очень большой раствор  $\varepsilon$  и будем его постепенно умень-



шать. Как и следовало ожидать, длина береговой линии при этом будет расти.

Однако здесь имеется одна интересная особенность: при дальнейшем уменьшении  $\varepsilon$  мы неизбежно попадаем в некую промежуточную зону, где длина  $L(\varepsilon)$  почти не изменяется. Эта зона простирается приблизительно от 20 м до 20 см (*очень* приблизительно). Когда  $\varepsilon$  становится меньше 20 см, длина  $L(\varepsilon)$  снова начинает возрастать — теперь на результат измерения влияют уже отдельные камни. Таким образом, если построить график изменения величины  $L(\varepsilon)$  как функции от  $\varepsilon$ , то на ней, вне всякого сомнения, обнаружится плоский участок при значениях  $\varepsilon$  в интервале от 20 м до 20 см — на аналогичных графиках для естественных «диких» побережий подобных плоских участков не наблюдается.

Очевидно, что измерения, произведенные в этой плоской зоне, обладают огромной практической ценностью. Поскольку границы между различными научными дисциплинами являются, в основном, результатом договоренности между учеными о разделении труда, мы можем, например, передать все феномены, масштабы которых превышают 20 м, т. е. те, до которых человек еще не дотянулся, в ведомство географии. Такое ограничение даст нам вполне определенную географическую длину. Береговая охрана может с успехом использовать то же значение  $\varepsilon$  для работы с «дикими» берегами, а энциклопедии и альманахи сообщат всем желающим соответствующую длину  $L(\varepsilon)$ .

С другой стороны, мне трудно представить, что все заинтересованные правительственные учреждения пусть даже какой-либо одной страны договорятся между собой об использовании единого значения  $\varepsilon$ , а уж принятие его всеми странами мира совершенно невозможно вообразить. Ричардсон [494] приводит такой пример: в испанских и португальских энциклопедиях приводится различная длина сухопутной границы между этими странами, причем разница составляет 20% (так же обстоит дело с границей между Бельгией и Нидерландами). Это несоответствие, должно быть, частично объясняется различным выбором  $\varepsilon$ . Эмпирические данные, которые мы вскоре обсудим, показывают, что для возникновения такой разницы достаточно, чтобы одно значение  $\varepsilon$  отличалось от другого всего лишь в два раза; кроме того, нет ничего удивительного в том, что маленькая страна (Португалия) измеряет длину своих границ более тщательно, чем ее большой сосед.

Второй и более значительный довод против выбора произвольного  $\varepsilon$  носит философский и общенаучный характер. Природа существует независимо от человека, и всякий, кто приписывает слишком большую важность какому-либо конкретному значению  $\varepsilon$  или  $L(\varepsilon)$ , предполагает, что определяющим звеном в процессе постижения Природы является человек со своими общепринятыми мерками или весьма переменчивыми техническими средствами. Если береговым линиям суждено когда-

нибудь стать объектами научного исследования, вряд ли нам удастся законодательным порядком запретить неопределенность, наблюдаемую в отношении их длин. Как бы то ни было, концепция географической длины вовсе не столь безобидна, как представляется на первый взгляд. Она не является до конца «объективной», так как при определении длины таким образом неизбежно влияние наблюдателя.

## ПРИЗНАНИЕ И ЗНАЧЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Несомненно, многие придерживаются мнения, что береговые линии представляют собой неспрямляемые кривые, и я, если уж на то пошло, не могу припомнить, чтобы кто-нибудь считал иначе. Однако мои поиски письменных свидетельств в пользу этого мнения потерпели почти полный провал. Помимо цитат из Перрена, приведенных во второй главе, имеется еще вот такое наблюдение в статье Штейнгауза [539]: «Измеряя длину левого берега Вислы с возрастающей точностью, можно получить значения в десятки, сотни и даже тысячи раз большие, чем то, что дает школьная карта. . . Весьма близким к реальности представляется следующее заявление: большинство встречающихся в природе дуг не являются спрямляемыми. Это заявление противоречит распространенному мнению, сводящемуся к тому, что неспрямляемые дуги — математическая фикция, а в природе все дуги спрямляемы. Из этих двух противоречивых заявлений верным, по всей видимости, следует считать все же первое». Однако ни Перрен, ни Штейнгауз так и не удосужились разработать свои догадки подробнее и довести их до логического конца.

К. Фадиман рассказывает одну занятную историю. Его друг Эдвард Каснер несколько раз проводил такой эксперимент: он «спрашивал у маленьких детей, какова, по их мнению, общая длина побережья Соединенных Штатов. После того, как кто-то из детей высказывал достаточно «разумное» предположение, . . . Каснер. . . предлагал им подумать о том, насколько можно увеличить эту цифру, если очень тщательно измерить периметр всех мысов и бухт, затем так же тщательно проследить меньшие мыски и бухточки в каждом из этих мысов и в каждой из этих бухт, затем измерить каждый камешек и каждую песчинку из тех, что образуют береговую линию, каждую молекулу, каждый атом и т. д. Получалось, что берег может быть каким угодно длинным. Дети понимали это сразу, а вот со взрослыми у Каснера возникали проблемы.» История, конечно, очень мила, однако вряд ли она имеет отношение к моим поискам. Каснер явно *не* ставил перед собой цель выделить некий аспект реальности, достойный дальнейшего изучения.

Таким образом, можно сказать, что статья [356] и книга, которую вы держите в руках, представляют собой по существу первые работы, посвященные этой теме.

В своей книге «Воля верить»<sup>1</sup> Уильям Джеймс пишет: «То, что не укладывается в рамки классификаций. . . всегда являет собой тучную ниву для великих открытий. В любой науке вокруг общепризнанных и упорядоченных фактов вечно кружит пыльное облако исключений из правил — явлений малозаметных, непостоянных, редко встречающихся, явлений, которые проще игнорировать, нежели рассматривать. Всякая наука стремится к идеальной состоянию замкнутой и строгой системы истин. . . Феномены, не подлежащие классификации в рамках системы, считаются парадоксальными нелепостями и заведомо не истинны. Ими пренебрегают и их отвергают, исходя из лучших побуждений научной совести. . . Тот, кто всерьез займется иррегулярными феноменами, окажется способен создать новую науку на фундаменте старой. По завершении же этого процесса правилами обновленной науки по большей части станут вчерашние исключения».

Настоящее эссе, скромной целью которого является полное обновление геометрии Природы, описывает феномены, настолько не вписывающиеся в классификацию, что говорить о них можно лишь с позволения цензуры. С первым из таких феноменов вы встретитесь уже в следующем разделе.

## ЭФФЕКТ РИЧАРДСОНА

Эмпирическое исследование изменения приблизительной длины  $L(\epsilon)$ , получаемой с помощью Метода А, описано в статье Ричардсона [494], ссылка на которую по счастливой (или роковой) случайности попала мне на глаза. Я обратил на нее внимание только потому, что я был насыщан о Льюисе Фрае Ричардсоне как о выдающемся ученом, оригинальность мышления которого была сродни эксцентричности (см. главу 40). Как мы увидим в главе 10, человечество обязано ему некоторыми наиболее глубокими и долговечными идеями относительно природы турбулентности — особого внимания среди них заслуживает та, согласно которой турбулентность предполагает возникновение самоподобного каскада. Он также занимался и другими сложными проблемами — такими, например, как природа вооруженного конфликта между государствами. Его опыты являли собой образец классической простоты, однако он, если возникала такая необходимость, не колеблясь пользовался и более утонченными концепциями.

Приведенные на рис. 57 графики, обнаруженные уже после смерти Ричардсона среди его бумаг, были опубликованы в чуть ли не секретном (и совершенно не подходящем для таких публикаций) «Ежегоднике по общим системам». Рассмотрев эти графики, мы приходим к заключению, что существуют две постоянные (назовем их  $\lambda$  и  $D$ ) — такие, что для

<sup>1</sup>William James. *The Will to Believe*. — Прим. перев.

определения длины береговой линии посредством построения приближенной к ней ломаной необходимо взять примерно  $F\varepsilon^{-D}$  интервалов длины  $\varepsilon$  и записать следующую формулу:

$$L(\varepsilon) \sim F\varepsilon^{1-D}.$$

Значение показателя  $D$  зависит, по всей видимости, от характера измеряемой береговой линии, причем различные участки этой линии, рассматриваемые по отдельности, могут дать различные  $D$ . Для Ричардсона величина  $D$  была просто удобным показателем, не имеющим какого-либо особенного смысла. Однако похоже, что значение этого показателя не зависит от выбранного метода оценки длины береговой линии. А значит, он заслуживает самого пристального внимания.

## ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ [356]

Изучив работу Ричардсона, я предположил [356], что хотя показатель  $D$  не является целым числом, его можно и нужно понимать как размерность — точнее, как фрактальную размерность. Разумеется, я вполне осознавал, что все вышеперечисленные методы измерения  $L(\varepsilon)$  базируются на нестандартных обобщенных определениях размерности, уже применяемых в чистой математике. Определение длины, основанное на покрытии береговой линии наименьшим числом пятен радиуса  $\varepsilon$ , используется в [481] для определения размерности покрытия. Определение длины, основанное на покрытии береговой линии лентой шириной  $2\varepsilon$ , воплощает идею Кантора и Минковского (см. рис. 56), а соответствующей размерностью мы обязаны Булигану. Однако эти два примера лишь намекают на существование многих размерностей (большинство из которых известны лишь немногим специалистам), которые блистают в различных узкоспециализированных областях математики. Некоторые из этих размерностей мы обсудим более подробно в главе 39.

Зачем математикам понадобилось вводить это изобилие различных размерностей? Затем, что в определенных случаях они принимают различные значения. К счастью, с такими случаями вы в этом эссе не встретитесь, поэтому список возможных альтернативных размерностей можно с чистой совестью сократить до двух, о которых я, правда, еще не упоминал. Старейшая и подробнее исследованная размерность из нашего списка восходит еще к Хаусдорфу и служит для определения фрактальной размерности — очень скоро мы ею займемся. Вторая, более простая, размерность называется размерностью подобия: она носит не такой общий характер, как первая размерность, однако оказывается более чем адекватной во многих случаях — ее мы рассмотрим в следующей главе.

Разумеется, я не собираюсь приводить здесь математическое доказательство того, что показатель Ричардсона  $D$  является размерностью. Честно говоря, я не представляю, как можно провести такое доказательство в рамках какой бы то ни было естественной науки. Я хочу лишь обратить внимание читателя на тот факт, что понятие длины ставит перед нами концептуальную задачу, а показатель  $D$  предоставляет удобное и изящное решение. Теперь, когда фрактальная размерность заняла свое место в изучении береговых линий, вряд мы захотим, из каких бы то ни было особенных соображений, возвращаться к тем временам, когда мы бездумно и наивно полагали  $D = 1$ . Тому, кто все еще считает  $D = 1$ , придется теперь постараться, если он пожелает доказать свою правоту.

Следующий шаг — объяснение формы береговых линий и выведение значения  $D$  из других, более фундаментальных соображений — я предлагаю отложить до главы 28. На этом этапе достаточно сказать, что в первом приближении  $D = 3/2$ . Это значение слишком велико, чтобы верно описывать факты, однако его более чем достаточно для того, чтобы мы могли заявить: можно, должно и естественно полагать, что размерность береговой линии превосходит обычное евклидово значение для кривой  $D = 1$ .

## ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА

Если согласиться с тем, что различные естественные береговые линии обладают бесконечной длиной, а также с тем, что значение длины, основанное на антропометрической величине  $\varepsilon$ , дает лишь частичное представление о реальном положении дел, то каким образом можно сравнить между собой разные берега? Так как бесконечность ничем не отличается от бесконечности, умноженной на четыре, много ли нам будет проку от утверждения, что длина любого берега в четыре раза больше, чем длина любой из его четвертей? Необходим лучший способ для выражения вполне разумной идеи о том, что кривая должна обладать некоторой «мерой», причем эта мера для всей кривой должна быть в четыре раза больше, чем та же мера для любой из ее четвертей.

В высшей степени остроумный метод для достижения этой цели предложил Феликс Хаусдорф. В основе его метода лежит тот факт, что линейная мера многоугольника вычисляется сложением длин его сторон без каких бы то ни было их преобразований. Можно предположить, что эти длины сторон возводятся в степень  $D = 1$ , равную евклидовой размерности прямой (причина такого предположения вскоре станет очевидной). Аналогичным образом вычисляется мера поверхности внутренней области замкнутого многоугольника — посредством покрытия ее квадратами, нахождения суммы длин сторон этих квадратов и возведения ее в степень  $D = 2$  (евклидова размерность плоскости). Если же использовать при вычислениях «неверную» степень, то результат этих

вычислений не даст нам никакой полезной информации: площадь любого замкнутого многоугольника окажется равной нулю, а длина его внутренней области будет бесконечной.

Рассмотрим с таких позиций полигональную (кусочно-линейную) аппроксимацию береговой линии, составленной из малых интервалов длины  $\varepsilon$ . Возведя длину интервала в степень  $D$  и умножив ее на число интервалов, мы получим некую величину, которую можно предварительно назвать «аппроксимативной протяженностью в размерности  $D$ ». Так как, согласно Ричардсону, число сторон равно  $N = F\varepsilon^{-D}$ , то наша аппроксимативная протяженность принимает значение  $F\varepsilon^D\varepsilon^{-D} = F$ .

Таким образом, теоретически *аппроксимативная протяженность в размерности  $D$  не зависит от  $\varepsilon$* . На практике же можно наблюдать лишь незначительное изменение этой аппроксимативной протяженности при изменении  $\varepsilon$ .

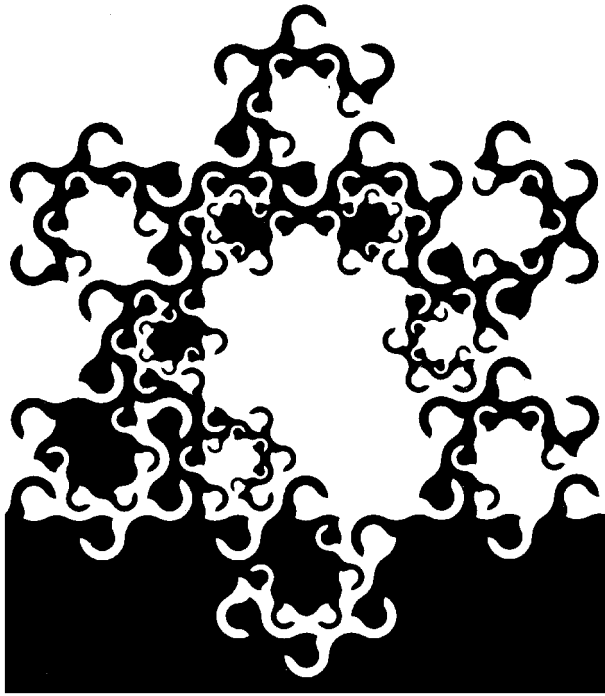
Кроме того, получает простое подтверждение и обобщение тот факт, что длина внутренней области квадрата бесконечна: аппроксимативная протяженность береговой линии, определенная при любой размерности  $d < D$ , стремится к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Так же обстоит дело и с равенством нулю площади и объема прямой. При любом  $d > D$  соответствующая аппроксимативная протяженность береговой линии стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . То есть аппроксимативная протяженность береговой линии демонстрирует благоразумное поведение тогда и только тогда, когда  $d = D$ .

## ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ КРИВОЙ МОЖЕТ БЫТЬ БОЛЬШЕ ЕДИНИЦЫ; ФРАКТАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

Согласно замыслу своего создателя, хаусдорфова размерность сохраняет за собой обязанности обычной размерности и служит показателем степени при определении *меры*.

Однако с другой стороны, размерность  $D$  в высшей степени необычна, — она выражается дробным числом! Мало того, она больше единицы, которая представляет собой «естественную» размерность для кривых (можно строго доказать, что единице равна и их топологическая размерность  $D_T$ ).

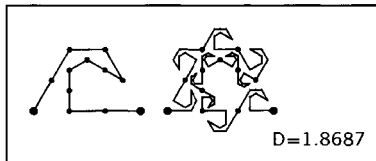
Я предлагаю называть кривые, фрактальная размерность которых превосходит их топологическую размерность 1, *фрактальными кривыми*. А в качестве краткого резюме для настоящей главы могу предложить следующее утверждение: в географических масштабах береговые линии можно моделировать с помощью фрактальных кривых. Береговые линии *по своей структуре фрактальны*. ■



**Рис. 55. ОБЕЗЬЯНЬЕ ДЕРЕВО**

На данном этапе этот небольшой рисунок следует рассматривать просто как декоративный элемент, он всего лишь заполняет пустое место.

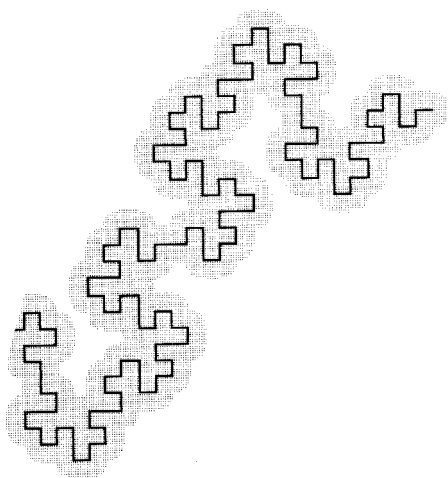
Однако после прочтения главы 14 читатель сможет обнаружить здесь подсказку для распутывания «архитектурной» загадки на рис. 210. Более серьезную подсказку дает нижеприведенный генератор:





**Рис. 56. ПРИМЕР  
«СОСИСКИ» МИНКОВСКОГО**

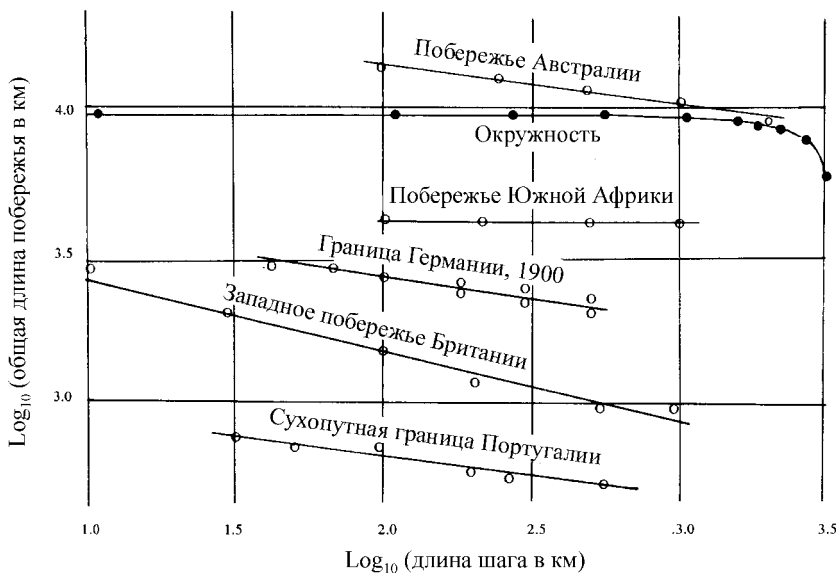
Если у математика возникает необходимость «приручить» какую-нибудь особенно нерегулярную кривую, он может воспользоваться следующей стандартной процедурой: выбирается некоторое значение  $\varepsilon$ , и вокруг каждой точки кривой строится круг радиуса  $\varepsilon$ . Эта процедура, восходящая, по меньшей мере, к Герману Минковскому, а то и к самому Георгу Кантору, несколько грубовата, но зато весьма эффективна. (Что касается термина *сосиска*, то его происхождение, согласно непроверенным слухам, как-то связано с применением Норбертом Винером данной процедуры к броуновским кривым.)



На помещенных здесь иллюстрациях вышеописанное сглаживание применяется не к реальным берегам, а к одной теоретической кривой, которую мы построим несколько позже (см. рис. 79) путем постоянного



добавления все более мелких деталей. Сравнивая изображенный справа кусок сосиски с правым концом сосиски, помещенной вверх, мы видим, что критический этап в построении кривой наступает, когда кривая начинает включать в себя детали меньшего, чем  $\varepsilon$ , размера. На более поздних этапах сосиска существенно не изменяется. ■



**Рис. 57. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ РИЧАРДСОНА ОТНОСИТЕЛЬНО СКОРОСТИ РОСТА ДЛИН БЕРЕГОВЫХ ЛИНИЙ**

На этом рисунке приведены экспериментальные результаты изменения длины кривой, произведенные на различных кривых с использованием равносторонних многоугольников с уменьшающейся длиной стороны  $\varepsilon$ . Как и ожидалось, в случае окружности измерения с возрастающей точностью дают величину, которая очень быстро стабилизируется около вполне определенного значения.

В случае береговых линий приближенные значения длины, напротив, не стабилизируются вовсе. По мере того, как длина шага  $\varepsilon$  стремится к нулю, аппроксимативные значения длины, отложенные в дважды логарифмической системе координат, образуют прямую с отрицательным наклоном. Так же обстоит дело и с сухопутными границами между

странами. Наведенные Ричардсоном в различных энциклопедиях справки вскрыли значительные различия в определении длины общей границы картографами соответствующих стран: например, длина границы между Испанией и Португалией составляет 987 км с точки зрения испанцев и 1214 км с точки зрения португальцев; аналогичным образом пострадала и граница между Нидерландами и Бельгией (380 и 449 км). Так как угловой коэффициент соответствующих прямых равен  $-0,25$ , двадцатипроцентная разница между результатами измерений означает двукратную разницу между принятыми для этих измерений значениями  $\varepsilon$  — не такое уж невероятное предположение.

Ричардсон не дал никакой теоретической интерпретации различному наклону своих прямых. Мы же с вами намерены интерпретировать береговые линии как приближения к фрактальным кривым и рассматривать угловые коэффициенты соответствующих им прямых как приближенные значения разности  $1 - D$ , где  $D$  — фрактальная размерность. ■

## 6 ◊ СНЕЖИНКИ И ДРУГИЕ КРИВЫЕ КОХА

Для более полного понимания моей интерпретации ричардсонова  $D$  как фрактальной размерности перейдем от природных феноменов, над которыми мы не имеем никакой власти, к полностью подвластным нашей воле геометрическим конструкциям.

### САМОПОДОБИЕ И КАСКАДЫ

До сих пор мы больше уделяли внимание геометрической сложности береговых линий; настало время упомянуть и о том, что их структура в значительной степени упорядочена.

Хотя выполненные в разных масштабах карты и различаются в конкретных деталях, более общие их особенности остаются неизменными. В грубом приближении крупные детали береговых линий геометрически идентичны мелким, разница только в масштабе.

Такую форму можно сравнить с узором, который рисует на небе какой-нибудь многоступенчатый фейерверк: на каждом этапе его сгорания в общую картину добавляются новые, все более мелкие детали, идентичные по форме результату исходного взрыва. Однако из упомянутых выше трудов Льюиса Ричардсона, посвященных турбулентности, мы можем позаимствовать более подходящее сравнение и назвать порождающий такие структуры механизм *каскадом*.

Если каждая из частей некоторой формы геометрически подобна целому, то и форма, и порождающий ее каскад называются *самоподобными*. В настоящей главе мы займемся исследованием самоподобия, используя для этого самые что ни на есть правильные фигуры.

Наиболее полную противоположность самоподобным формам представляют собой кривые, которые имеют либо только один масштаб (например, окружность), либо два четко разделенных масштаба (например, окружность, украшенная «гребнем» из множества меньших полуокружностей). Такие формы мы можем охарактеризовать как *немасштабируемые*.

## ТЕРАГОНЫ КАК МОДЕЛИ БЕРЕГОВЫХ ЛИНИЙ. ТРОИЧНАЯ КРИВАЯ КОХА $\mathcal{K}$

Если мы хотим получить кривую, содержащую бесконечное число масштабов длины, то надежнее всего будет ввести их туда собственно-ручно, один за другим. Правильный треугольник с длиной стороны, равной 1, имеет один масштаб, правильные треугольники с длиной стороны, равной  $1/3$ , также имеют один масштаб, только меньший — уменьшая длину стороны далее по правилу  $(1/3)^k$ , мы будем получать треугольники все меньшего масштаба. Нагромоздив затем все эти треугольники друг на друга (как показано на рис. 70), получим форму, содержащую все масштабы, меньшие 1.

В сущности, мы предполагаем, что некоторый участок береговой линии, изображенный в масштабе  $1/1\,000\,000$ , выглядит как прямой отрезок единичной длины; назовем такой участок *инициатором*. Затем мы предполагаем, что на карте масштаба  $3/1\,000\,000$  становится видимой некая деталь, а именно, — выступ в форме равностороннего треугольника, занимающий среднюю треть исходного отрезка. Полученное таким образом второе приближение — ломаную, составленную из четырех отрезков равной длины — назовем *генератором*. Предположим далее, что еще более подробная карта (масштаба  $9/1\,000\,000$ ) выглядит как результат замены каждого из четырех отрезков генератора уменьшенной в три раза копией этого самого генератора, т. е. из каждого выступа вырастает по два новых выступа той же формы, но меньшего размера.

Продолжая в том же духе, мы заменяем все прямолинейные отрезки ломаными линиями, и первоначально прямой инициатор постепенно превращается во все более длинную ломаную кривую. Поскольку мы будем иметь дело с такими кривыми на всем протяжении этого эссе, предлагаю ввести для их обозначения новый термин *терагоны* (от греч. *τερας* — «чудовище, странное создание» и *γωνια* — «угол»). Кстати, префикс *тера* обозначает (очень уместно, надо сказать) в метрической системе умножение на  $10^{12}$ .

Если продолжить вышеописанный каскадный процесс до бесконечности, то наши терагоны устремятся к пределу, рассмотренному впервые фон Кохом [574] (см. рис. 74). Назовем такую кривую троичной кривой Коха и обозначим символом  $\mathcal{K}$ .

На рис. 71 хорошо видно, что площадь этой кривой обращается в нуль. С другой стороны, с каждой ступенью построения ее общая длина увеличивается в  $4/3$  раза, следовательно, в пределе длина кривой Коха бесконечна. Более того, кривая Коха непрерывна, но нигде не имеет касательной — точно график непрерывной функции, не имеющей производной.

В качестве модели береговой линии кривая  $\mathcal{K}$  представляет собой лишь очень отдаленное приближение, но не потому, что она слишком

неправильна — скорее потому, что по сравнению с неправильностью типичной береговой линии неправильность кривой Коха уж очень предсказуема. В главах 24 и 28 мы попробуем добиться лучшего соответствия с помощью некоторой рандомизации процесса построения.

## КРИВАЯ КОХА В РОЛИ ЧУДОВИЩА

У человека, прочитавшего предыдущий раздел, может сложиться впечатление, что кривая Коха относится к числу наиболее очевидных и интуитивно понятных геометрических фигур. Однако вовсе не так очевидны причины, толкнувшие фон Коха на ее построение. И уж совершенно загадочным представляется отношение к ней со стороны математиков. Чуть ли не единодушно они провозгласили кривую  $\mathcal{K}$  чудовищной! За подробностями обратимся к работе Хана «Кризис здравого смысла» [190], которая, кстати, еще неоднократно нам пригодится. Хан пишет: «Характер [неспрямляемой кривой или кривой, к которой невозможно провести касательную] совершенно не укладывается в рамки того, что мы можем понять интуитивно. В самом деле, всего лишь после нескольких повторений простой операции сегментирования образующаяся фигура становится настолько сложной, что с трудом поддается непосредственному восприятию, а уж то, к чему эта кривая стремится в пределе, и вовсе невозможно себе представить. Только с помощью разума, применяя логический анализ, мы можем до конца проследить эволюцию этого странного объекта. Если бы мы положились в данном случае на здравый смысл, то составленное нами представление оказалось бы в корне ошибочным, поскольку здравый смысл неизбежно привел бы нас к заключению, что кривых, не имеющих касательной ни в одной своей точке, попросту не бывает. Этот первый пример неадекватности интуитивного подхода затрагивает самые фундаментальные концепции дифференцирования».

Надо отдать Хану должное — в своих высказываниях он не доходит до знаменитого восклицания Шарля Эрмита относительно недифференцируемых функций. В письме к Стильесу, датированном 20 мая 1893 года, Эрмит пишет об ужасе и отвращении, которые вызывает у него «это наказание Господне, эти жалкие функции без производных» ([211], II, с. 318). Конечно же, каждому из нас хочется верить в то, что великие лишены недостатков и что Эрмит просто шутил, однако из написанной в 1922 году «Заметки» Лебега ([295], I), можно заключить, что это не совсем так. Написав статью о поверхностях, к которым нельзя построить касательные плоскости (об «абсолютно измятых носовых платках»), Лебег представил ее Академии наук для публикации, однако «Эрмит сначала воспротивился включению статьи в «Comptes Rendus»<sup>1</sup>; примерно к этому времени относится его письмо Стильесу. . . »

<sup>1</sup>«Отчеты» Французской Академии наук. — Прим. перев.

Мы с вами уже знаем, что Перрен и Штейнгауз страха перед чудовищами не испытывали, однако единственным математиком, который возражал против общего мнения, основываясь именно на интуитивных соображениях (Штейнгауз возражал, опираясь на факты), был Поль Леви [311]: «[Мне] всегда было удивительно слышать, что если руководствоваться в геометрии здравым смыслом, то непременно приходишь к выводу, что все непрерывные функции дифференцируемы. Насколько я могу судить по собственному опыту, начиная с моей первой встречи с концепцией производной и по сей день, верно как раз обратное».

Как ни печально, эти голоса остались не услышанными. Почти все книги и абсолютно все музеи науки продолжают уверять нас в том, что недифференцируемые функции противны здравому смыслу, «чудовищны», «патологичны» или даже «психопатичны».

## ПРИУЧЕНИЕ КРИВОЙ КОХА. РАЗМЕРНОСТЬ $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618$

Я утверждаю, что кривая Коха является грубой, но математически строгой моделью береговой линии. В качестве первой количественной проверки рассмотрим длину  $L(\varepsilon)$  троичного терагона Коха, длина сторон которого равна  $\varepsilon$ . На этот раз длину кривой можно измерить точно, получив при этом чрезвычайно удовлетворительный результат:

$$L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-D}.$$

Эта *точная* формула оказывается идентичной *эмпирическому* закону Ричардсона о длине побережья Британии. Для троичной кривой Коха имеем

$$D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618,$$

откуда следует, что значение  $D$  находится внутри интервала значений, полученных Ричардсоном!

◁ **Доказательство:** Очевидно, что  $L(1) = 1$ , а

$$L(\varepsilon/3) = (4/3)L(\varepsilon).$$

Это уравнение имеет решение вида  $L(\varepsilon) = \varepsilon^{1-D}$ , если  $D$  удовлетворяет соотношению

$$3^{D-1} = 4/3.$$

Следовательно,  $D = \ln 4 / \ln 3$ , что и следовало доказать. ►

Разумеется, в случае кривой Коха показатель  $D$  представляет собой не эмпирическую, а математическую постоянную. Таким образом, аргументы в пользу того, чтобы считать этот показатель размерностью, становятся еще более убедительными, чем в случае береговых линий.

С другой стороны, аппроксимативная хаусдорфова протяженность в размерности  $D$  (понятие, введенное в предыдущей главе) равна произведению  $\varepsilon^D$  на количество отрезков длины  $\varepsilon$ , т. е.  $\varepsilon^D \cdot \varepsilon^{-D} = 1$ . Неплохое подтверждение тому, что величина  $D$  представляет собой хаусдорфову размерность. К сожалению, данное Хаусдорфом определение этой размерности весьма плохо поддается строгой математической трактовке. И даже если бы это было не так, идея обобщения понятия размерности на множество нецелых чисел настолько широка и чревата настолько серьезными последствиями, что более глубокое ее обоснование можно только приветствовать.

## РАЗМЕРНОСТЬ ПОДОБИЯ

Оказывается, мы легко можем получить искомое более глубокое обоснование, рассмотрев случай самоподобных фигур и понятие *размерности подобия*. Мы часто слышим о том, что математики используют размерность подобия для приблизительного определения хаусдорфовой размерности, причем в большинстве случаев, рассматриваемых в этом эссе, такая приблизительная оценка оказывается верной. В применении к этим случаям мы вполне можем считать фрактальную размерность синонимом размерности подобия. ◁ Аналогичным образом мы используем термин «топологическая размерность» как синоним обычной, «интуитивной», размерности. ►

В качестве своего рода стимулирующего вступления давайте рассмотрим стандартные самоподобные формы: отрезки прямой, прямоугольники на плоскости и т. д. (см. рис. 73). Евклидова размерность прямой равна 1, следовательно, при любом целочисленном «основании»  $b$  отрезок  $0 \leq x < X$  может быть «покрыт» по всей «длине» (каждая точка при этом покрывается один и только один раз) некоторым количеством «частей», равным  $N = b$ . Эти «части» представляют собой отрезки  $(k-1)X/b \leq x < kX/b$ , где  $k$  изменяется от 1 до  $b$ . Каждая часть может быть получена из целого с помощью преобразования подобия с коэффициентом  $r(N) = 1/b = 1/N$ .

Евклидова размерность плоскости равна 2. Отсюда аналогичным образом следует, что при любом значении  $b$  «целое», состоящее из прямоугольника с длинами сторон  $0 \leq x < X$  и  $0 \leq y < Y$ , может быть без остатка «разбито» на  $N = b^2$  частей. Части эти представляют собой прямоугольники, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} (k-1)X/b \leq x < kX/b, \\ (h-1)Y/b \leq y < hY/b, \end{cases}$$

где  $k$  и  $h$  изменяются от 1 до  $b$ . И здесь каждая часть может быть получена из целого с помощью преобразования подобия с коэффициентом  $r(N) = 1/b = 1/N^{1/2}$ .

В случае прямоугольного параллелепипеда аналогичное рассуждение приводит нас к коэффициенту  $r(N) = 1/N^{1/3}$ .

Не возникает никаких сложностей и с определением пространств, евклидова размерность  $E$  которых больше 3. (Здесь и далее мы будем обозначать евклидову — или декартову — размерность буквой  $E$ .) Для всех  $D$ -мерных параллелепипедов ( $D < E$ ) соблюдается равенство

$$r(N) = 1/N^{1/D}.$$

Таким образом,

$$Nr^D = 1.$$

Эквивалентные альтернативные выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ln r(N) &= \ln(1/N^{1/D}) = -(\ln N)/D, \\ D &= -\ln N / \ln r(N) = \ln N / \ln(1/r). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к нестандартным фигурам. Для того, чтобы показатель самоподобия имел формальный смысл, необходимо лишь, чтобы рассматриваемая фигура была самоподобной, т. е. чтобы ее можно было разбить на  $N$  частей, каждая из которых может быть получена из целой фигуры с помощью преобразования подобия с коэффициентом  $r$  (в сочетании со смещением или преобразованием симметрии). Полученная таким образом величина  $D$  всегда удовлетворяет равенству

$$0 \leq D \leq E.$$

В случае троичной кривой Коха  $N = 4$ , а  $r = 1/3$ , отсюда  $D = \ln 4 / \ln 3$ , что полностью совпадает с хаусдорфовой размерностью.

## КРИВЫЕ. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

До сих пор мы, не особенно задумываясь, называли фигуру Коха  $\mathcal{K}$  кривой; настало время разобраться с этим понятием. Здравый смысл подсказывает, что стандартная дуга представляет собой связное множество, причем если удалить любую его точку, то множество становится несвязным. А замкнутая кривая — это связное множество, разделяющееся после удаления двух точек на две стандартные дуги. По этим причинам фигуру Коха  $\mathcal{K}$  можно считать кривой.

Любой математик скажет вам, что все фигуры, обладающие вышеуказанным свойством (будь то кривая  $\mathcal{K}$ , интервал  $[0, 1]$  или окружность), имеют топологическую размерность  $D_T$ , равную 1. То есть у нас появляется еще одна концепция размерности! Будучи последователями Уильяма Оккама, все ученые прекрасно осведомлены о том, что «не следует множить сущности без необходимости». Здесь я должен признаться, что наши с вами метания между несколькими почти



эквивалентными формами фрактальной размерности объясняются всего лишь соображениями удобства. А вот параллельное существование фрактальной и топологической размерности является самой что ни на есть суровой *необходимостью*. Читателям, пропустившим то отступление в главе 3, где дано определение фрактала, я рекомендую прочесть его сейчас; кроме того, каждому необходимо ознакомиться с разделом, озаглавленным РАЗМЕРНОСТЬ, в главе 41.

## ИНТУИТИВНЫЙ СМЫСЛ РАЗМЕРНОСТИ $D$ ПРИ НАЛИЧИИ ПОРОГОВ $\Lambda$ И $\lambda$

Одна из работ Чезаро [74] начинается с эпитафия:

«... безгранична воля, безграничны желания, несмотря на то, что силы наши ограничены, а осуществление мечты — в тисках возможности».<sup>1</sup>

В самом деле, тиски возможности властны над учеными в не меньшей степени, чем над шекспировскими Триолом и Крессидой. Для построения кривой Коха необходимо, чтобы каскад новых, с каждым разом уменьшающихся выступов уходил в бесконечность, однако в Природе всякий каскад обречен либо прекратиться, либо измениться. Мы, конечно, можем допустить существование бесконечной серии выступов, но охарактеризовать их как самоподобные можно только в определенных пределах. Когда длина уменьшается до значений, меньших нижнего предела, понятие береговой линии перестает принадлежать географии.

Таким образом, представляется разумным рассматривать реальную береговую линию как кривую, включающую в себя два *пороговых масштаба*. *Внешним порогом*  $\Omega$  можно считать диаметр наименьшей окружности, описывающей остров или материк, а в качестве *внутреннего порога*  $\varepsilon$  мы можем взять те самые 20 м, о которых говорилось в главе 5. Весьма сложно указать реальные числовые значения для порогов, однако необходимость введения этих самых порогов не подлежит сомнению.

И все же даже после того, как мы отбросили самые крупные и самые мелкие детали, величина  $D$  продолжает означать *эффективную размерность* в том виде, в каком она описана в главе 3. Строго говоря, и треугольник, и звезда Давида, и конечные терагоны Коха имеют размерность 1. Однако — как с интуитивной, так и с прагматической точки зрения, руководствующейся простотой и естественностью необходимых поправочных членов — разумнее рассматривать терагон Коха на одной из поздних стадий построения как фигуру, более близкую к кривой с размерностью  $\ln 4 / \ln 3$ , нежели к кривой с размерностью 1.

Что же касается береговой линии, то она, вероятнее всего, имеет несколько различных размерностей (вспомните клубок ниток из третьей

<sup>1</sup> Уильям Шекспир. Триол и Крессида. Пер. с англ. Т. Гнедич. — *Прим. перев.*

главы). Ее географической размерностью является показатель Ричардсона  $D$ . Но в диапазоне размеров, которыми занимается физика, размерность береговой линии может быть совсем иной — связанной с понятием границы раздела между водой, воздухом и песком.

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ КОХА И КРИВЫЕ КОХА БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Сформулируем еще раз основной принцип построения троичной кривой Коха. Построение начинается с *двух фигур*: *инициатора* и *генератора*. Последний представляет собой ориентированную ломаную, состоящую из  $N$  равных отрезков длины  $r$ . В начале каждого этапа построения мы имеем некоторую ломаную; сам этап заключается в замене каждого прямого участка копией генератора, уменьшенной и смещенной так, чтобы ее концевые точки совпали с концевыми точками заменяемого отрезка. На каждом этапе  $D = \ln N / \ln(1/r)$ .

Нетрудно изменить общий вид получаемой конструкции путем модификации генератора; особенно интересны сочетания выступов и впадин — примеры можно найти на следующих после главы иллюстрациях. Таким образом, можно получить различные терагоны Коха, сходящиеся к кривым, размерности которых находятся в интервале от 1 до 2.

Все эти кривые Коха нигде не пересекают сами себя, поэтому при определении  $D$  их можно без какой бы то ни было неоднозначности делить на непересекающиеся части. Однако если при построении кривой Коха использовать небрежно подобранные генераторы, существует известный риск получить самокасание или самопересечение, а то и самоперекрывание. Если желаемое значение  $D$  достаточно мало, то тщательным подбором генератора можно легко избежать появления двойных точек. Задача резко усложняется при увеличении  $D$ , однако пока значение  $D$  остается меньше 2, решение существует.

Если же попытаться получить с помощью вышеописанного построения кривую Коха с размерностью больше 2, то мы неизбежно придем к кривым, которые покрывают плоскость бесконечно много раз. Случай  $D = 2$  заслуживает особого рассмотрения, и мы займемся им в главе 7.

## ДУГИ И ПОЛУПРЯМЫЕ КОХА

В некоторых случаях возникает необходимость в педантичной замене термина «кривая Коха» чем-нибудь более точным и подходящим. Например, фигура, изображенная на рис. 73 внизу, формально является *коховым отображением отрезка прямой* и может быть названа *дугой Коха*. Как следствие, граничная линия на рис. 74 оказывается составленной из трех дуг Коха. Часто бывает полезно экстраполировать дугу в *полупрямую Коха* — экстраполяция увеличивает исходную дугу сначала

в  $1/r = 3$  раза, используя ее левую концевую точку как фокус, затем в  $3^2$  раз и т. д. Результат каждой следующей экстраполяции включает в себя предыдущую кривую, и получающаяся в пределе кривая содержит все промежуточные конечные кривые.

## ЗАВИСИМОСТЬ МЕРЫ ОТ РАДИУСА ПРИ ДРОБНОМ ЗНАЧЕНИИ $D$

Рассмотрим еще одну стандартную ситуацию евклидовой геометрии и обобщим ее с учетом фрактальных размерностей. В случае идеальных однородных физических объектов плотности  $\rho$  мы можем считать, что масса  $M(R)$  стержня длиной  $2R$ , диска или шара радиуса  $R$  пропорциональна  $\rho R^E$ . При  $E = 1, 2$  и  $3$  коэффициенты пропорциональности соответственно равны  $2, 2\pi$  и  $4\pi/3$ .

*Правило  $M(R) \propto R^D$  применимо и к фракталам, при условии, что они самоподобны.*

В случае троичных кривых Коха это утверждение доказывается проще всего, если начало координат совпадает с концевой точкой полупрямой Коха. Если круг радиуса  $R_0 = 3^k$  (где  $k \geq 0$ ) содержит массу  $M(R_0)$ , то круг радиуса  $R = R_0/3$  вместит в себя массу  $M(R) = M(R_0)/4$ . Отсюда

$$M(R) = M(R_0) (R/R_0)^D = [M(R_0)R_0^{-D}]R^D.$$

Следовательно, отношение  $M(R)/R^D$  не зависит от радиуса  $R$  и может послужить для определения плотности  $\rho$ .

## ДВИЖЕНИЕ КОХА

Представьте себе точку, движущуюся вдоль полупрямой Коха и проходящую за одинаковые интервалы времени дуги одинаковой меры. Если теперь обратить функцию, определяющую время как зависимость от положения точки, то мы получим функцию, определяющую положение точки как зависимость от времени, т. е. функцию движения. Скорость такого движения, разумеется, бесконечна.

## СЛУЧАЙНЫЕ БЕРЕГОВЫЕ ЛИНИИ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ВЗГЛЯД

Кривая Коха похожа на настоящие береговые линии, однако она имеет кое-какие существенные недостатки (эти недостатки практически в неизменном виде присущи всем ранним моделям рассматриваемых в

настоящем эссе прецедентов). Ее части идентичны одна другой, а коэффициент самоподобия  $r$  непременно задается жесткой шкалой вида  $b^{-k}$ , где  $b$  — целое число, т. е.  $r = 1/3$ ,  $(1/3)^2$  и т. д. Таким образом, кривую Коха можно считать лишь очень предварительной моделью береговой линии.

Я разработал несколько способов избавления от этих недостатков, однако ни один из них не обходится без известных вероятностных усложнений, с которыми нам на данный момент не справиться: сначала следует уладить множество вопросов, касающихся неслучайных фракталов. Интересующемуся же читателю, знакомому с теорией вероятности, ничто не мешает заглянуть немного вперед и полюбоваться на модели, основанные на моих «сквиг-кривых»<sup>1</sup> (см. главу 24) и, что более важно, на линиях уровня дробных броуновских поверхностей (см. главу 28).

Здесь и далее я использую следующий способ представления материала. Многочисленные узоры, создаваемые Природой, рассматриваются на фоне упорядоченных фракталов, которые могут служить пусть и очень приблизительными, но все же моделями рассматриваемых феноменов, тогда как предлагаемые мною случайные модели отнесены в более поздние главы.

**Памятка.** Во всех случаях, когда значение  $D$  известно точно, не является целым числом и записано в десятичной форме с целью облегчения сравнений, в нем сохраняются *четыре* знака после запятой. Число 4 было выбрано исходя из следующих соображений: я хотел показать, что в данном случае значение  $D$  не является *ни* эмпирическим (все эмпирические значения в настоящее время известны с точностью до одного или двух десятичных знаков), *ни* не вполне определенным геометрическим значением (все подобные значения в настоящее время известны либо с точностью до одного-двух десятичных знаков, либо с точностью до шести десятичных знаков).

## СЛОЖНОЕ ИЛИ ВСЕ ЖЕ ПРОСТОЕ И ПРАВИЛЬНОЕ?

Кривые Коха демонстрируют новое и весьма интересное сочетание простоты и сложности. На первый взгляд они выглядят гораздо более сложными, чем любая стандартная евклидова кривая. Однако теория математических алгоритмов Колмогорова – Чайтина утверждает обратное: кривая Коха *ничуть* не сложнее окружности! Эта теория оперирует некоторым набором «букв» или «атомных операций», причем длина кратчайшего известного алгоритма построения искомой функции принимается за объективный верхний предел сложности этой функции.

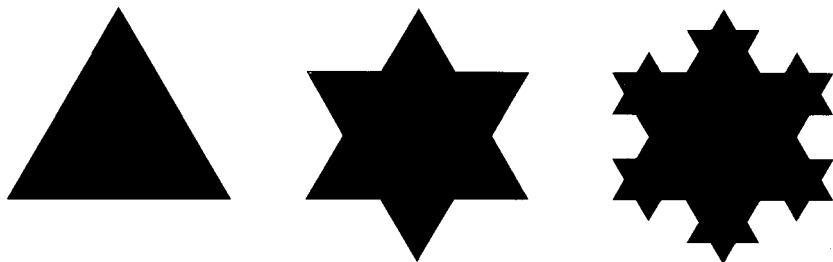
<sup>1</sup>От англ. *squiggle* — «извилина, загогулина». — Прим. перев.

Попробуем применить вышеописанный подход к построению кривых. Условимся изображать буквы или «атомы» графического процесса прямыми «штрихами». При использовании такого алфавита построение правильного многоугольника требует конечного числа штрихов, каждый из которых можно описать с помощью конечного числа инструкций, и, как следствие, является задачей конечной сложности. В построении же окружности, напротив, участвует «бесконечное количество бесконечно коротких штрихов», и поэтому окружность представляется нам как кривая бесконечной сложности. Однако если производить построение окружности рекурсивно, можно видеть, что необходимо лишь конечное число инструкций, и значит построение окружности также является задачей конечной сложности. Начнем, например, с правильного многоугольника, число сторон которого равно  $2^m$  ( $m > 2$ ), затем заменим каждый штрих длины  $2 \sin(\pi/2^m)$  двумя штрихами длины  $2 \sin(\pi/2^{m+1})$ ; далее процесс повторяется снова и снова. Для построения кривых Коха применяется тот же подход, но с использованием более простых операций: длину каждого штриха нужно всего лишь умножить на  $r$ , причем относительное расположение штрихов остается неизменным на протяжении всего построения. Отсюда и следует парадоксальное явление: когда сложность определяется длиной лучшего на настоящий момент алгоритма, выраженного средствами данного алфавита, *кривая Коха оказывается проще окружности*.

Это необычное распределение кривых по относительной сложности их построения не следует принимать всерьез. Самое интересное, что, используя алфавит, основанный на окружности и линейке (т. е. взяв в качестве «атома» окружность), мы приходим к противоположному выводу. И все же, при разумно подобранном алфавите, любая кривая Коха не только имеет конечную сложность, но оказывается проще большинства евклидовых кривых.

Меня всегда зачаровывала этимология слов, и поэтому я не могу завершить эту главу, не сознавшись в том, что мне претит называть кривую Коха «неправильной». Этот термин родственен слову *править* и в принципе вполне приемлем, если понимать это слово как «делать правильным, выпрямлять»: кривую Коха вряд ли что-либо способно выпрямить. Однако вспоминая о другом смысле слова *править* и размышляя о *правителях* или королях (тот же смысл, но несколько иная этимология. Кстати, латинские слова *rex* («король») и *regula* («правило») также имеют один корень), т. е. о тех, кто устанавливает свод незыблемых правил, которым следует беспрекословно подчиняться, я всякий раз молча протестую против неудачного термина — в этом смысле в мире просто нет ничего «правильнее» кривой Коха.





**Рис. 70. ТРОИЧНЫЙ ОСТРОВ (ИЛИ СНЕЖИНКА) КОХА К.  
ПЕРВОНАЧАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ХЕЛЬГЕ ФОН КОХА  
(РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ  $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2618$ )**

Начинается построение с «инициатора», т. е. с черного равностороннего треугольника, длина стороны которого равна единице. Затем в средней трети каждой из сторон строим по равностороннему треугольнику с длиной сторон, равной  $1/3$ . На этом этапе мы получаем шестиконечную звезду, или звезду Давида. На каждой из сторон полученной звезды строим вышеописанным образом по равностороннему треугольнику и повторяем процесс до бесконечности.

Точки средней трети любого из отрезков при каждом добавлении смещаются в перпендикулярном направлении, в то время как вершины треугольного инициатора остаются неподвижными. Остальные девять вершин звезды Давида достигают своих окончательных положений после конечного числа этапов. Некоторые точки смещаются бесконечное число раз, но каждый раз на меньшую величину, и в конце концов сходятся к неким пределам, которые и определяют форму береговой линии.

Сам остров представляет собой предел последовательности областей, ограниченных многоугольниками, каждый из которых содержит область, ограниченную предыдущим многоугольником. Фотографический негатив такого предела можно увидеть на рис. 74.

Обратите внимание на то, что и на этом, и на многих других рисунках чаще изображены не береговые линии, а острова и озера — вообще, «сплошным» фигурам явно отдается предпочтение перед контурами. Объясняется это очень просто — мы всего лишь пытались максимально эффективно использовать высокую разрешающую способность нашей графической системы.

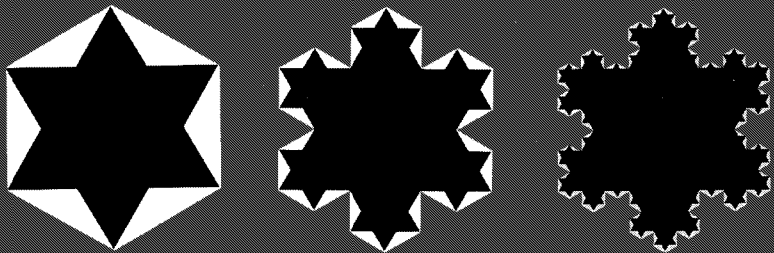
**Почему к данной кривой нельзя провести касательную?** Выберем в качестве неподвижной точки одну из вершин исходного треугольника и проведем прямую до некоторой точки, расположенной на предельной кривой, в направлении по часовой стрелке. По мере того, как выбранная точка на кривой приближается к нашей вершине, соеди-

няющая их прямая колеблется внутри угла в  $30^\circ$  и совершенно не желает устремляться к какому бы то ни было пределу, который мы могли бы назвать касательной в направлении по часовой стрелке. Касательная в направлении против часовой стрелки также не определена. Точка, к которой нельзя провести касательную, поскольку опущенные из нее хорды колеблются под вполне определенными углами, называется *гиперболической* точкой. Что касается тех точек, к которым кривая  $\mathcal{K}$  стремится асимптотически, то к ним также нельзя провести касательную, но по другой причине.

---

**Рис. 71. ТРОИЧНЫЙ ОСТРОВ (ИЛИ СНЕЖИНКА) КОХА  $\mathcal{K}$ .  
АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЭРНЕСТА ЧЕЗАРО  
(РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ  $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2618$ )**

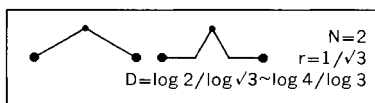
Альтернативное построение острова Коха предложено в статье Чезаро, посвященной кривым фон Коха [74] — работе настолько замечательной, что всякий раз, открывая журнал, я забываю о том, как долго и упорно я искал эту статью (и как разозлился, обнаружив впоследствии, что все мои труды были напрасны — мне следовало сразу же заглянуть в сборник [75]). Позволю себе привести несколько особенно восхитительных строк в моем вольном переводе. «Бесконечное вложение этой фигуры в самоё себя дает нам некоторое представление о том, что Теннисон однажды назвал *внутренней* бесконечностью — единственный, в сущности, род бесконечности, доступный нашему восприятию Природы. Благодаря такому подобию между целым и частями — вплоть до самых мельчайших, исчезающе малых частей — кривая Коха обретает воистину чудесные свойства. Если бы ей была дарована жизнь, то для того, чтобы убить ее, нам пришлось бы уничтожить всю кривую без остатка, ибо она возрождалась бы вновь и вновь из глубин своих треугольников; то же, впрочем, можно сказать и о жизни во Вселенной вообще».



В роли инициатора в построении Чезаро выступает правильный шестиугольник с длиной стороны  $\sqrt{3}/3$ . Окружающий остров океан изображен серым цветом. Каждый прямолинейный участок берега заменяется треугольной бухтой, размер которой уменьшается с каждым этапом построения до бесконечности, а остров Коха становится предельно *уменьшающихся* приближений.

На приведенном рисунке показаны оба метода построения: и метод Коха (см. рис. 70) и только что описанный метод Чезаро. При таком представлении предельная береговая линия Коха оказывается зажатой между двумя неуклонно приближающимися изнутри и снаружи терагонами. Можно вообразить себе некий каскадный процесс, в начале которого мы имеем три концентрических кольца: твердая земля (черная), болото (белое) и вода (серая). С каждым этапом такого каскадного процесса некоторый участок болота преобразуется либо в твердую землю, либо в воду. В пределе болото донельзя истончается, превращаясь из «поверхности» в кривую.

**Интерпретация срединного смещения.** Используем приведенные ниже генератор и последующий шаг (угол равен  $120^\circ$ ):

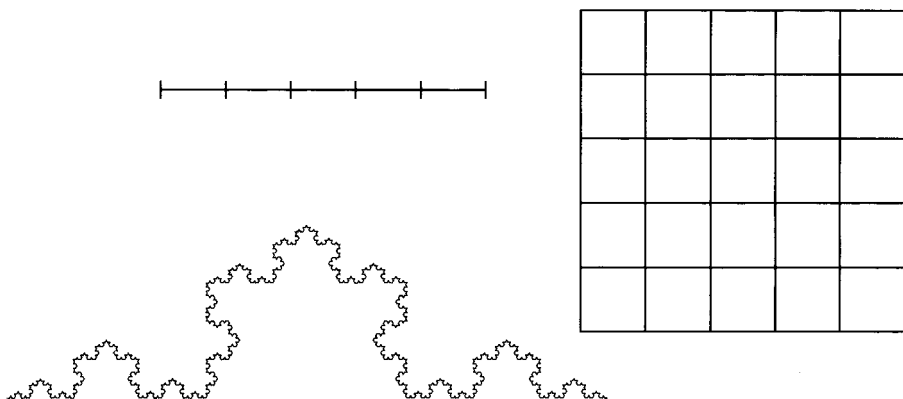


Смещение средней точки прямолинейного отрезка наружу  $k$ -го внутреннего терагона дает  $k$ -й наружный терагон; срединное смещение внутрь  $k$ -го наружного терагона дает  $k + 1$ -й наружный терагон. Эффективность такого подхода демонстрируется на рис. 98 и 99, а также в главе 25. ■

### Рис. 73. ДВА ВИДА САМОПОДОБИЯ: СТАНДАРТНОЕ И ФРАКТАЛЬНОЕ

На рисунке показано, как, располагая некоторым целым числом (в данном случае  $b = 5$ ), можно разбить прямолинейный отрезок единичной длины на  $N = b$  подынтервалов, длина каждого из которых равна  $r = 1/b$ . Аналогичным образом мы можем разделить единичный квадрат на  $N = b^2$  меньших квадратов с длиной стороны  $r = 1/b$ . И в том, и в другом случае величина  $\ln N / \ln(1/r)$  представляет собой размерность подобия рассматриваемой фигуры, — величина, о которой школьная геометрия не считает нужным упоминать, так как ее значение сводится к евклидовой размерности.





Нижняя фигура — это троичная кривая Коха или треть побережья острова Коха. Ее также можно разбить на подобные исходной фигуры меньшего размера, при этом  $N = 4$ , а  $r = 1/3$ . Размерность подобия  $D = \ln N / \ln(1/r)$  в данном случае оказывается дробным числом (ее значение  $\sim 1,2618$ ), не находя себе аналогов в стандартной геометрии.

Хаусдорф показал, что величина  $D$  может быть весьма полезной в математике и что она совпадает с хаусдорфовой, или фрактальной, размерностью. Я же утверждаю, что без величины  $D$  не обойтись и в естественных науках.

■

### **Рис. 74. ТРОИЧНОЕ ОЗЕРО КОХА $\mathcal{K}$ (РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ $D = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,2618$ )**

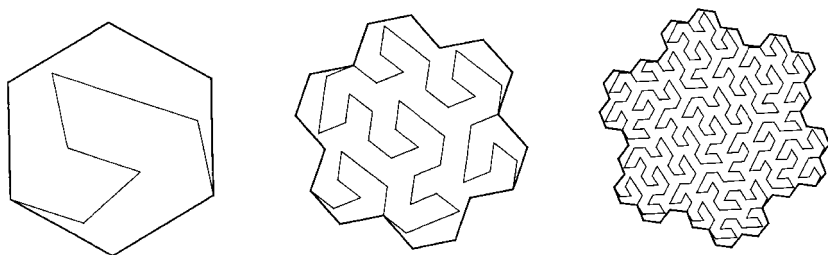
Продолжим построение, описанное в пояснениях к рисункам 70 и 71, до некоторого продвинутого этапа и сфотографируем результат. Негатив такой фотографии представлен на рисунке и напоминает скорее озеро, нежели остров.

Необычный узор серых «волн», заполняющих это озеро, не случаен. Его описание можно найти в пояснениях к рисункам 104 и 105.

Береговая линия озера Коха *не* самоподобна, поскольку замкнутую кривую нельзя представить в виде совокупности подобных ей меньших замкнутых кривых. ◁ Хотя в главе 13 мы используем самоподобие для построения бесконечного скопления островов. ►

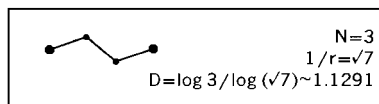
■





**Рис. 75 и 76. ДРУГИЕ ОСТРОВА И ОЗЕРО КОХА**  
**(РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ  $D = \ln 9 / \ln 7 \sim 1,1291$ )**

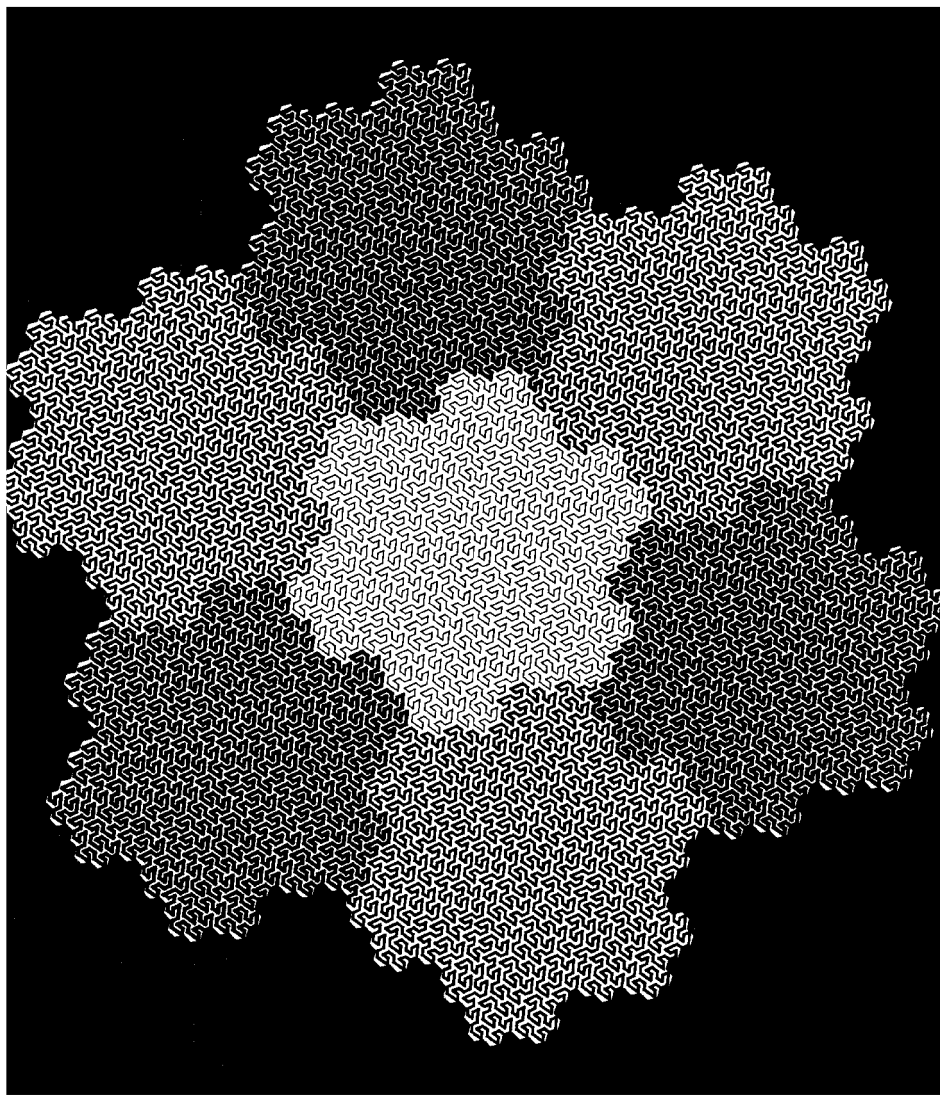
Этим вариантом острова Коха мы обязаны В. Госперу (см. [163]): инициатором служит правильный шестиугольник, а генератор выглядит следующим образом:



**Рис. 75.** Здесь приведено несколько этапов построения «острова Госпера» (показан жирной линией). О внутреннем заполнении острова (тонкая линия) мы поговорим чуть позже (см. рис. 106).

**Рис. 76.** Одна из поздних стадий построения острова Госпера. За пояснениями относительно заполнения (линии различной толщины внутри острова) обратитесь к рис. 106.

Заметьте, что в отличие от исходной кривой Коха, этот генератор симметричен относительно своего центра. Он совмещает в себе бухты и полуострова таким образом, что площадь острова на протяжении всего построения остается неизменной. То же верно и для кривых Коха (вплоть до рис. 88).



**Тайлинг.** Островами Госпера можно полностью, без просветов, покрыть плоскость. Эта процедура называется *покрытием*, или *тайлингом*.<sup>1</sup>

**Пертайлинг.** Более того, этот остров самоподобен, в чем легко убедиться, взглянув на области на рисунке, заштрихованные линиями разной толщины. То есть каждый остров можно разделить на семь «провинций», каждая из которых может быть получена из целого острова преобразованием подобия с коэффициентом  $r = 1/\sqrt{7}$ . Для обозначения покрытия плоскости с помощью таких самоподобных плиток я предлагаю ввести новый термин *пертайлинг* (латинская приставка *per-* служит здесь для выражения совершенства и всеохватности процесса).

В большинстве случаев покрытия плоскости плитку нельзя разделить на какое-либо количество меньших плиток, подобных исходной. Многих, например, чрезвычайно раздражает, что сложенные вместе правильные шестиугольники не образуют столь же правильного большего шестиугольника. Из плиток Госпера вполне можно «состряпать» достаточно близкое подобие шестиугольника, способное точно разделиться на семь одинаковых частей. Другие фрактальные плитки позволяют осуществить деление на другое количество частей.

**Франция.** Среди географических реалий есть одна фигура удивительно правильной формы, часто называемая за свою правильность Шестиугольником. Речь идет о Франции. Надо сказать, что фигура, символизирующая на географической карте Францию, гораздо меньше напоминает шестиугольник, нежели фигуру, изображенную на рис. 76 (хотя Бретань на нашем рисунке выглядит, пожалуй, несколько недокормленной).

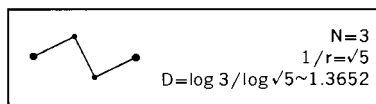
◀ **Почему нельзя провести касательную ни в одной точке этой береговой линии?** Выберите неподвижную точку на береговой линии, полученной после некоторого конечного числа этапов построения, и соедините эту точку прямой линией с некоторой движущейся точкой предельной береговой линии. По мере того, как движущаяся точка приближается к неподвижной точке вдоль предельной береговой линии (неважно, справа или слева), соединяющая точки прямая постоянно меняет направление. Такая неподвижная точка называется *локсодромной* точкой. ▶

---

<sup>1</sup>См. также примечание к с. 18. — *Прим. перев.*

**Рис. 79. ПРОЧИЕ ОСТРОВА И ОЗЕРА КОХА (РАЗМЕРНОСТИ  
БЕРЕГОВЫХ ЛИНИЙ ОТ 1 ДО  $D = \ln 3 / \ln \sqrt{5} \sim 1,3652$ )**

В данной последовательности фрактальных кривых инициатором выступает правильный многоугольник с числом сторон  $M$ ; генератор таков, что  $N = 3$ , а углы между его первым и вторым и вторым и третьим отрезками совпадают и равны  $\theta = 2\pi/M$ . На рис. 75 и 76  $M = 6$  (здесь этой фигуры нет), а кривая с  $M = 3$  обсуждается в пояснении к рис. 109. На данном рисунке изображены поздние стадии построения терагонов для значений  $M = 4, 8, 16$  и  $32$  в виде вложенных друг в друга озер и островов. Например, значению  $M = 4$  соответствует следующий генератор:



Штриховка внутри центрального острова ( $M = 4$ ) описана в пояснении к рис. 109 и 110.

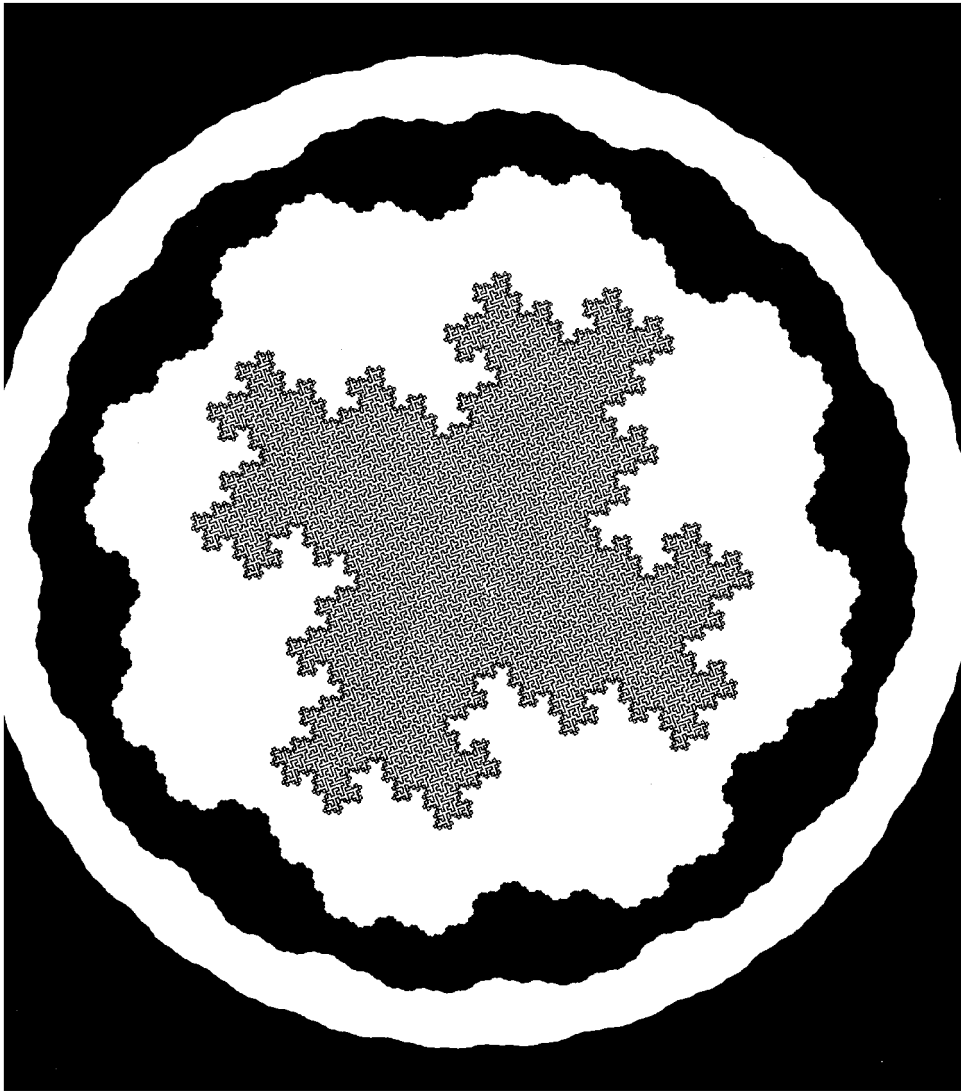
Если параметр  $M$  уходит в бесконечность, соответствующая кривая стремится приобрести форму окружности. Если же  $M$  уменьшается, то наши фигуры начинают «сжеживаться», сначала постепенно, затем — резкими скачками. Когда  $M$  достигает 3, в соответствующей кривой появляются самопересечения. Этот случай мы обсудим позже (см. рис. 109 и 110).

**Критическая размерность.** Когда в качестве инициатора выбирается отрезок  $[0, 1]$ , угол  $\theta$  может принимать любые значения от  $180^\circ$  до  $60^\circ$ . Существует, однако, некий критический угол  $\theta_{кр}$  — такой, что береговая линия не имеет самопересечений в том и только в том случае, если  $\theta > \theta_{кр}$ . Соответствующая размерность  $D_{кр}$  называется *критической размерностью* для самопересечений. Угол  $\theta_{кр}$  близок к  $60^\circ$ .

**Обобщение.** Построения, изображенные на рис. 75–88, допускают следующее несложное обобщение. Назовем приведенные на рисунке генераторы прямыми (S) и определим обратный генератор (F) как зеркальное отражение прямого генератора относительно линии  $y = 0$ . На каждом отдельном этапе построения будем использовать один генератор, однако для различных этапов можно выбирать различные генераторы. Кривые на указанных (и некоторых последующих) рисунках построены с помощью S-генераторов, но и другие бесконечные последовательности S- и F-генераторов дают очень похожие результаты.

◀ При чередовании F- и S-генераторов локсодромические точки переходят в гиперболические, как в оригинальной кривой Коха. ►

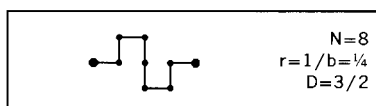




### Рис. 81. КВАДРАТИЧНЫЙ ОСТРОВ КОХА (РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ $D = 3/2 = 1,5000$ )

На рис. 79–85 показано несколько фигур Коха, инициатором которых является квадрат (отсюда и название *квадратичные*). Одним из преимуществ таких построений является то, что с ними можно экспериментировать даже на слабых графических системах. < Еще одно преимущество — квадратичные фрактальные кривые ведут непосредственно к оригинальной кривой Пеано, описанной в пояснении к рис. 95. ►

**Рис. 81.** Инициатором здесь служит квадрат, а генератор выглядит следующим образом:



Как и на рис. 75–79, на каждом этапе построения общая площадь острова остается неизменной. На рис. 81 вверху приведены два первых этапа построения крупным планом и два последующих в более мелком масштабе.

Результат последнего этапа, еще более увеличенный, демонстрирует мельчайшие детали в виде очень тонких, едва видимых выступов, которых вы, конечно же, не увидели бы, не обладай наша графическая система такой превосходной разрешающей способностью.

Как в трагонах, так и в предельной кривой отсутствует какое бы то ни было самоперекрытие, самопересечение или самокасание. Это утверждение остается в силе и для последующих построений (вплоть до рис. 85).

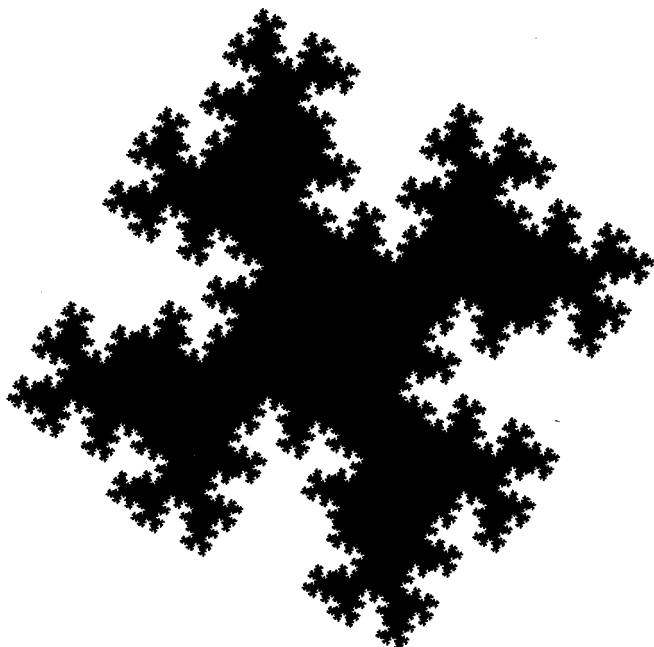
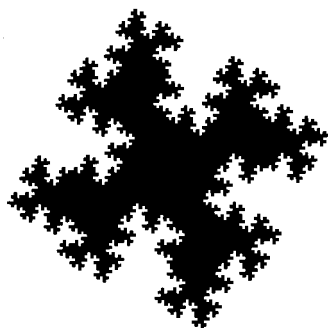
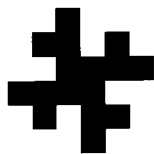
< Не следует забывать о том, что фракталы на рис. 81–85 представляют береговые линии; суша и море здесь — это удобные фигуры, обладающие положительными и конечными площадями. На с. 209 упоминается случай, в котором только «море», будучи объединением простых трем, имеет вполне определенную площадь, в то время как суша не имеет ни единой внутренней точки. ►

**Тайлинг и пертайлинг.** Этот остров можно разбить на 16 меньших островков ( $r = 1/4$ ). Каждый представляет собой остров Коха, построенный на одном из 16 квадратов, образующих первый этап построения.

< В главах 25 и 29 показано, что размерность  $D = 3/2$  характерна также для многих броуновских функций. Следовательно, это значение легко можно получить с помощью случайных кривых и поверхностей. ►

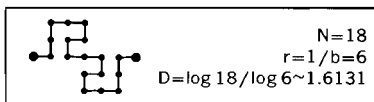






### Рис. 83. КВАДРАТИЧНЫЙ ОСТРОВ КОХА (РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ $D = \ln 18 / \ln 6 \sim 1,6131$ )

В качестве инициатора снова возьмем квадрат, а генератором будет следующая ломаная:

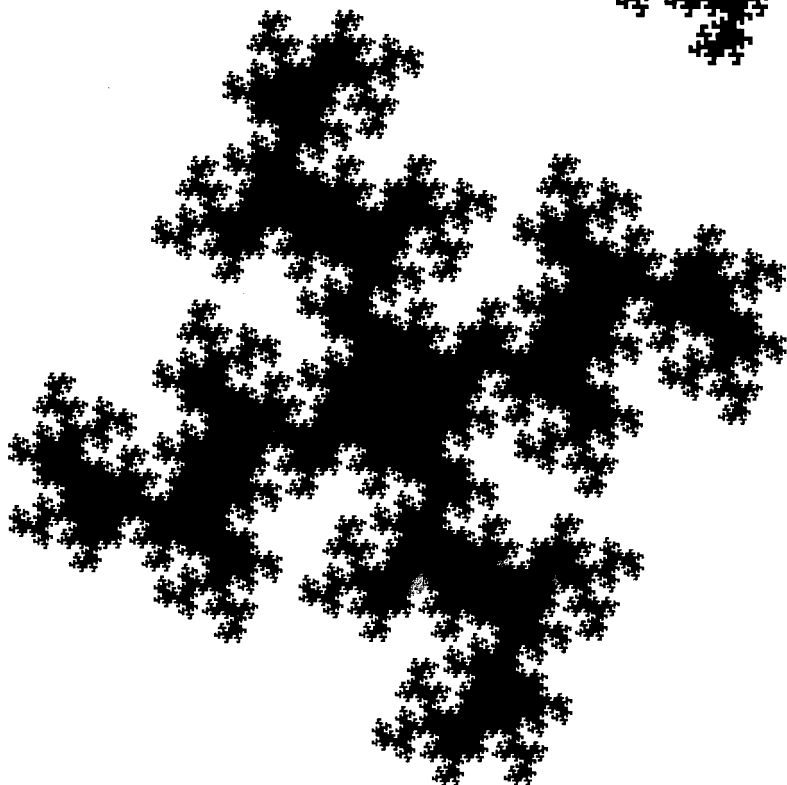
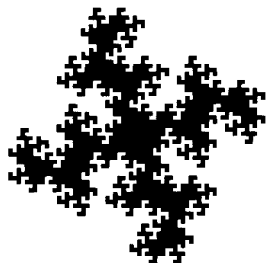
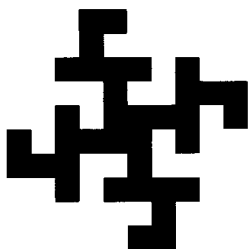


То, что береговая линия квадратичных островов Коха, представленных в данной подборке иллюстраций, в очень значительной степени зависит от  $D$ , весьма показательно. В то же время, поскольку их общим инициатором является квадрат, внешняя форма этих островов остается приблизительно одинаковой. Если инициатором выступает какой-либо другой правильный  $M$ -угольник ( $M > 4$ ), то можно наблюдать, как по мере увеличения  $M$  внешняя форма становится все более гладкой. Об истинной зависимости между внешней формой и значением  $D$  мы узнаем не раньше, чем в главе 28, в которой рассматриваются случайные береговые линии, эффективно определяющие как генератор, так и инициатор.

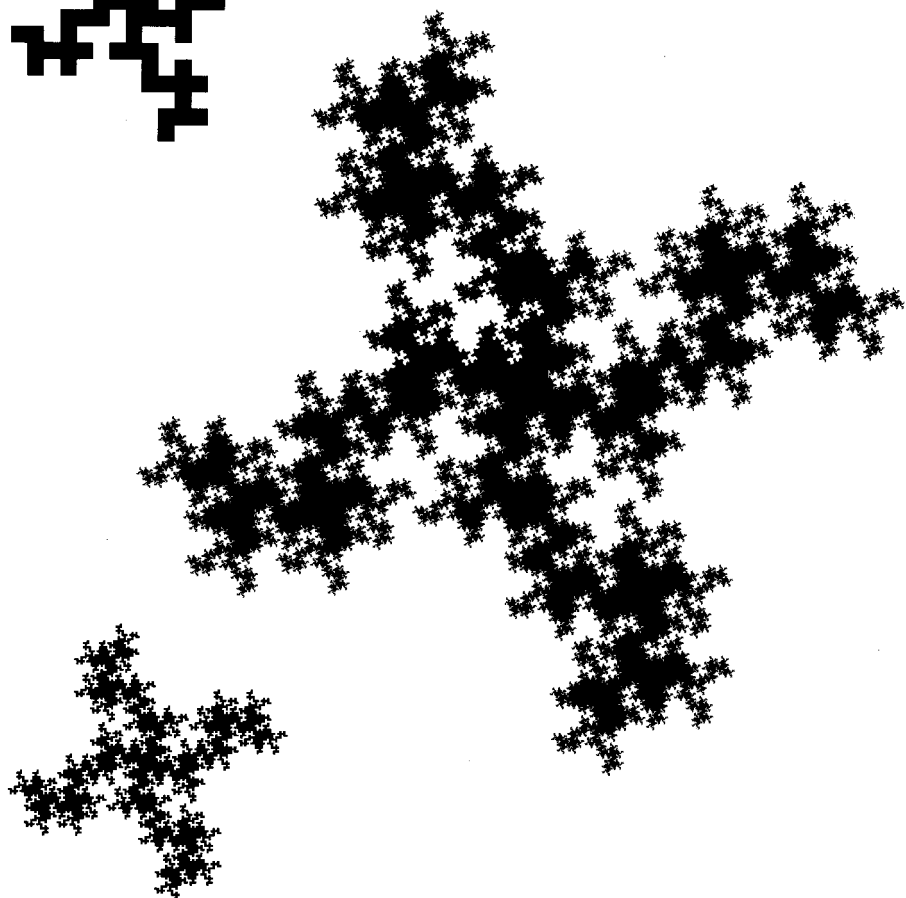
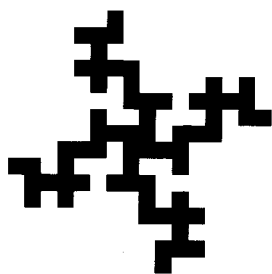
◄ **Максимальность.** Свой вклад в сходство внешних форм вносит тот факт, что изображенные на рис. 79–85 квадратичные кривые Коха обладают весьма интересным свойством максимальности. Расположим все генераторы Коха, порождающие кривые без самопересечений, на квадратной решетке, образованной прямыми, параллельными и перпендикулярными отрезку  $[0, 1]$ . Допустим также, что все эти генераторы можно использовать с любыми инициаторами на нашей квадратной решетке. Определим как *максимальные* те генераторы, которые характеризуются наибольшим значением  $N$  и, как следствие,  $D$ . Нетрудно заметить, что  $N_{\max} = b^2/2$  при четных  $b$  и  $N_{\max} = (b^2 + 1)/2$  при нечетных  $b$ .

При увеличении  $b$  возрастает как максимальное значение  $N$ , так и число альтернативных максимальных многоугольников. Таким образом, на предельную кривую Коха все большее влияние оказывает исходный генератор. Кроме того, кривая выглядит все более изошренной, поскольку стремление достичь максимальной размерности, избежав при этом самопересечения, налагает определенные требования, которые лишь ужесточаются с ростом  $D$ . Этот процесс достигает кульминации в следующей главе, вместе с пределом Пеано  $D = 2$ .

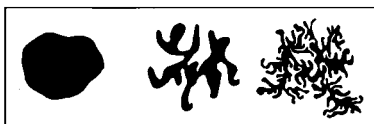
**Лакунарность.** Фрактальные кривые с одинаковой размерностью  $D$ , но разными значениями  $N$  и  $r$  могут качественно отличаться одна от другой. Ответственный за это параметр, отличный от  $D$ , обсуждается в главе 34. ►







энергии размазывает квадратное пятно чернил по поверхности воды. Затем первоначальное завихрение расщепляется на меньшие завихрения, воздействие которых носит более локальный характер. Исходная энергия разделяется на все уменьшающиеся порции, пока в конце концов не остается ничего, кроме легкой размытости контуров образовавшегося в результате пятна, как показано на приведенной ниже иллюстрации, позаимствованной из работы Коррсина [87].



То, что ричардсонов каскад порождает фигуру, ограниченную фрактальной кривой, несомненно. А вот с выводом о том, что ее размерность  $D = 5/3$ , спешить не стоит. Это значение  $D$  соответствует плоским срезам пространственных поверхностей с размерностью  $D = 8/3$ , какие часто встречаются в турбулентности. В случае изоповерхностей скалярных величин (рассматриваемых в главе 30) размерность  $D = 8/3$  можно объяснить в рамках теории Колмогорова. И все же я бы не стал доверять нумерологическим аналогиям.

В сущности, значение  $D$  зависит, скорее всего, от начальной энергии жидкости и от размера сосуда, в котором имеет место дисперсия. При низкой начальной энергии из круглого пятна получится кривая с размерностью  $D$ , близкой к 1 (см. рис. 79). При высокой начальной энергии, да еще в маленьком сосуде, можно будет наблюдать более сложную дисперсионную картину, плоские срезы которой будут больше похожи на рис. 84 ( $D \sim 1,7373$ ); их размерность может даже достичь значения  $D = 2$  (см. главу 8). См. также работу [386].

Если последнее заключение верно, следующим шагом необходимо изучить связь между начальной энергией и  $D$  и отыскать наименьшее значение энергии, при котором плоский срез пятна имеет  $D = 2$  (или  $D = 3$  в пространственном случае). Исследовав предельный случай  $D = 2$  (см. главу 7), мы убедимся, что он качественно отличается от случая  $D < 2$ , так как позволяет любым двум частицам чернил, которые в начале процесса были далеко друг от друга, прийти в асимптотическое соприкосновение. ◀ Я бы совсем не удивился, если бы оказалось, что за одним термином «турбулентная дисперсия» скрываются два совершенно отличных друг от друга феномена. ▶

**Постскрипtum.** Уже после того, как эта иллюстрация появилась во «Фракталах» 1977 г., Пол Димотакис сфотографировал тонкие срезы турбулентной струи, рассеивающейся в ламинарной среде. Сходство снимков с иллюстрацией весьма меня порадовало. ▶



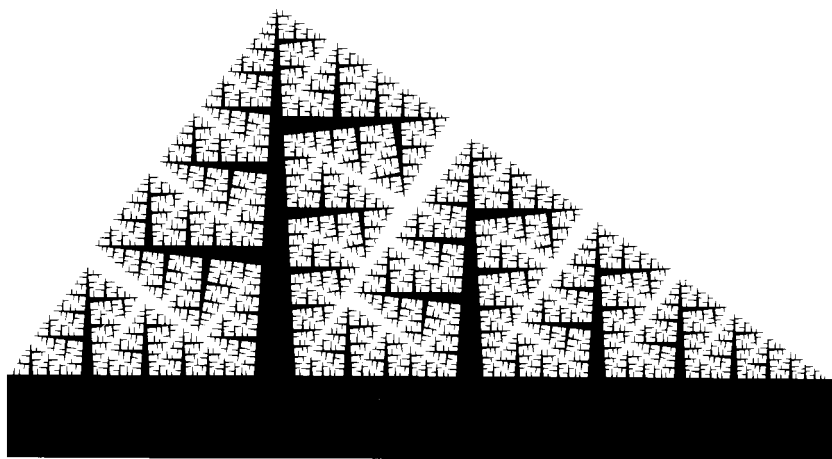


**Рис. 87 и 88. ОБОБЩЕННЫЕ КРИВЫЕ КОХА И САМОПОДОБИЕ С НЕРАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**  
 $(D \sim 1,4490, D \sim 1,8797, D \sim 1 + \varepsilon)$

При построении этих конструкций использован метод Коха, но с неравными длинами сторон  $r_m$  генератора. До сих пор мы подразумевали, что ко всем  $N$  «частям», на которые делится наше «целое», применяется один и тот же коэффициент подобия  $r$ . При неравных коэффициентах  $r_m$  кривая Коха несколько теряет в своей неумолимой правильности. На рис. 87 вы можете видеть модифицированную таким образом троицную кривую Коха.

Заметьте, что во всей предшествующей серии иллюстраций построение кривой продолжалось до тех пор, пока не достигало мельчайших деталей заранее определенного размера. Когда  $r_m \equiv r$ , искомая цель достигается за некоторое заранее определенное число этапов построения, здесь же необходимое число этапов оказывается переменным.

Теперь перед нами стоит задача распространить на данное обобщение рекурсии Коха концепцию размерности подобия. Предположим для начала, что некая стандартная евклидова фигура покрывается подобными ей частями, уменьшенными соответственно в  $r_m$  раз. При  $D = 1$  значение  $r_m$  должно удовлетворять равенству  $\sum r_m = 1$ ; в общем случае евклидовы фигуры требуют равенства  $\sum r_m^D = 1$ . Далее, для случая фрактальных кривых, которые могут быть разделены на равные части, уже знакомое нам условие  $Nr^D = 1$  также можно переписать как  $\sum r_m^D = 1$ . Исходя из этих соображений, мы можем построить генерирующую размерность функцию  $G(D) = \sum r_m^D$  и определить  $D$  как ее единственный действительный корень при  $G(D) = 1$ . Остается выяснить, совпадает ли наша размерность  $D$  с размерностью Хаусдорфа –



Безиковича. Да, совпадает — по крайней мере, во всех случаях, о которых мне известно.

**Примеры.** Размерность  $D$  кривой, представленной на рис. 87, несколько превышает размерность оригинальной кривой Коха  $\ln 4 / \ln 3$ . Размерность  $D$  кривой, изображенной на рис. 88 сверху, немного не достигает 2. При  $D \rightarrow 2$  береговая линия этого острова стремится к кривой Пеано–Пойа, одной из кривых Пеано, рассматриваемых в следующей главе. Сходство между этой фигурой и рядом деревьев не случайно, как будет показано в главе 17. Наконец, кривая на рис. 88 внизу имеет размерность  $D$  лишь чуть больше 1.





## 7 ◊ ПОКОРЕНИЕ ЧУДОВИЩНЫХ КРИВЫХ ПЕАНО

Обсуждая в предыдущей главе обобщенные кривые Коха без самопересечений, мы не случайно ограничились значениями  $D < 2$ . Когда размерность  $D$  достигает 2, фрактальные кривые претерпевают значительные качественные изменения.

Будем исходить из предположения, что терегоны не имеют самопересечений, хотя самокасание допускается. В этом случае одним из признаков достижения размерности  $D = 2$  можно считать то, что точки самокасания становятся асимптотически *неизбежными*. Главным же признаком является *неизбежность* заполнения предельной кривой некоторой «области» плоскости, т. е. некоторого множества, состоящего из дисков (заполненных окружностей).

Это двойственное заключение *не* является следствием пока еще поправимой нехватки воображения со стороны математиков. Оно проистекает из одного фундаментального принципа, сыгравшего центральную роль в кризисе математики 1875 – 1925 гг.

### «КРИВЫЕ» ПЕАНО, ДВИЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ

Упомянутые предельные кривые, представленные на иллюстрациях в конце главы, называются *кривыми Пеано*, поскольку первая из них была построена Пеано в 1890 г. [465]. Их также называют *заполняющими плоскость*. Для таких кривых остается справедливым формальное определение размерности  $\ln N / \ln(1/r) = 2$ , хотя и не из тех соображений, из каких нам хотелось бы. С математической точки зрения, кривая Пеано — всего лишь несколько необычное представление области или участка плоскости, а все классические определения единодушны в том, что размерность такого участка равна 2. Иными словами, человеку благо разумному следует избегать употребления термина *кривая, заполняющая плоскость*.

К счастью, большая часть «кривых» Пеано, включая и полученные путем рекурсивного построения Коха, поддается естественной параметризации с помощью скалярной величины  $t$ , которую можно назвать «временем». Имея дело с такими кривыми, мы вполне можем (не опасаясь

ревнителей математической строгости) использовать термины «движения Пеано», «заполняющие плоскость движения», «движения, проходящие по всем плиткам» или просто «прохождения по плиткам» (о плитках и пертайлинге<sup>1</sup> мы поговорим позже в этой же главе). И мы не замедлим воспользоваться этими терминами, когда наступит подходящий момент; хочу только напомнить, что жанр эссе, согласно своей специфике, ни в коей мере не подразумевает полного освещения того или иного вопроса.

## КРИВЫЕ ПЕАНО В РОЛИ ЧУДОВИЩ

«*Все шатается и рассыпается!* Очень трудно передать словами тот эффект, который произвели результаты [Джузеппе] Пеано на все математическое сообщество. Такое ощущение, что кругом одни развалины, что все математические концепции внезапно потеряли всякий смысл» [573]. «[Движение Пеано] невозможно представить себе интуитивно; его можно понять лишь с помощью логического анализа» [190]. «Некоторые математические объекты — такие, например, как кривая Пеано — совершенно противоречат здравому смыслу. . . просто нелепы» [109].

## ИСТИННАЯ ПРИРОДА КРИВЫХ ПЕАНО

Я утверждаю, что приведенные цитаты лишь доказывают тот факт, что ни один из тех математиков так и не удосужился тщательно рассмотреть аккуратно построенную кривую Пеано. Кто-нибудь менее добродушный мог бы сказать, что эти цитаты демонстрируют полное отсутствие геометрического воображения.

Я также утверждаю, что после внимательного и непредвзятого изучения и осмысления терагонов Пеано становится весьма затруднительным *и дальше не видеть* связи между ними и разнообразными природными проявлениями. Эта глава посвящена кривым без самопересечений, т. е. кривым, терагоны которых *избегают* самокасаний. В главе 13 мы поговорим о кривых с *умеренным* числом самокасаний. Первыми на предмет устранения самокасаний следует рассмотреть терагоны, заполняющие решетку (например, прямые с целочисленными координатами, параллельные координатным осям).

## РЕКИ И ДРЕВОВИДНАЯ СТРУКТУРА ВОДРАЗДЕЛОВ

Изучая всевозможные терагоны Пеано, я обратил внимание на то, что каждый из них представляет собой некоторую комбинацию из двух

<sup>1</sup>Плитка, или черепица, по-англ. *tile*, отсюда термины «тайлинг» (*tiling*) — покрытие плоскости черепицей — и «пертайлинг» (*pertiling*). — *Прим. перев.*

*деревьев* (или двух скоплений деревьев), допуская бесконечное разнообразие конкретных интерпретаций. Особенно хорошо эти деревья видны на «прохождении снежинки» — кривой Пеано моего изобретения (см. рис. 105). Глядя на рисунок, мы легко можем представить себе, что там изображено, скажем, скопление кустарников, растущих из нижней трети снежинки Коха и взбирающихся по ее стенкам. Другому эта картинка может показаться похожей на нарисованную плохо очиненным карандашом карту бассейна какой-нибудь большой реки — многочисленные мелкие притоки сливаются в более крупные и в конце концов вливаются в главную реку, протекающую вдоль нижней трети снежинки. Из последней интерпретации немедленно следует, что кривые, отделяющие реки друг от друга, составляют в совокупности древовидный водораздел. Разумеется, реки и водоразделы могут меняться местами.

Какой бы простой и очевидной ни казалась эта *новая* водораздельно-речная аналогия, она оказалась возможной *только после* того, как мы перестали считать кривые Пеано чем-то заведомо патологическим. В самом деле, если мы хотим, чтобы древовидная структура, составленная из рек исчезающей ширины, собрала всю воду с некоторого участка, ей просто не остается ничего другого, как проникнуть во все точки этого участка. Всякий, кто отправится прогуляться по берегам всех рек данной системы, совершит заполняющее плоскость путешествие. Не верите? Спросите у любого ребенка!

Вооружившись интуицией, подкрепленной рис. 104, мы с легкостью обнаружим аналогичные сопряженные конструкции во всех терминах Пеано. Даже грубый остров с рис. 95 приобретает в этом свете некое осмысленное содержание. Пронизывающие его тонкие ленты воды нельзя принять за фьорды, как бы мы ни напрягали наше воображение, однако их вполне можно рассматривать как речную систему.

Когда из изучения рек вырастет настоящая наука, ее следует назвать *потамологией* — термин, созданный Морисом Парде из греческих корней *ποταμος* («река») и *λογος*. Однако, по трезвом размышлении, приходится признать, что изучение рек — это лишь часть более общей науки о воде, гидрологии, во владения которой на протяжении этого эссе мы еще не раз наведемся.

## НЕИЗБЕЖНЫЕ КРАТНЫЕ ТОЧКИ ДЕРЕВЬЕВ И, КАК СЛЕДСТВИЕ, ДВИЖЕНИЙ ПЕАНО

Неожиданно находят очевидное объяснение и многие математические свойства кривых Пеано. Чтобы объяснить кратные точки, предположим, что некто начинает движение вдоль берега реки, являющейся частью дерева рек Пеано, и движется вверх или вниз по течению, обходя даже самые маленькие притоки (причем чем уже приток, тем быстрее движение). Очевидно, что в конечном счете наш путешественник придет

в точку, которая находится на другом берегу напротив точки его отправления. А поскольку в пределе река бесконечно узка, то он по существу вернется в начальную точку. Таким образом, кратные точки на кривой Пеано представляются неизбежными не только с математически логической точки зрения, но и с позиций здравого смысла. Более того, эти точки *всюду плотны*.

Неизбежно также, что некоторые точки он посетит более чем дважды, так как в местах слияния рек совпадают по меньшей мере три береговых точки. Если все слияния ограничиваются только двумя реками, нет необходимости учитывать более чем тройную кратность. С другой стороны, если мы согласны иметь точки более высокой кратности, можно обойтись и без тройных точек.

Все утверждения, высказанные в предыдущих абзацах, доказаны, и, поскольку доказательства весьма деликатны и вызвали в свое время немало бурных дискуссий, сами свойства можно было бы, по всей видимости, отнести к «техническим подробностям». Если бы не одно «но». Кто теперь будет продолжать настаивать, что чисто логический подход к упомянутым свойствам имеет хоть какие-то преимущества перед моим интуитивным подходом, основанном на здравом смысле?

Как правило, реки Пеано представляют собой не стандартные фигуры, но фрактальные кривые. Это весьма удачно для нужд моделирования, так как все, что говорилось в главе 5 относительно неспрямляемости географических кривых, в полной мере касается и берегов рек. Больше того, среди приводимых Ричардсоном данных имеются сведения и о таких государственных границах, которые частично проходят по рекам и границам водоразделов. А в цитате из Штейнгауза [539] реки и вовсе упоминаются открытым текстом. Что касается водосборных бассейнов рек, то каждый из них может быть окружен замкнутой кривой, напоминающей береговую линию и составленной из участков границы водораздела. Бассейн любой крупной реки представляет собой совокупность бассейнов более мелких рек и притоков, вдоль и поперек исчерченную этими самыми реками и притоками, однако для исчерпывающего описания столь сложной на первый взгляд структуры нам необходимы всего лишь несколько заполняющих плоскость кривых, ограниченных кривыми фрактальными.

## ДВИЖЕНИЕ ПЕАНО И ПЕРТАЙЛИНГ

Возьмем оригинальную кривую Пеано (см. рис. 95) и представим величину  $t$  как число в системе исчисления с основанием  $N = 9$  вида  $0, \tau_1 \tau_2 \dots$ . Значения времени с одинаковым первым «знаком» после запятой отобразятся на одну и ту же девятую часть исходного квадрата, значения с одинаковым вторым «знаком» отобразятся на одну и ту же восемьдесят первую ( $9^2$ ) часть исходного квадрата и т. д. Таким образом,

покрытие отрезка  $[0, 1]$  отображается на покрытие квадрата. Последовательные девятые доли линейных плиток отображаются на последовательные подплитки плоскости. А свойство отрезка, именуемое пертайлинг, т. е. рекурсивная и бесконечная разбиваемость на меньшие плитки, подобные целому отрезку  $[0, 1]$ , отображается на аналогичное свойство квадрата. Различные движения Пеано, коими мы обязаны Э. Чезаро и Д. Пойа, отображают это свойство также и на всевозможные самоподобные покрытия треугольников.

В более общем смысле большинство движений Пеано порождают самоподобные покрытия плоскости. В простейшем случае существует некое основание  $N$ , и мы начинаем с линейного пертайлинга, заключающегося в последовательном разбиении целого на  $N$ -е доли. Однако прохождение снежинки, изображенное на рис. 104 и 105, подразумевает неравномерное разбиение интервала времени  $t$   $[0, 1]$  сначала на четыре подынтервала длиной  $1/9$ , затем на четыре подынтервала длиной  $1/9\sqrt{3}$ , один —  $1/9$ , два —  $1/9\sqrt{3}$  и два —  $1/9$ .

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ РАССТОЯНИЯ ПЛОЩАДЬЮ

Движения Пеано нередко подразумевают весьма деликатные взаимоотношения между длиной и площадью, в которых эти понятия подчас меняются местами. Особенно характерно это для *изометрического* движения, т. е. такого, при котором временной интервал  $[t_1, t_2]$  отображается на *площадь*, равную *длине*  $|t_1 - t_2|$ . (Большинству движений Пеано присущи одновременно и изометрия, и пертайлинг, однако эти два понятия не следует смешивать.) Называя отображение временного интервала  $[t_1, t_2]$  плоским *интервалом* Пеано, мы подразумеваем, что вместо измерения расстояний через изменение значения времени, можно измерять их непосредственно на площади. Здесь, правда, возникает одна весьма существенная сложность — точки, расположенные напротив друг друга на разных берегах реки, совпадают в пространстве, но посещаются в разные моменты времени.

Определение «расстояния Пеано» может включать в себя только порядок посещений. Обозначим моменты первых посещений точек  $P_1$  и  $P_2$  через  $t'_1$  и  $t'_2$ , а моменты последних посещений — через  $t''_1$  и  $t''_2$ . Тогда *левый интервал Пеано*  $\mathcal{L}\{P_1, P_2\}$  определяется как отображение интервала  $[t'_1, t'_2]$ , а *правый интервал Пеано*  $\mathcal{R}\{P_1, P_2\}$  — как отображение интервала  $[t''_1, t''_2]$ . Длины этих интервалов определяют *левое* и *правое расстояния* как  $|\mathcal{L}\{P_1, P_2\}| = |t'_1 - t'_2|$  и  $|\mathcal{R}\{P_1, P_2\}| = |t''_1 - t''_2|$ . Каждое из этих расстояний аддитивно, т. е. если расположить, скажем, три точки  $P_1, P_2$  и  $P_3$  в порядке их первых посещений, то мы получим

$$|\mathcal{L}\{P_1, P_3\}| = |\mathcal{L}\{P_1, P_2\}| + |\mathcal{L}\{P_2, P_3\}|.$$

Другие определения интервала и расстояния различают точки реки и точки водораздела. Обозначим через  $t'$  и  $t''$  моменты первого и последнего посещения точки  $P$ . Точка  $P$  считается *точкой реки*, если отображение интервала  $[t', t'']$  ограничено этой точкой и кривыми водораздела. Последовательные посещения точки  $P$  располагаются друг против друга на противоположных берегах реки. Точка  $P$  считается *точкой водораздела*, если отображение интервала  $[t', t'']$  ограничено этой точкой и реками.

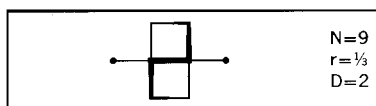
В случае, если кривая Пеано представлена как общая граница между деревом рек и деревом водоразделов, пути, соединяющие точки  $P_1$  и  $P_2$ , расположенные на противоположных берегах реки (т. е. вдоль водораздела), включают в себя наикратчайший общий путь. Представляется разумным при измерении расстояния между точками  $P_1$  и  $P_2$  следовать как раз этим путем. Если не считать некоторых исключений, размерность  $D$  как дерева рек, так и дерева водоразделов строго меньше 2 и строго больше 1. Следовательно, наикратчайший путь нельзя измерить ни длиной, ни площадью, однако в типичных случаях он имеет нетривиальную хаусдорфову протяженность в размерности  $D$ .

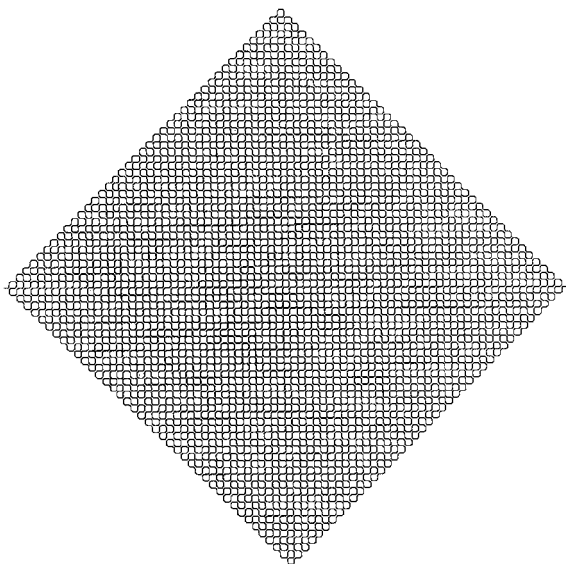
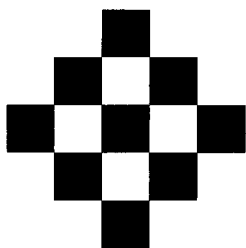
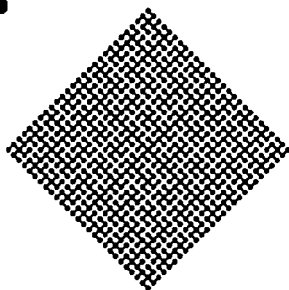
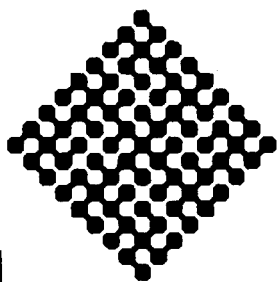
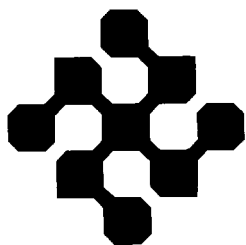
**И еще.** Очень важные дополнительные соображения относительно движений Пеано подробно изложены в пояснениях к нижеследующим рисункам. ■

### Рис. 95. КВАДРАТИЧНОЕ ПОСТРОЕНИЕ КОХА С РАЗМЕРНОСТЬЮ $D = 2$ : ОРИГИНАЛЬНАЯ КРИВАЯ ПЕАНО, ПРОХОЖДЕНИЕ КВАДРАТА

Заполняющая плоскость кривая Пеано, представленная на этом рисунке, является оригинальной кривой Пеано. Невероятно краткий алгоритм Джузеппе Пеано был графически воплощен в работе Мура [435] (которая получила, пожалуй, чрезмерно высокую оценку во «Фракталах» 1977 г.). На нашем рисунке кривая Пеано развернута на  $45^\circ$  — тем самым эта «блудная» конструкция оказывается возвращенной в лонно кривых Коха, т. е. теперь генератор всегда одинаково размещается на сторонах тетагона, полученного на предыдущем этапе построения.

Инициатором здесь выступает единичный квадрат (черный внутри), а генератор выглядит следующим образом:





Поскольку генератор — самокасающаяся кривая, получаемые в результате построения конечные острова Коха представляют собой скопления черных квадратов, словно вырезанных из бесконечной шахматной доски. После  $n$ -го этапа построения терагон Коха выглядит как решетка из прямых с шагом  $\eta = 3^{-n}$ ; эта решетка заполняет квадрат, площадь которого равна 2, причем плотность линий быстро возрастает по мере того, как  $k \rightarrow \infty$  (вполне достаточный пример этого однообразного узора показан на рисунке рядом с исходным черным квадратом).

На трех верхних картинках двусмысленность самокасаний устранена путем срезания соответствующих углов с сохранением общей площади.

Если четвертый этап построения данной кривой изобразить в том же масштабе, то мы увидим лишь сплошной серый фон, однако увеличенное изображение одной четвертой части, получающейся в результате береговой линии, вполне можно проследить взглядом (рискуя, правда, заработать при этом морскую болезнь). Глядя на этот рисунок, понимаешь, что люди имеют в виду, когда говорят, что предельная кривая Коха заполняет плоскость.

Было бы замечательно, если бы мы смогли определить в этом случае предельный остров по аналогии с островами Коха в главе 6, однако здесь это, к сожалению, невозможно. Любая выбранная наугад точка почти наверняка будет бесконечно колебаться между сушей и морем. Терагоны на поздних этапах построения пронизаны бухтами или реками настолько глубоко и однородно, что суша и вода делят любой квадрат среднего размера  $x$  (такого, что  $\eta \ll x \ll 1$ ) практически пополам!

**Интерпретация.** Предельная кривая Пеано устанавливает непрерывное соответствие между прямой и плоскостью. Математическая неизбежность самокасаний — классический результат. Новым является тот факт, что самокасания играют важную роль в моделировании природных феноменов.

**Дальний порядок.** Не зная о нисходящих каскадах, ответственных за построение наших конечных кривых Пеано, можно только изумиться тому необычайному дальнему порядку, который позволяет этим кривым избегать не только самопересечений, но и самокасаний. Что касается последнего, то весь порядок вообще держится только на жесточайшей дисциплине: малейшее послабление — и все насмарку!

◁ А если совсем позабыть о дисциплине, то мы почти наверняка не получим ничего, кроме бесконечно повторяющихся самопересечений, поскольку полностью недисциплинированная кривая Пеано — это броуновское движение, о котором мы уже упоминали во второй главе и поговорим подробнее в главе 25.

◁ **Теорема Лиувилля и эргодичность.** В механике принято представлять состояние сложной системы одной-единственной точкой



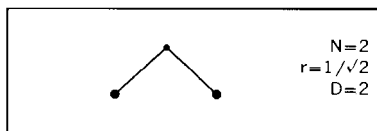
в «фазовом пространстве». Известно, что в случаях применения к этому пространству уравнений движения каждая его область ведет себя следующим образом: ее протяженность (гиперобъем) остается инвариантной (теорема Лиувилля), однако ее форма меняется — область рассеивается и заполняет весь доступный объем с максимально возможной однородностью. Очевидно, что оба этих свойства находят отражение в том, как, с нашей легкой руки, ведет себя черный квадрат при построении кривой Пеано. Представляется интересным «копнуть» глубже и увидеть, что во многих упрощенных «динамических» системах, допускающих подробное изучение, каждая область рассеивается, трансформируясь во все удлиняющуюся и утончающуюся ленту. Интересно также было бы выяснить, не происходит ли дисперсия других систем по древовидным кривым Пеано вместо лент. ►




---

**Рис. 98 и 99. КВАДРАТИЧНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ КОХА  
С РАЗМЕРНОСТЬЮ  $D = 2$ : ПРОХОЖДЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА  
ПО ЧЕЗАРО И ПО ПОЙА И ИХ ВАРИАНТЫ**

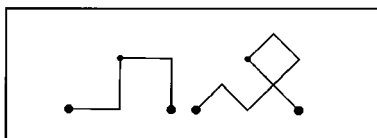
Простейшим генератором, какой только можно в этом случае вообразить, является ломаная, состоящая из  $N = 2$  равных отрезков, угол  $\theta$  между которыми удовлетворяет условию  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ . В предельном случае  $\theta = 180^\circ$  генератор представляет собой отрезок прямой; случай  $\theta = 120^\circ$  (проиллюстрированный в пояснении к рис. 71) порождает (помимо прочих) троичную кривую Коха. Генератор для предельного случая  $\theta = 90^\circ$  показан ниже:



Используя этот генератор, можно построить невообразимое множество различных кривых Пеано (различия обусловлены формой инициатора и способом помещения генератора на предшествующий терагон). На рис. 98–102 дано несколько примечательных примеров.

◁ Кроме того, в главе 25 с помощью рандомизации всех кривых Пеано с данными  $N$   $r$  мы получим самое что ни на есть броуновское движение. ►

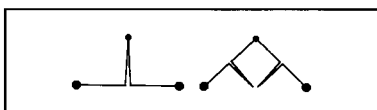
**Прохождение треугольника по Пойа.** Инициатор — отрезок  $[0, 1]$ , генератор — как на рисунке вверху. Генератор поочередно занимает правое и левое положение относительно терагона, причем его положение относительно начального отрезка (правое или левое) также поочередно меняется. Ниже показаны третий и четвертый этапы построения:



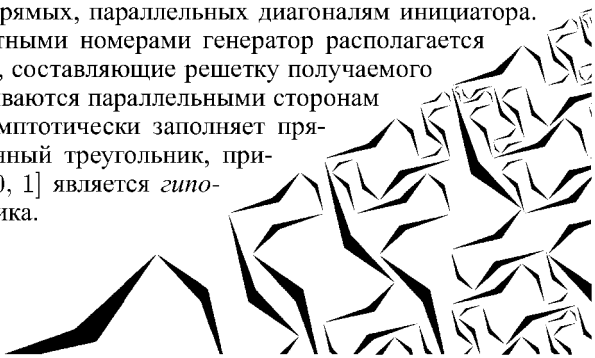
Терагоны напоминают квадратные куски диаграммной бумаги, запихнутые внутрь прямоугольного равнобедренного треугольника, один из *катетов* которого и есть исходный отрезок  $[0, 1]$ . Предельная кривая проходит по всей внутренней области треугольника.

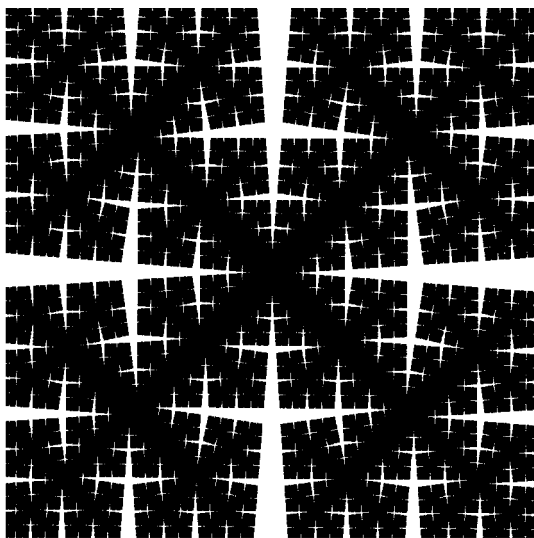
**Рис. 98. Прохождение Пойя по прямоугольному неравностороннему треугольнику.** Изменим генератор таким образом, чтобы он состоял из двух неравных отрезков, расположенных под прямым углом друг к другу. Читателю (в качестве упражнения) остается лишь придумать, как в этом случае построить кривую, избегающую самокасааний.

**Прохождение треугольника по Чезаро.** Инициатор — отрезок  $[0, 1]$ , генератор — тот же, что и для прохождения по Пойа. Два следующих этапа построения приведены ниже (для большей ясности построения угол  $\theta$  на рисунке равен  $85^\circ$  вместо  $\theta = 90^\circ$ ).



То есть на всех этапах с нечетными номерами генератор располагается справа от кривой; получаемый в результате терагон представляет собой решетку из прямых, параллельных диагоналям инициатора. На всех же этапах с четными номерами генератор располагается слева от кривой; прямые, составляющие решетку получаемого при этом терагона, оказываются параллельными сторонам инициатора. Кривая асимптотически заполняет прямоугольный равнобедренный треугольник, причем исходный отрезок  $[0, 1]$  является *гипотенузой* этого треугольника.





**Рис. 99.** На рисунке изображено прохождение квадрата, полученное соединением двух прохождений Чезаро с инцидаторами  $[0, 1]$  и  $[1, 0]$ . (И здесь угол  $\theta = 90^\circ$  заменен углом  $\theta = 85^\circ$  для ясности построения.)

**Самоперекрытие.** Каждый отрезок в решетках, покрываемых тетагонами Чезаро, покрывается *дважды*. Конструкция содержит не только самокасания, но и самоперекрытия.

**«Эффективность» заполнения плоскости. Одно экстремальное свойство расстояния Пеано – Чезаро.** Кривая Пеано с рис. 95 отображает отрезок  $[0, 1]$  на квадрат с диагональю  $[0, 1]$  и площадью  $1/2$ . Такая же фигура покрывается и кривой Пойа. Однако кривая Чезаро заполняет всего лишь прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой  $[0, 1]$  и площадью  $1/4$ . Для того, чтобы покрыть весь квадрат, необходимо отобразить по Чезаро два отрезка,  $[1, 0]$  и  $[0, 1]$ . Таким образом, из двух рассматриваемых кривых кривая Чезаро оказывается менее «эффективной». Более того, кривая Чезаро вообще самая «неэффективная» кривая Пеано без самопересечений на квадратной решетке. Однако благодаря этому обстоятельству, она — видимо, в качестве компенсации — обладает одним замечательным свойством: левое или правое расстояния Пеано (см. с. 93) между точками  $P_1$  и  $P_2$  оказывается большим или равным квадрату евклидова расстояния между этими точками:

$$|\mathcal{L}\{P_1, P_2\}| \geq |P_1 P_2|^2; \quad |\mathcal{R}\{P_1, P_2\}| \geq |P_1 P_2|^2.$$

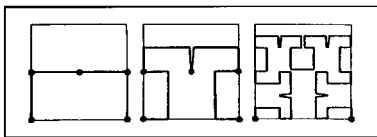
Для других кривых Пеано разница между расстоянием Пеано и евклидовым расстоянием может быть как положительной, так и отрицательной.

**Задача Какутани – Гомори.** Какутани (источник – частная беседа) предлагает выбрать  $M$  точек  $P_m$  внутри единичного квадрата  $[0, 1]^2$  и рассмотреть выражение  $\inf \sum |P_m P_{m+1}|^2$ , в котором инфимум вычисляется по всем линиям, соединяющим точки  $P_m$  последовательно. Он доказывает, что  $\inf \leq 8$ , но полагает, что этот предел не является наилучшим. В самом деле, Р. Э. Гомори сообщает (источник – частная беседа), что он получил уточненный предел  $\inf \leq 4$ . При доказательстве Гомори использует кривую Пеано–Чезаро следующим образом: (А) добавим к множеству точек  $P_m$  угловые точки квадрата, если они этому множеству еще не принадлежат; (В) расположим  $M$  точек  $P_m$  в порядке их первых посещений последовательностью из четырех кривых Пеано–Чезаро, построенных внутри квадрата вдоль его сторон; (С) убедимся, что удлинение цепочки на этапе (А) не повлекло за собой уменьшения  $\sum |P_m P_{m+1}|^2$ ; (D) убедимся, что каждое слагаемое  $|P_m P_{m+1}|^2$  не уменьшается при замене его на  $|\mathcal{L}(Z_m, Z_{m+1})|$ ; (E)  $\sum |\mathcal{L}(Z_m, Z_{m+1})| = 4$ . При использовании других кривых Пеано этапы (В) и (D) следует исключить. ■

## Рис. 101 и 102. ПРОХОЖДЕНИЯ КВАДРАТА И ДРАКОНА

Генератор здесь тот же, что и для предыдущих кривых, однако незначительные, на первый взгляд, изменения в других правилах оказывают значительное влияние на результат.

**Прохождение квадрата по Пеано, более поздний вариант.** Инициатор – отрезок  $[0, 1]$ , а второй, четвертый и шестой этапы построения выглядят следующим образом:



**Эффективность. Экстремальное свойство.** Эта кривая заполняет область, площадь которой равна 1, тогда как кривые на рис. 98 и 99, а также кривая дракона, которую мы рассмотрим ниже, покрывают лишь  $1/2$  или  $1/4$ . Если терагоны лежат на прямоугольной решетке,

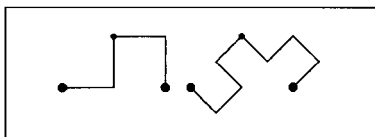
покрываемая ими область не может превышать 1. Этого максимума она достигает лишь в случае трапегонов без самопересечений. Иными словами, отсутствие самокасаний важно не только с эстетической точки зрения, а самокасающаяся кривая со срезанными точками самокасаний (как на рис. 95) *не становится* от этого эквивалентной кривой Коха без самопересечений.

Взяв только нечетные этапы построения данного прохождения квадрата и соединив средние точки последовательных отрезков трапегонов (чтобы избежать самокасаний), мы возвратимся к кривой Пеано, вариант Гильберта.

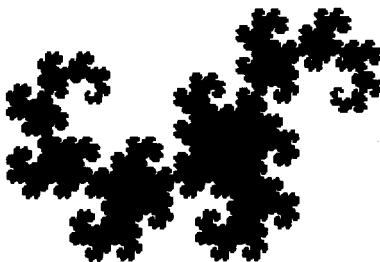
**Рис. 102. Кривая, заполняющая прямоугольную трапецию.**

Изменим генератор таким образом, чтобы он представлял собой ломаную, составленную из двух неравных отрезков под прямым углом друг к другу. Избегающее самопересечений построение аналогично построению кривой на предыдущем рисунке.

**Дракон Хартера – Хейтуэя.** (См. [162] и [95].) Инициатор — отрезок  $[0, 1]$ , генератор — как в начале пояснения к рис. 98. Генератор поочередно занимает правое и левое положение относительно трапегона. Единственное отличие от построения прохождения треугольника по Пойа заключается в том, что на всех этапах построения генератор помещается справа от начального отрезка кривой. Ниже показаны третий и четвертый этапы построения:



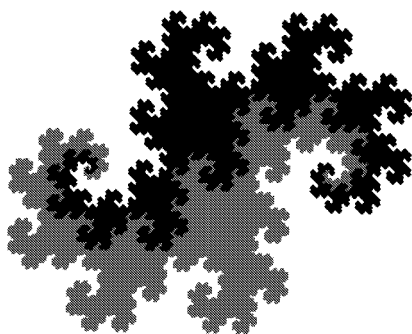
Последствия этого незначительного изменения выглядят весьма впечатляюще:



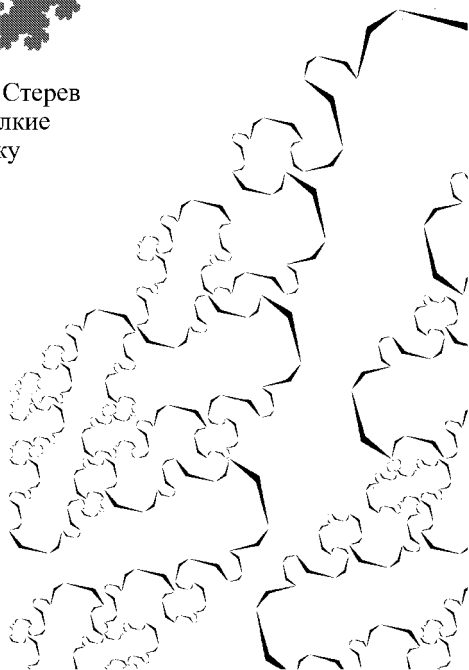
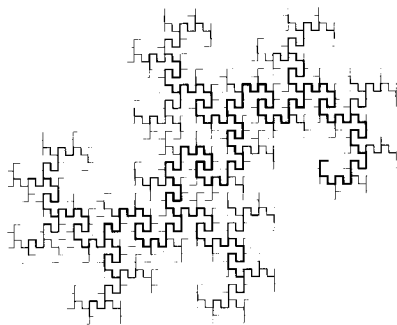
На этой иллюстрации нельзя различить саму кривую, мы видим лишь ее границу, которая называется *кривой дракона*. Таким образом, эта кривая

Пеано имеет полное право называться *прохождением дракона*. Как и любая другая кривая Коха, инициатором которой служит отрезок  $[0, 1]$ , дракон самоподобен. Кроме того, отчетливо видно, что дракон разделен на части, соединяющиеся между собой тонкими переходами. Эти части подобны друг другу, но не целому дракону.

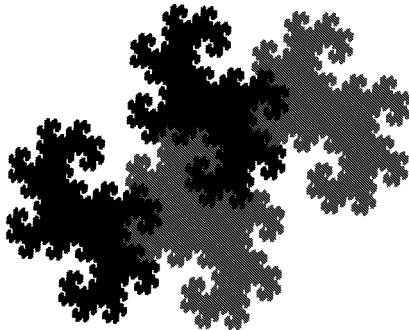
**Двойной дракон.** Во «Фракталах» 1977 года отмечалось, что при таких «драконовских» правилах построения данной кривой более естественным инициатором представляется последовательность отрезков  $[0, 1]$  и  $[1, 0]$ . Фигуру, которую в итоге заполняет кривая, я назвал *двойным драконом*. Эта фигура получила числовое представление в [272]. Выглядит она вот так (один дракон — черный, другой — серый):



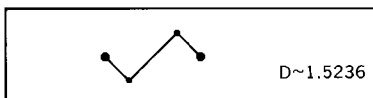
**Река двойного дракона.** Стерев (ради удобства рассмотрения) мелкие притоки, получим древовидную реку двойного дракона:



Двойного дракона можно разбить на его уменьшенные подобия:



**Шкура двойного дракона.** Шкура представляет собой кривую Коха со следующим генератором:

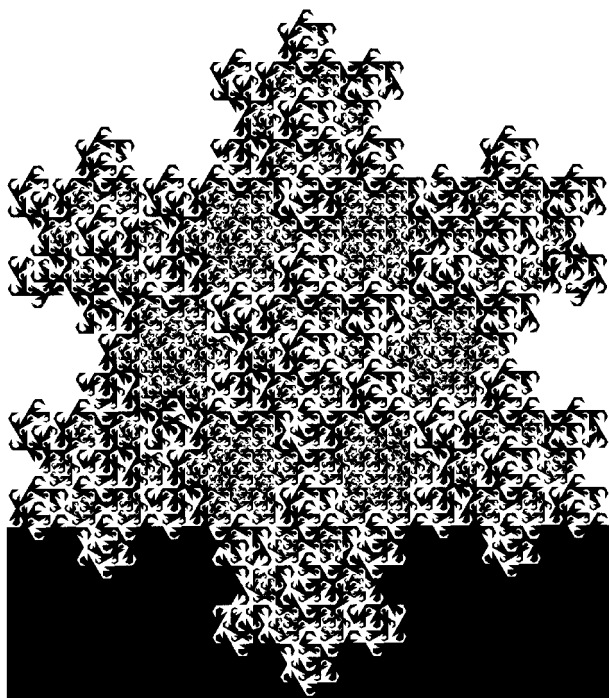


Размеры длинного и короткого отрезков составляют соответственно  $r_1 = 1/\sqrt{2}$  и  $r_2 = (1/2)/(\sqrt{2}) = r_1^3$ . Следовательно, генерирующая размерность функция имеет вид  $(1/\sqrt{2})^D + (1/2\sqrt{2})^D = 1$ , а величина  $x = 2^{D/2}$  удовлетворяет  $x^3 - x^2 - 1 = 0$ .

**Другие драконы.** (См. [95].) Возьмем некоторую бесконечную последовательность  $x_1, x_2, \dots$ , где каждый  $x_k$  может быть либо 0, либо 1, и воспользуемся значением  $x_k$  для определения положения генератора при начальном отрезке на  $k$ -м этапе построения: если  $x_k = 1$ , то первый генератор расположен справа, если же  $x_k = 0$ , то первый генератор расположен слева. Каждая такая последовательность породит нового дракона. ■

**Рис. 104 и 105. ПРОХОЖДЕНИЯ СНЕЖИНОК: НОВЫЕ КРИВЫЕ И ДЕРЕВЬЯ ПЕАНО (РАЗМЕРНОСТЬ ВОДОРАЗДЕЛОВ И РЕК  $D \sim 1,2618$ )**

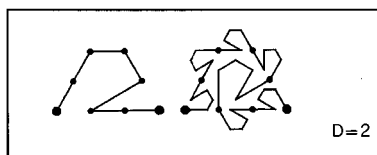
На этих иллюстрациях представлено семейство кривых Пеано моего собственноручного изготовления. Они заполняют оригинальную снежинку Коха (см. рис. 74); тем самым оказываются сведены нос к носу два главных чудовища начала века.



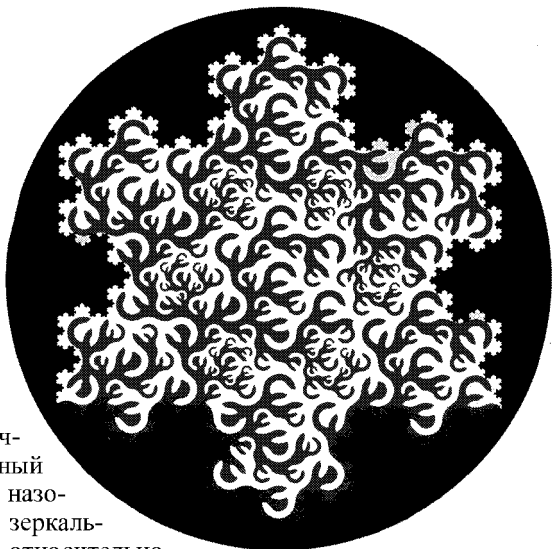
Более важное их достоинство заключается в том, что одного взгляда на них достаточно для подтверждения справедливости одного из основных положений настоящего эссе: кривые Пеано ни в коем случае не являются математическими чудовищами, не допускающими никакой конкретной интерпретации. При отсутствии самокасаний кривые Пеано дают ясно видимую и легко интерпретируемую картину скопления сопряженных деревьев. Эти деревья представляют собой хорошие модели первого порядка для рек, водоразделов, настоящих деревьев и кровеносной системы человека.

Ко всему прочему, мы получаем здесь и замечательный побочный продукт: способ разбиения снежинки на меньшие неравные снежинки.

**Семизвенный генератор.** Инициатор остается неизменным  $[0, 1]$ , а генератор и второй этап построения выглядят следующим образом:





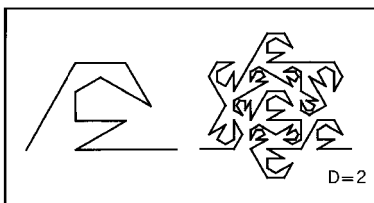


Чтобы быть более точными, обозначим изображенный выше генератор буквой  $S$  и назовем его прямым. Определим зеркальное отражение генератора  $S$  относительно прямой  $x = 1/2$  как обратный генератор  $F$ . На любом этапе построения прохождения снежинки можно использовать как  $S$ -, так и  $F$ -генераторы, на выбор. То есть каждая бесконечная последовательность символов  $S$  и  $F$  даст в результате новую кривую, заполняющую снежинку.

**Сглаженные терагоны.** Ломаные линии выглядят несколько грубовато, но вот если представить каждый отрезок в виде дуги в одну шестую окружности, то заполняющие снежинку терагоны будут выглядеть изотропными и вообще гораздо более «естественными».

**Рис. 74.** Давным-давно, еще на рис. 74, мы использовали продвинутый терагон семизвенного прохождения снежинки, сглаженного и закрасненного, для заполнения озера волнующейся водой. Теперь, когда мы снова рассматриваем эту картину, она ассоциируется у нас с жидкостью, текущей вдоль фрактальной границы, причем хорошо различимы два приблизительно параллельных потока, движущиеся с различными скоростями.

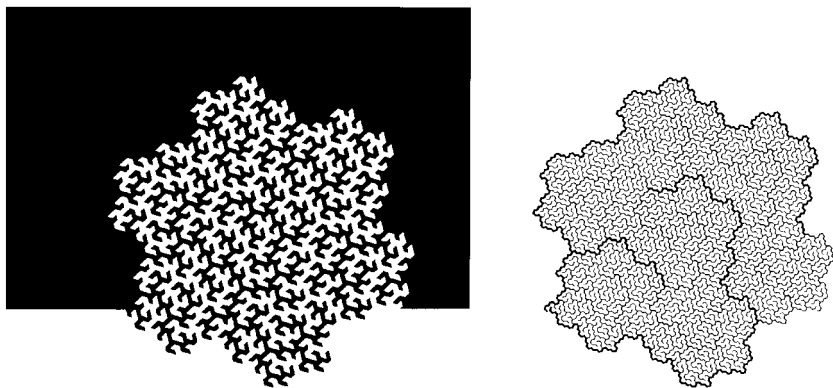
**Тринадцатизвенный генератор.** Изменим предыдущий генератор, состоящий из семи отрезков, заменив его пятое звено на уменьшенную копию всего генератора. Эта копия также может иметь  $S$ - и  $F$ -варианты. В последнем случае получим следующие генератор и второй этап построения:



**Рис. 104.** Этот продвинутый терагон, изображенный в виде границы между двумя причудливо переплетенными областями, лучше всяких слов объясняет значение термина «заполнение плоскости».

**Рис. 105.** Сгладим построенный выше 13-звенный генератор. Сгладим также и снежинку Коха. Первые этапы получаемого в результате построения приведены на рис. 105.

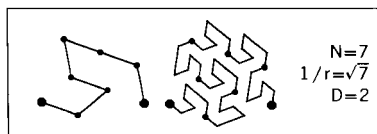
**Размерности рек.** Каждая отдельная река в оригинальной кривой Пеано имеет конечную длину и, как следствие, размерность 1. В данном случае размерность отдельных рек равна  $\ln 4 / \ln 3$ . Для достижения размерности 2, все реки нужно рассматривать в совокупности.

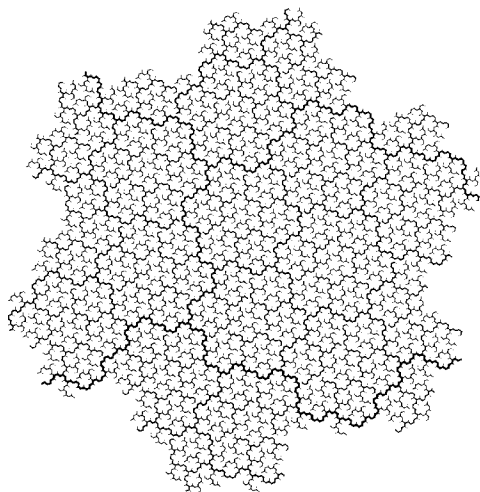
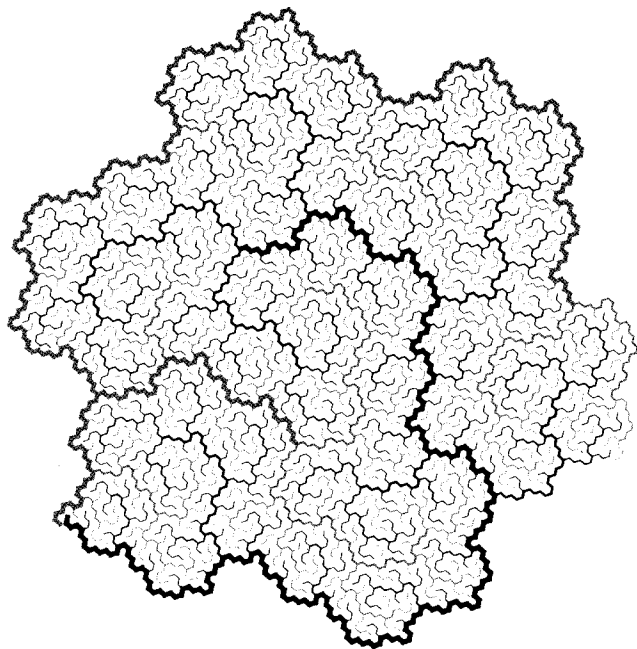


**Рис. 106 и 107. КРИВАЯ ПЕАНО – ГОСПЕРА. ЕЕ ДЕРЕВЬЯ И АНАЛОГИЧНЫЕ ДЕРЕВЬЯ КОХА (РАЗМЕРНОСТЬ ВОДОРАЗДЕЛОВ И РЕК  $D \sim 1,1291$ )**

**К рис. 75.** На этом рисунке не получившие в свое время объяснения тонкие ломаные линии представляют собой начальные этапы построения (с 1-го по 4-й) кривой Пеано в интерпретации Госпера (см. [163]). Это — первая кривая Пеано без самопересечений, полученная только методом Коха, без дальнейшей доработки.

Инициатор — отрезок  $[0, 1]$ . Генератор —





Если развернуть генератор против часовой стрелки так, чтобы его первое звено заняло горизонтальное положение, то становится видно, что он является частью треугольной решетки, занимая на ней 7 из  $3 \times 7$  звеньев. Благодаря этой особенности треугольные решетки приобретают свойство, аналогичное описанному на с. 101 свойству квадратных решеток.

Теперь мы можем убедиться в том, что данная кривая Пеано действительно заполняет фигуру, ограниченную кривой Коха на рис. 75. Линия переменной толщины внутри кривой Коха на рис. 75 представляет собой результат пятого этапа настоящего построения.

**Рис. 106, слева.** Четвертый терагон кривой Госпера, перерисованный в виде границы между черной и белой областями.

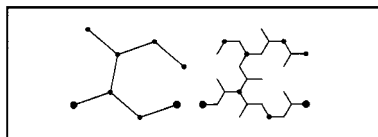
**Рис. 106, справа. Деревья рек и водоразделов.** Изображены реки и водоразделы, проходящие по средним линиям черных и белых «пальцев» кривой, показанной на этом же рисунке слева.

**Рис. 107, вверху.** Мы взяли древовидную структуру рек и водоразделов, показанную на рис. 106 справа, и привели толщину линий в соответствие с их относительной значимостью в схеме Хортон–Штралера (см. [297]). В настоящем примере каждой кривой (и рекам, и водоразделам) назначается ширина, пропорциональная ее длине по прямой. Реки даны черным, водоразделы — серым.

**Размерности.** Каждая кривая Пеано определяет размерность  $D$  собственной границы. На рис. 95 и 98 указанная граница представляет собой просто квадрат. На последующих рисунках появляются драконова шкура и кривая-снежинка. Здесь же мы имеем дело с фрактальной кривой, размерность которой  $D \sim 1,1291$  и которая состоит отчасти из рек, отчасти из водоразделов. Все другие реки и водоразделы сходятся к кривой с фрактальной размерностью  $D = 1,1291$ .

**Франция.** Тому, кто, будучи школьником, часто разглядывал карту бассейнов Луары и Гаронны, наши иллюстрации наверняка о многом напомнят.

**Рис. 107, внизу. Дерево рек, построенное непосредственно с помощью каскада Коха.** Когда сам генератор имеет древовидную структуру, он порождает при построении дерево. Пусть, например, генератор выглядит вот так:



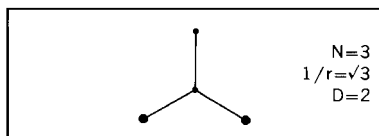
Получаем еще один способ осушения внутренней области кривой Коха с рис. 75. (Ветви, расположенные у самых «истоков», были обрезаны.)



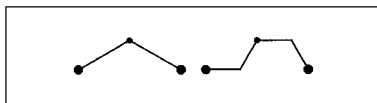
## Рис. 109 и 110. ЗАПОЛНЯЮЩИЕ ПЛОСКОСТЬ ФРАКТАЛЬНЫЕ ДЕРЕВЬЯ, ПЕРЕКОШЕННАЯ СНЕЖИНКА И КВАРТЕТ

Заполняющие плоскость «речные» деревья, получаемые из некоторых кривых Пеано, могут быть получены и с помощью прямого рекурсивного построения. Ключом здесь служит генератор, который сам имеет древовидную форму. Простейший и скучнейший пример: генератор составлен из четырех отрезков, образующих фигуру, похожую на знак «+». В результате построения получим речное дерево кривой Пеано–Чезаро (см. рис. 99).

**Перекошенная снежинка.** Более интересного результата можно достичь, взяв в качестве инициатора отрезок  $[0, 1]$ , а в качестве генератора — следующую фигуру:

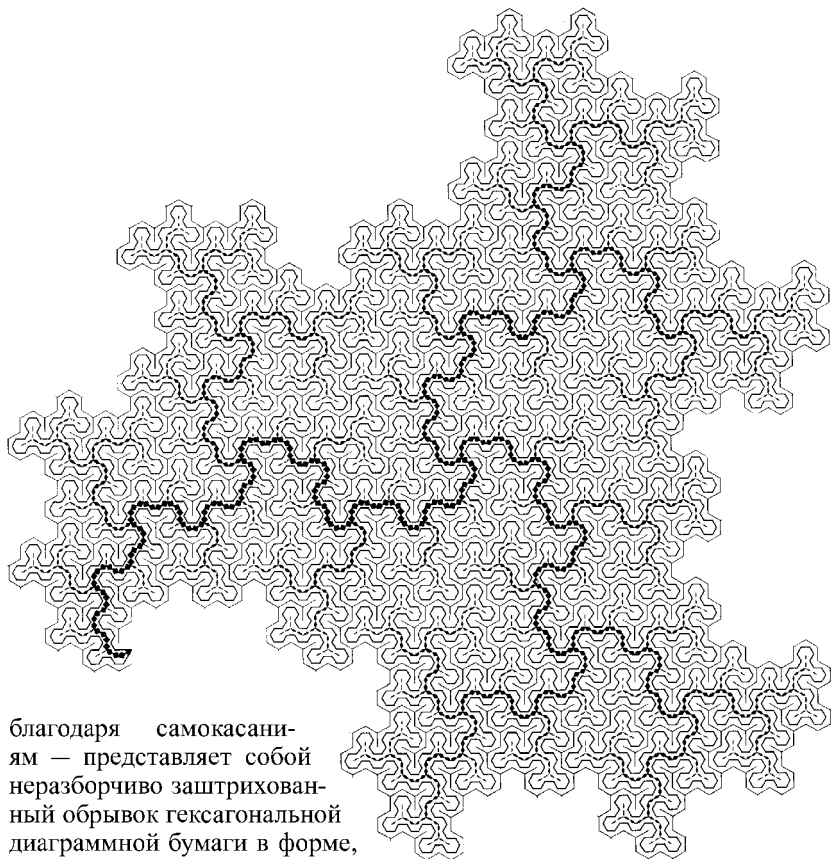


Для начала обратим внимание на то, что отдельные реки порождаются генератором, который смещает среднюю точку отрезка (таким, например, как на рис. 71). Следовательно, всякая асимптотическая река имеет размерность  $D = \ln 2 / \ln \sqrt{3} = \ln 4 / \ln 3$ . Это значение хорошо знакомо нам еще по снежинке Коха, однако кривая, которой мы намерены заняться теперь, — не снежинка, поскольку размещение генератора на прямолинейных отрезках следует иному правилу.



Если мы хотим, чтобы осталось место для рек, необходимо, чтобы положение генератора с каждым отрезком менялось с правого на левое и наоборот. Таким образом симметрия снежинки искажается, а новая область для заполнения реками заслуживает себе имя — *перекошенная снежинка*.

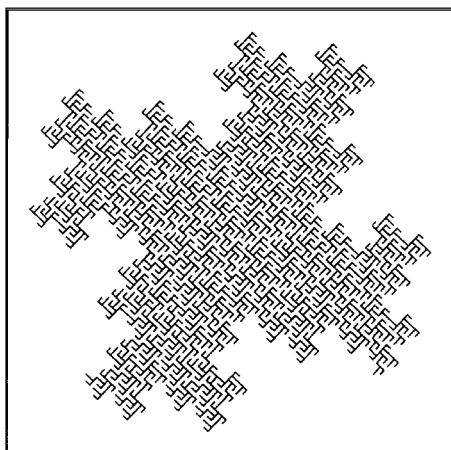
Вернемся к дереву рек. Его терагоны не перекрывают сами себя, но самокасааний здесь очень много. Неизбежен — и даже напрашивается — асимптотический вариант этой особенности, поскольку он вполне верно отражает тот факт, что иногда несколько рек начинаются в одной точке. Как мы увидим чуть позже, речные терагоны *могут* и вовсе обходиться без самокасааний. Рассматриваемый же речной терагон — как раз



благодаря самокасаниям — представляет собой неразборчиво заштрихованный обрывок гексагональной диаграммной бумаги в форме, близкой фрактальной кривой.

**Рис. 110,верху.** Речное дерево станет более явным, если стереть все участки реки, соприкасающиеся с истоком, и изобразить главную реку более жирной линией. Площадь бассейна такой реки составляет  $\sqrt{3}/2 \sim 0,8660$ .

**Прохождение перекосенной снежинки.** Построим кривую Пеано, инициатор которой имеет форму равностороннего треугольника, а генератор представляет собой

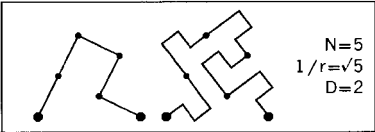


ломаную линию, звенья которой равны и расположены под углом в  $60^\circ$  друг к другу. Это — крайний случай при  $M = 3$  из семейства генераторов, использованных при построении кривых на рис. 75 и 76, причем он значительно отличается от остальных случаев этого семейства. Подробнее см. в [95].

Можно легко убедиться, что дерево рек этой кривой Пеано совпадает с деревом, которое мы только что получили с помощью прямого построения. Длина стороны инициатора равна 1, а площадь, заполняемая соответствующей кривой Пеано, составляет  $\sqrt{3}/6 \sim 0,2886$  (очень неэффективно!).

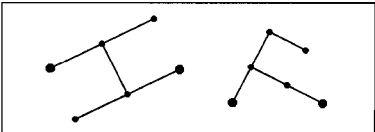
**Квартет.** Теперь рассмотрим другую кривую Коха вместе с тремя кривыми, заполняющими ее: одной кривой Пеано и двумя деревьями. Эти придуманные мною фигуры иллюстрируют еще одну весьма интересную тему.

Инициатором снова будет отрезок  $[0, 1]$ , а генератор выглядет следующим образом:



Граница заполняемой области стремится в пределе к кривой Коха с размерностью  $D = \ln 3 / \ln \sqrt{5} = 1,3652$ . Продвинутые терагоны границы и кривой Пеано составляют центр рис. 79; я назвал эту фигуру *квартетом*. Каждый «игрок», равно как и стол между ними, способен к самоподобному разбиению плоскости.

Внутренняя область квартета заполняется, конечно же, и его собственным деревом рек. Однако если воспользоваться каким-либо из следующих генераторов, можно получить совершенно другие варианты заполнения:



Терагоны, построенные с использованием левого генератора, демонстрируют самокасания (как и кривые в первом примере данного пояснения). Заполняемая площадь составляет  $1/2$ . Правый генератор позволяет терагонам *избежать* самокасаний, и заполняемая площадь увеличивается до 1. На рис. 110 (внизу) показан один из продвинутых терагонов такой кривой.



## 8 ◊ ФРАКТАЛЬНЫЕ СОБЫТИЯ И КАНТОРОВА ПЫЛЬ

Основная цель этой главы — по возможности безболезненное — но достаточно подробное — ознакомление читателя с еще одним математическим объектом из тех, что обычно рассматриваются как патологические, — с канторовой пылью,  $C$ . Фрактальная размерность канторовой пыли и других родственных ей пыльных структур, которые мы здесь рассмотрим, находится в интервале от 0 до 1.

Так как эти структуры образованы точками на прямой, их сравнительно легко изучать. Кроме того, с их помощью можно в наипростейшей форме представить некоторые понятия, занимающие центральное место в теории фракталов, но настолько редко применявшиеся в прошлом, что для их обозначения даже не было придумано терминов. Начнем с термина «пыль», который теперь приобретает специальный смысл как неформальный эквивалент термина «множество, топологическая размерность  $D_T$  которого равна 0» (так же, как «кривая» и «плоскость» означают множества, топологическая размерность которых равна, соответственно, 1 и 2). Другие новые термины — такие, например, как *творог*, *пауза* и *трема* — будут объяснены ниже.

### ШУМ

Обычный человек называет шумом звук, который либо слишком силен, либо не имеет подходящего ритма или ясной цели, либо просто мешает слушать более приятные звуки. Парtridge [463] заявляет, что слово «шум»<sup>1</sup> «происходит от латинского *nausea* «тошнота» (родственного латинскому же *nautes* «моряк»); можно легко проследить семантическую связь, представив себе звуки, издаваемые толпой пассажиров древнего корабля, попавшего в бурю». («Оксфордский словарь английского языка», похоже, имеет на этот счет другое мнение.) Что до современной физики, то она определяет термин «шум» (менее живописно и далеко не так точно) как синоним случайных флуктуаций или ошибок независимо от их происхождения или проявлений. Канторова пыль  $C$  в этой главе вводится через изучение прецедента, а в роли прецедента выступает несколько эзотерический, но довольно простой шум.

<sup>1</sup> Англ. *noise*. — Прим. перев.



## ОШИБКИ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Канал передачи — это некая физическая система, способная передавать электрический сигнал. Однако электрический ток, к сожалению, не свободен от спонтанных шумов. Качество передачи зависит от вероятности возникновения ошибок, обусловленных шумовыми искажениями, которые, в свою очередь, зависят от отношения интенсивности сигнала и шума.

В этой главе мы будем говорить о каналах, по которым данные передаются между компьютерами и используются чрезвычайно сильные сигналы. Интересная особенность заключается в том, что сигнал дискретен; следовательно, распределение шумов донельзя упрощается распределением ошибок. Шум представляет собой некую функцию, которая может иметь множество значений, в то время как функция ошибок может иметь только два возможных значения. В ее роли может выступать, скажем, характеристическая функция, которая при отсутствии ошибок в некий момент времени  $t$  равна 0, а при наличии ошибки принимает значение 1.

Физики уже разобрались в структуре шумов, которые преобладают в случае слабых сигналов (тепловой шум, например). Однако в вышеописанной задаче сигнал настолько силен, что классическими шумами можно пренебречь.

Что касается тех шумов, которыми пренебречь нельзя, — *избыточных шумов* — они сложны и захватывающи, потому что о них почти ничего не известно. Мы рассмотрим один такой избыточный шум, который приблизительно в 1962 году настолько заинтересовал инженеро-электриков, что для его изучения потребовалась помощь различных специалистов в других областях. Я также внес свой скромный вклад в общее дело — занимаясь именно этой конкретной практической задачей, я впервые ощутил нужду во фракталах. Никто в то время даже отдаленно не представлял себе, насколько далеко заведет нас тщательное изучение этой, казалось бы незначительной, инженерной проблемы.

## ПАКЕТЫ И ПАУЗЫ

Подвергнем ошибки анализу с постепенно возрастающей точностью. Грубый анализ показывает наличие периодов, во время которых не зарегистрировано ни одной ошибки. Условимся называть эти периоды затишья «паузами нулевого ранга», если их длительность превышает один час. Любой временной промежуток, ограниченный с обеих сторон паузами нулевого ранга, назовем «пакетом ошибок нулевого ранга». Увеличив точность анализа в три раза, мы увидим, что исходный пакет также «прерывист». То есть более короткие паузы «первого ранга» длительностью 20 мин или больше перемежаются более короткими па-

кетами «первого ранга». Аналогично, каждый из последних содержит несколько пауз «второго ранга» длительностью 400 с, разделяющих пакеты «второго ранга» и т.д.; каждый этап основывается на паузах и пакетах, в три раза более коротких, чем предыдущие. Грубую иллюстрацию этого процесса можно видеть на рис. 120. (На пояснение пока внимания не обращайте.)

Предыдущее описание предполагает существование такого понятия, как относительное расположение пакетов  $k$ -го ранга внутри пакета  $k - 1$ -го ранга. Распределение вероятностей этих относительных расположений, по всей видимости, не зависит от  $k$ . Очевидно, такая инвариантность говорит о самоподобии, а там и до фрактальной размерности недалеко, однако не будем спешить. Рассмотрения различных прецедентов, содержащиеся в настоящем эссе, нацелены, помимо прочего, как на обнаружение нового, так и на уточнение старого. Исходя из этих соображений, представляется оправданным несколько изменить исторический порядок и представить новое с помощью грубого неслучайного варианта стохастической модели ошибок Бергера – Мандельброта (см. главу 31).

## ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ПАКЕТОВ ОШИБОК: ФРАКТАЛЬНАЯ КАНТОРОВА ПЫЛЬ $C$

В предыдущем разделе мы предприняли попытку построить множество ошибок, начав с прямой линии, представляющей временную ось, и вырезая все уменьшающиеся свободные от ошибок паузы. Возможно, для естественных наук такая процедура и внове, однако в чистой математике она используется довольно давно — по меньшей мере, со времен Георга Кантора (см. [207], особенно с. 58).

У Кантора (см. [62]) инициатором служит замкнутый интервал  $[0, 1]$ . Термин «замкнутый» и квадратные скобки означают, что крайние точки принадлежат интервалу: такая запись уже использовалась в главе 6, однако до сих пор у нас не было необходимости указывать на это явным образом. Первый этап построения состоит в разделении интервала  $[0, 1]$  на три участка и удалении открытой средней трети, которая обозначается  $]1/3, 2/3[$ . Термин «открытый» и развернутые квадратные скобки означают, что крайние точки интервала в этот интервал не входят. Затем удаляются средние трети каждого из  $N = 2$  оставшихся отрезков. И так далее до бесконечности.

Получаемое в результате множество остатков  $C$  называется либо *двоичным*, поскольку  $N = 2$ , либо *троичным*, поскольку исходный интервал делится на три части.

В общем случае количество частей, называемое *основанием*, обозначается буквой  $b$ , причем отношение между  $N$ -й частью множества и всем множеством определяется коэффициентом подобия  $r = 1/b$ . Множество  $C$  называется также *канторовым дисконтинуумом*; чуть позже я

предложу свой термин «канторова фрактальная пыль». И еще: так как точка на временной оси отмечает некое «событие», множество  $S$  представляет собой фрактальную последовательность событий.

## СТВОРАЖИВАНИЕ, ТРЕМЫ И СЫВОРОТКА

В рамках термина, который Льюис Ричардсон применил к турбулентности, а мы позаимствовали для описания береговых линий и кривых Коха в главе 6, канторова процедура является *каскадом*. «Вещество», однородно распределенное вдоль инициатора  $[0, 1]$ , подвергается воздействию центростремительного вихря, который «сметает» его к крайним третям интервала.

Среднюю треть, вырезанную из интервала  $[0, 1]$ , мы будем называть *трёма-генератором*. Этот неологизм образован от греческого слова *τρῆμα*, означающего «дыра, отверстие» (дальним родственником этого слова является латинское *terres* «термит»). Это, пожалуй, самое короткое греческое слово из тех, что на сегодняшний день еще не обзавелись значительной терминологической нагрузкой.

В данном контексте тремы совпадают с паузами, однако в других примерах, с которыми мы встретимся позже, совпадения не происходит, поэтому и возникла необходимость в двух разных терминах.

По мере того, как опустошается «трема первого порядка», вещество сохраняется и перераспределяется с однородной плотностью по внешним третям, которые мы будем называть *предтворогом*. Здесь в действие вступают еще два вихря, и та же процедура повторяется на интервалах  $[0, 1/3]$  и  $[2/3, 1]$ . Процесс продолжается как ричардсонов каскад, стремясь в пределе к множеству, которое мы назовем *творогом*. Если длительность этапа пропорциональна размеру вихря, то общая длительность процесса конечна.

Для пространства, не занятого творогом, я предлагаю термин *сыворотка* (в совокупности получаем вполне полноценную простоквашу).

Предполагается, что эти термины будут использоваться не только в их математическом значении, но для выражения их физического смысла. *Створаживанием* можно называть любой каскад неустойчивых состояний, приводящий в итоге к сгущению вещества, а термин *творог* может определять объем, внутри которого некая физическая характеристика становится — в результате створаживания — чрезвычайно концентрированной.

**Этимология.** Слово «творог»<sup>1</sup> происходит от древнеанглийского *crudan* «давить, жать, сильно толкать». Не следует думать, будто эта маленькая демонстрация эрудиции, позаимствованной у Партриджа [463],

<sup>1</sup> Англ. *curd*. — Прим. перев.

является абсолютно бесполезной — этимологические родственники творога несомненно интересуют нас с фрактальной точки зрения (см. главу 23).

Обратите внимание на цепочку свободных ассоциаций: творог  $\rightarrow$  сыр  $\rightarrow$   $\rightarrow$  молоко  $\rightarrow$  Млечный Путь  $\rightarrow$  Галактика (греч.  $\gamma\alpha\lambda\alpha$  переводится как «молоко»)  $\rightarrow$  галактики. Термин *створаживание* пришел мне в голову, когда я занимался как раз галактиками, и этимологическая подоплека «галактического створаживания» весьма меня заворожила.

## ВНЕШНИЙ ПОРОГ И ЭКСТРАПОЛИРОВАННАЯ КАНТОРОВА ПЫЛЬ

В качестве прелюдии к экстраполяции множества  $C$  давайте припомним кое-что из истории. Кантор представил миру множество  $C$ , едва покинув поле своей прежней деятельности — изучение тригонометрических рядов. Поскольку такие ряды тесно связаны с периодическими функциями, единственная доступная им экстраполяция заключается в бесконечном повторении. Вспомним теперь такие говорящие термины, как *внешний* и *внутренний предел*, которые мы в главе 6 позаимствовали из теории турбулентности. Под этими терминами понимают размеры  $\varepsilon$  и  $\Omega$ , соответственно наименьшего и наибольшего элемента множества, — можно сказать, что Кантор решил ограничиться порогом  $\Omega = 1$ . На  $k$ -м этапе построения  $\varepsilon = 3^{-k}$ , однако для самого  $C$  порог  $\varepsilon = 0$ . Для получения любого другого  $\Omega < \infty$  — например, приличествующего ряду Фурье значения  $2\pi$ , — необходимо увеличить периодическую канторову пыль в  $\Omega$  раз.

Однако при таком повторении разрушается самоподобие, которым мы в настоящем эссе весьма дорожим. Чтобы этого избежать, следует соблюсти два простых правила: инициатор используется только для экстраполяции, а сама экстраполяция происходит в виде *обратного* или *восходящего* каскада. На первом этапе множество  $C$  увеличивается в  $1/r = 3$  раза и размещается на интервале  $[0, 3]$ . В результате получаем множество, включающее в себя множество  $C$  и его копию, смещенную вправо и отделенную от  $C$  новой тремой, длина которой равна 1. На втором этапе увеличиваем получившееся множество снова в 3 раза и размещаем результат на интервале  $[0, 9]$ . Получаем множество  $C$  плюс три его копии, смещенные вправо и разделенные двумя новыми тремами длины 1 и одной новой тремой длины 3. Дальнейшие этапы восходящего каскада увеличивают множество  $C$  с возрастающим коэффициентом подобия вида  $3^k$ .

При желании можно чередовать, скажем, два этапа интерполяции и один этап экстраполяции и т. д. При таком построении каждая серия из трех этапов увеличивает внешний порог  $\Omega$  в 3 раза и уменьшает внутренний порог  $\varepsilon$  в те же 3 раза.

◁ Отрицательная ось в такой экстраполированной пыли остается пустой — бесконечная трема. Соответствующее понятие мы обсудим позже, в главе 13, где мы рассмотрим (бесконечные) континенты и бесконечные же кластеры. ►

## РАЗМЕРНОСТИ $D$ В ИНТЕРВАЛЕ ОТ 0 ДО 1

Множество, полученное в результате бесконечных интерполяции и экстраполяции, самоподобно, а его размерность

$$D = \ln N / \ln(1/r) = \ln 2 / \ln 3 \sim 0,6309$$

представляет собой дробь в интервале от 0 до 1.

Изменяя правила створаживания, мы можем получить другие значения  $D$  — собственно, любое значение между 0 и 1. При длине тремы первого этапа  $1 - 2r$ , где  $0 < r < 1/2$ , имеем размерность  $\ln 2 / \ln(1/r)$ .

При  $N \neq 2$  становится доступным еще большее разнообразие. Для множеств с  $N = 3$  и  $r = 1/5$  находим

$$D = \ln 3 / \ln 5 \sim 0,6826.$$

Для множеств с  $N = 2$  и  $r = 1/4$  —

$$D = \ln 2 / \ln 4 = 1/2.$$

Для множеств с  $N = 3$  и  $r = 1/9$  получаем тот же результат:

$$D = \ln 3 / \ln 9 = 1/2.$$

Хотя размерности двух последних множеств равны, «выглядят» они очень по-разному. Об этом наблюдении мы будем подробнее говорить в главе 34, где оно приведет нас к концепции лакунарности.

Обратите внимание также на то, что для любого  $D < 1$  есть по крайней мере одно канторово множество, однако поскольку  $Nr \leq 1$  и, как следствие,  $N < 1/r$ , нет ни одного множества, размерность  $D$  которого превышала бы 1.

## МНОЖЕСТВО $\mathcal{C}$ НАЗЫВАЕТСЯ «ПЫЛЬЮ», ПОТОМУ ЧТО ЕГО ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ $D_T$ РАВНА НУЛЮ

Фрактальная размерность  $D$  канторова множества может изменяться в пределах от 0 до 1; с топологической же точки зрения все канторовы множества имеют размерность 0, так как, по определению, любая точка

канторова множества отделена от любой другой, причем для ее отделения не требуется ничего удалять. С этой стороны нет никакой разницы между  $\mathcal{C}$  и конечным множеством точек! Тот факт, что топологическая размерность  $D_T$  в последнем случае равна 0, известен нам из стандартной геометрии; мы даже используем это обстоятельство в главе 6 для доказательства того, что топологическая размерность кривой Коха  $\mathcal{K}$  равна 1. Вообще,  $D_T = 0$  для любого вполне несвязного множества.

При отсутствии общепринятого обыденного термина, вроде «кривой» и «плоскости» (которые представляют собой связные множества с размерностями  $D_T = 1$  и  $D_T = 2$ , соответственно), я предлагаю называть множества с  $D_T = 0$  пылью.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИН ПАУЗ

Возьмем канторову пыль и обозначим через  $u$  возможное значение для длины паузы, через  $U$  — неизвестную длину паузы, а через  $\text{Nr}(U > u)$  — количество пауз или трем длины  $U$ , большей, чем  $u$ .  $\triangleleft$  Это обозначение построено по аналогии с обозначением  $\text{Pr}(U > u)$  из теории вероятности.  $\blacktriangleright$  Оказывается, существует постоянный префактор  $F$  — такой, что график функции  $\text{Nr}(U > u)$  постоянно пересекает график  $Fu^{-D}$ . И вновь в дело вступает размерность. Приняв за координаты  $\ln u$  и  $\ln \text{Nr}$ , получим однородные ступени.

## СРЕДНЕЕ КОЛИЧЕСТВО ОШИБОК

Как и в случае береговых линий, можно получить приблизительное представление о последовательности ошибок, если остановить канторovo створаживание при длине интервалов  $\varepsilon = 3^{-k}$ . Эта величина может быть равна времени, необходимому для передачи единичного символа. Кроме того, следует использовать канторову периодическую экстраполяцию с большим, но конечным значением  $\Omega$ .

Количество ошибок между моментами времени 0 и  $R$  (которое мы обозначим через  $M(R)$ ) выдерживает ритм, так как учитываются только те моменты, в которые происходит что-то важное. Хороший пример *фрактального времени*.

Если сигнал начинается в момент времени  $t = 0$  (а мы рассматриваем только этот случай), величина  $M(R)$  ведет себя так же, как в случае кривой Коха. Пока  $R$  остается меньше  $\Omega$ , количество ошибок удваивается всякий раз, когда  $R$  увеличивается в 3 раза. В результате имеем  $M(R) \propto R^D$ .

Это выражение похоже на стандартное выражение для массы диска или шара радиуса  $R$  в  $D$ -мерном евклидовом пространстве. Оно также идентично выражению, полученному в главе 6 для кривой Коха.

В качестве вывода можно заметить, что среднее количество ошибок на единицу длины приблизительно пропорционально  $R^{D-1}$  при условии, что  $R$  находится в интервале между внутренним и внешним порогами. При конечном  $\Omega$  уменьшение среднего количества ошибок продолжается до окончательной величины  $\Omega^{D-1}$ , которая достигается при  $R = \Omega$ . После этого их плотность остается более или менее постоянной. При бесконечном  $\Omega$  среднее количество ошибок уменьшается в конечном счете до нуля. Наконец, эмпирические данные часто предполагают, что величина  $\Omega$  конечна и очень велика, однако не позволяют определить ее со сколько-нибудь приемлемой точностью. В этом случае среднее количество имеет некоторый нижний предел, который не обращается в нуль, но его неопределенность лишает его какого бы то ни было практического смысла.

## КОНЦЕВЫЕ ТОЧКИ ТРЕМ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

◁ Наиболее заметные члены множества  $\mathcal{C}$ , концевые точки трем, *вовсе не исчерпывают* всего множества; скажем больше, они составляют лишь малую его часть. Физическую значимость других точек мы обсудим в главе 19. ►

## ИСТИННАЯ ПРИРОДА КАНТОРОВОЙ ПЫЛИ

Читателю, который продержался до этого места и/или/ слышал об активно сейчас обсуждаемых в научной литературе чертовых лестницах (см. пояснение к рис. 125), возможно, будет сложно поверить в то, что, когда я начал работу над этой темой в 1962 г., все вокруг были единодушны в том, что канторова пыль *по меньшей мере* столь же чудовищна, как кривые Коха и Пеано.

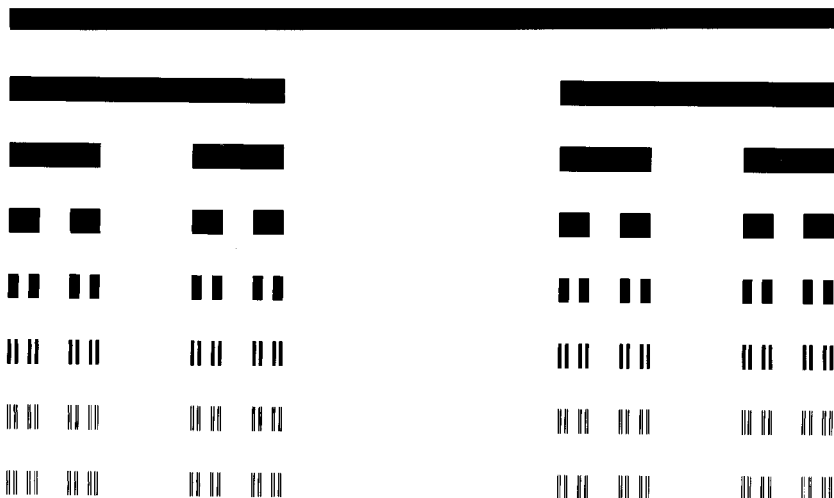
Каждый уважающий себя физик автоматически «выключался» при одном только упоминании имени Кантора, порывался убежать за тридевять земель от всякого, заявляющего о научной ценности множества  $\mathcal{C}$ , и всех желающих слушать с готовностью уверял в том, что все подобные заявления были приняты, рассмотрены и найдены беспочвенными. Поддержали меня в то время только предположения С. Улама (совершенно завораживающие, несмотря на отсутствие должной проработки и неприятие научной общественностью) относительно возможной роли канторовых множеств при изучении гравитационного равновесия в звездных скоплениях (см. [570]).

Чтобы опубликовать работу о канторовой пыли, мне пришлось убрать из нее всякое упоминание имени Кантора!

Однако случилось так, что Природа сама привела нас к множеству  $\mathcal{C}$ . В главе 19 мы поговорим еще об одной, совершенно иной, физи-

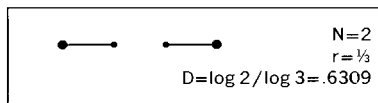
ческой роли для  $C$ . Все это призвано подчеркнуть, что истинная природа канторовой пыли весьма разнообразна.

Несомненно, в большинстве случаев само множество  $C$  представляет собой весьма грубую модель, нуждающуюся в многочисленных уточнениях. И все же я настаиваю, что *те самые свойства, благодаря которым многие считают канторовы дисконтинуумы патологией, незаменимы при моделировании перемежаемости* и должны быть сохранены в последующих, более реалистичных, заместителях этих множеств. ■



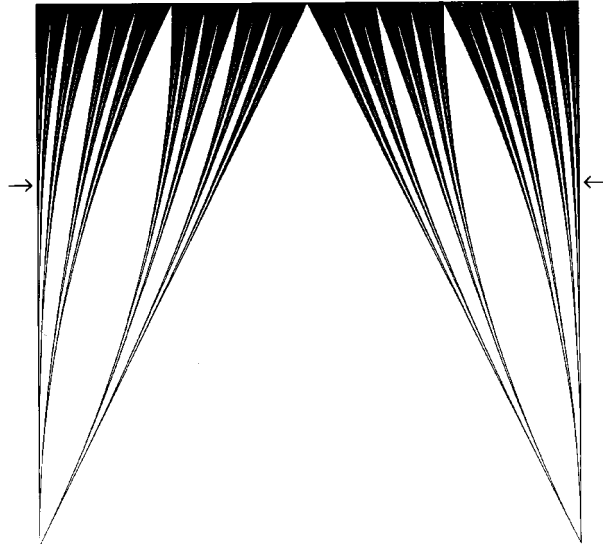
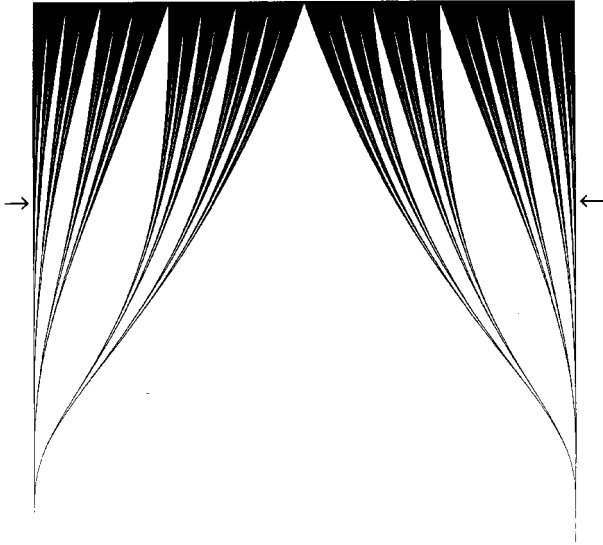
**Рис. 120 и 121. КАНТОРОВЫ ТРОИЧНЫЕ ГРЕБЕНЬ И БРИКЕТ (РАЗМЕРНОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ  $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309$ ). КОЛЬЦА САТУРНА. КАНТОРОВЫ ЗАНАВЕСЫ**

Инициатором для канторовой пыли служит интервал  $[0, 1]$ , а генератор имеет следующий вид:



**Рис. 120.** Канторову пыль необычайно трудно изобразить на рисунке, так как она настолько тонка и разрежена, что практически невидима. Для получения хоть какого-нибудь представления о ее форме,





утолщим исходный интервал и назовем результат канторовым гребнем. ◁ Строго говоря, у нас получится декартово произведение канторовой пыли длины 1 на отрезок длины 0, 03. ►

**Створаживание.** Построение канторова гребня описывается процессом, который я назвал *створаживанием*. Сначала изобразим стержень круглого сечения (в проекции получится прямоугольник с соотношением «высота/длина», равным 0, 03). Удобнее всего представить, что материал, из которого изготовлен стержень, имеет очень малую плотность. Затем материал стержня начинает «створаживаться», смещаясь из средней трети стержня к его крайним третям, причем положение последних остается при этом неизменным. При дальнейшем створаживании вещество уходит из средних третей каждой из крайних третей уже в их собственные крайние трети и так далее до бесконечности. В пределе мы получим бесконечно большое количество бесконечно тонких пластин бесконечно большой плотности. Эти пластины распределены вдоль прямой весьма особым образом, обусловленным производящим процессом. На рисунке створаживание остановлено на этапе, соответствующем предельному разрешению как типографского пресса, так и человеческого глаза, — последняя строка неотличима от предпоследней; каждый из элементов последней строки выглядит просто как темная линия, тогда как на самом деле представляет собой две тонкие пластины, разделенные пустым промежутком.

**Канторов брикет.** Выберем в качестве исходного объекта для створаживания круглый корж, толщина которого значительно меньше его диаметра, и пусть тесто при створаживании разделяется на более тонкие коржи (освобождая место для соответствующей начинки). В результате получим этакий бесконечно экстраполированный «наполеон», который можно назвать *канторовым брикетом*.

**Кольца Сатурна.** Раньше считалось, что Сатурн окружен одним сплошным кольцом. Затем была открыта щель, разделяющая кольцо, потом еще одна, и наконец «Вояджер-1» обнаружил огромное количество таких щелей, в большинстве своем очень узких. «Вояджер» также установил, что кольца прозрачны: они пропускают солнечный свет. . . как и подобает множеству, названному нами «тонким и разреженным».

Таким образом, структура колец (см. [542], особенно иллюстрацию на обложке) являет собой, по всей видимости, совокупность близко расположенных окружностей, причем радиус каждой из этих окружностей соответствует расстоянию от некоторой точки отсчета до некоторой точки канторовой пыли. ◁ Специальное название для такого множества — декартово произведение канторовой пыли на окружность. Вообще говоря, мы, наверное, получим более близкую к оригиналу картинку, если умножим окружность на пыль положительной меры, подобную тем, что

рассматриваются в главе 15. ► Добавление в последнюю минуту: та же идея независимо от меня озарила и авторов [10], только они соотнесли ее с уравнением Хилла; в Примечании 6 к упомянутой работе содержится немало других соображений по существу вопроса.

**Спектры.** Хартер описывает в [199] спектры некоторых органических молекул; сходство этих спектров с канторовой пылью потрясает.

**Рис. 121.** Этот рисунок помогает яснее представить форму канторовой пыли посредством помещения ее среди остальных пылевидных множеств с  $N = 2$  и переменным значением  $r$ . На вертикальной оси откладывается либо само значение  $r$ , изменяющееся в интервале от 0 до  $1/2$  (внизу), либо размерность  $D$  в интервале от 0 до 1 (вверху). Верхняя граница обоих занавесов — это полный интервал  $[0, 1]$ . Любой горизонтальный срез на каждом из рисунков представляет собой какую-либо канторову пыль (стрелками показаны значения  $r = 1/3$  и  $D = 0,6309$ ).

**Знаменитый греческий парадокс.** Греческие философы полагали, что условием неограниченной делимости тела является его непрерывность. Очевидно, они ничего не знали о канторовой пыли. ■

### **Рис. 125. ФУНКЦИЯ КАНТОРА, ИЛИ ЧЕРТОВА ЛЕСТНИЦА (РАЗМЕРНОСТЬ $D = 1$ , РАЗМЕРНОСТЬ МНОЖЕСТВА АБСЦИСС ПОДСТУПЕНЕЙ $D \sim 0,6309$ ). КАНТОВО ДВИЖЕНИЕ**

Функция Кантора описывает распределение массы вдоль канторова гребня, показанной на рис. 120. Многие называют график этой функции *чертовой лестницей* — она и впрямь ведет себя весьма странно, чтобы не сказать больше. Условимся, что и длина, и масса гребня равны 1; кроме того, каждой точке абсциссы  $R$  поставим в соответствие массу  $M(R)$ , содержащуюся между 0 и  $R$ . Поскольку в паузах никакой массы нет, функция  $M(R)$  на этих интервалах остается постоянной. Учитывая, что створаживание никоим образом не влияет на общую массу гребня, можно заключить, что функция  $M(R)$  должна возрастать *хоть где-нибудь* между точкой с координатами  $(0, 0)$  и точкой с координатами  $(1, 1)$ . Она и возрастает, только происходит это на бесконечно большом числе бесконечно малых и группирующихся в очень тесные скопления участков, соответствующих полученным нами пластинам гребня. Подробнее о странных свойствах функции Кантора можно прочесть в работе [216].

**Регуляризирующие отображения.** Чертова лестница может похвастаться одним выдающимся свойством: с ее помощью можно отобразить вопиющую неоднородность канторова гребня в нечто пристойно

однородное и равномерное. Взяв два различных интервала одинаковой длины на вертикальной оси графика обратной канторовой лестницы, мы обнаружим, что масса двух соответствующих наборов пластин одинакова — хотя на вид они, как правило, сильно отличаются.

Поскольку самым буйным цветом наука цветет именно на почве однородности, такие регулирующие преобразования часто способны преодолеть преграду между фрактальной иррегулярностью и математическим анализом.

**Фрактальная однородность.** Распределение масс в канторовом гребне удобно полагать *фрактально однородным*.

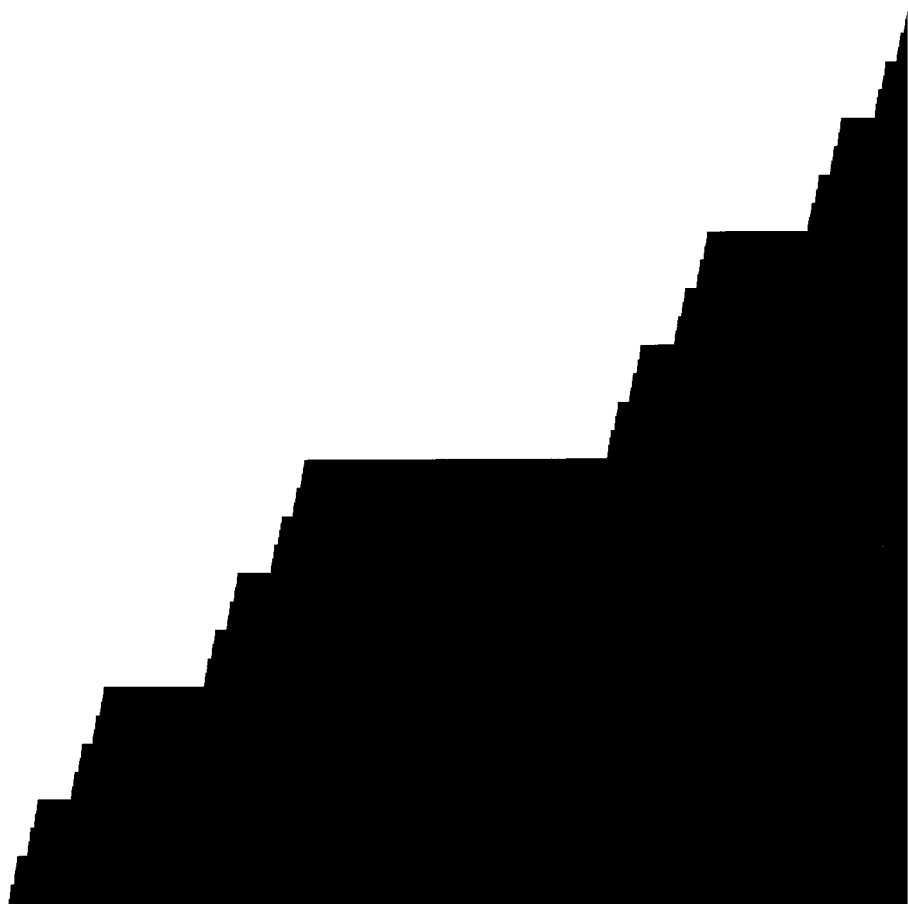
**Канторово движение.** Как и в случае рассматриваемой в виде движения кривой Коха или движения Пеано, иногда удобно интерпретировать ординату  $M(R)$  как время. Тогда обратная функция  $R(M)$  будет определять положение точки при *канторовом движении* в момент времени  $t$ . Движение это в высшей степени дискретно. В главах 31 и 31 мы рассмотрим его линейные и пространственные обобщения.

**Фрактальная размерность.** Сумма ширины всех ступеней чертовой лестницы равна сумме высот всех этих ступеней — каждая из сумм равна 1. Следовательно, чертова лестница имеет совершенно определенную длину, равную 2. Кривая конечной длины называется спрямляемой, а ее размерность  $D$  равна 1. Из этого примера хорошо видно, что размерность  $D = 1$  вполне совместима с наличием бесконечного множества особых точек — при условии, что они достаточно редко разбросаны.

◁ Кое-кому, возможно, захочется назвать представляемую вашему вниманию кривую фрактальной, однако для этого нам придется пойти на менее строгое определение *фракталов*, которое бы наряду с размерностью  $D$  основывалось еще на каких-то других понятиях. ►

**Сингулярные функции.** Канторова лестница представляет собой неубывающую и непостоянную сингулярную функцию — сингулярную в том смысле, что она непрерывна, но *не* дифференцируема. Ее производная обращается в нуль почти везде, к тому же она ухитряется непрерывно изменяться на множестве, длина — т. е. линейная мера — которого стремится к нулю.

Любая неубывающая функция может быть представлена в виде суммы некоторой сингулярной функции, некоторой функции, состоящей из дискретных скачков, и некоторой дифференцируемой функции. Два последних слагаемых являются классикой в математике и широко используются в физике. Сингулярную же составляющую большинство физиков считает абсолютно бесполезной пагологией. Последнее мнение является абсолютно безосновательной чепухой — это заявление можно считать лейтмотивом настоящего эссе.



**Чертовы лестницы в статистической физике.** Публикация этого рисунка в эссе 1977 г. привлекла к чертовым лестницам внимание физиков и послужила стимулом для многочисленных исследований. Все чаще мне встречаются в книгах и статьях графики, напоминающие «занавес» на рис. 121 или занавес Фату на рис. 273. В этой связи рекомендую заглянуть в [9], где разрозненные — хотя и весьма важные — ранние исследования (например, [11], [218]) объединены с новыми разработками в данной области.



### III ◇ ГАЛАКТИКИ И ВИХРИ

---

## 9 ◇ ФРАКТАЛЬНЫЙ ВЗГЛЯД НА СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК

В главах 6 и 7, призвав на помощь геоморфологию, мы ввели кривые Коха и Пеано, однако объекты наиболее значительных приложений теории фракталов находятся в несколько иных областях. Неспешно подбываясь к основным течениям в науке, мы рассмотрим в этой главе (и в двух последующих) два вопроса исключительной древности, важности и сложности.

Распределение звезд, галактики, скопления галактик и тому подобные материи издавна завораживают как любителей, так и специалистов, однако кластеризация до сих пор остается на периферии астрономии, да и всей астрофизики в целом. Главная причина заключается в том, что никто так и не в состоянии объяснить, почему распределение материи подчиняется иррегулярным иерархическим законам — по крайней мере, в определенном диапазоне масштабов. Во многих трудах, посвященных этой теме, можно встретить упоминание о феномене кластеризации, однако в серьезных теоретических исследованиях ее, как правило, поспешно замечают под ковер, утверждая, что галактики распределены вполне однородно — в масштабе, превышающем некий большой, но неопределенный порог.

Рассматривая ситуацию с менее фундаментальных позиций, можно сказать, что нежелание иметь дело с иррегулярным проистекает из отсутствия инструментов для его математического описания. От статистики требуется выбрать между двумя допущениями, из которых только одно можно счесть тщательно исследованным (асимптотическую однородность). Стоит ли удивляться, что результаты, мягко говоря, неубедительны?

Вопросы, однако, таковы, что от них трудно отмахнуться. Я считаю совершенно необходимым — параллельно с продолжением попыток *объяснить* кластеризацию — найти способ *описать* ее и смоделировать

реальность чисто геометрическими средствами. Рассматривая эту тему с фрактальных позиций на протяжении нескольких глав настоящего эссе, мы рассчитываем с помощью недвусмысленных моделей показать, что полученные свидетельства предполагают такую степень кластеризации, которая далеко выходит за пределы, поставленные для нее существующими моделями.

Эту главу следует считать вводной: здесь мы познакомимся с одной весьма влиятельной теорией образования звезд и галактик, предложенной Хойлом, с основной формальной моделью их распределения, которой мы обязаны Фурнье д'Альбу (эта модель также известна как модель Шарлье), и, что самое важное, получим некоторые эмпирические данные. Мы покажем, что и теорию, и данные можно интерпретировать в рамках понятия о масштабно-инвариантной фрактальной пыли. Я настаиваю на том, что распределение галактик и звезд включает в себя некую зону самоподобия, внутри которой фрактальная размерность удовлетворяет неравенству  $0 < D < 3$ . Кроме того, здесь вкратце изложены теоретические причины, согласно которым можно ожидать  $D = 1$ , и, как следствие, обсуждается вопрос, почему наблюдаемая величина  $D$  составляет  $\sim 1,23$ .

**Анонс.** В главе 22 мы воспользуемся фрактальными инструментами для улучшения нашего понимания смысла космологического принципа, рассмотрим, как его можно и нужно модифицировать, и узнаем, почему такая модификация непременно требует случайности. Обсуждение скоплений в рамках усовершенствованной модели мы отложим до глав 22, 23 и с 32 по 35.

## МОЖНО ЛИ ГОВОРИТЬ О ГЛОБАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИИ?

Начнем с тщательного рассмотрения концепции глобальной плотности материи. Как и в случае береговых линий, здесь все, на первый взгляд, выглядит очень простым, однако на деле очень быстро — и весьма интересно — запутывается. Для определения и измерения плотности начинают с массы  $M(R)$ , сосредоточенной внутри сферы радиуса  $R$  с центром, совпадающим с центром Земли. Так оценивается приближительная плотность, определяемая как

$$M(R)/[(4/3)\pi R^3].$$

После этого величину  $R$  устремляют к бесконечности, а глобальная плотность определяется как предел, к которому сходится в этом случае приближительная плотность.

Однако обязательно ли глобальная плотность сходится к положительному и конечному пределу? Если так, то скорость такого схождения



оставляет желать лучшего, и это еще мягко сказано. Более того, оценки предельной плотности, будучи рассмотрены во временной перспективе ведут себя довольно странно. По мере того как увеличивалась глубина наблюдаемой в телескоп Вселенной, приблизительная плотность и удивление систематически уменьшались. Согласно де Вокулеру [104], удивление всегда было  $\propto R^{D-3}$ . Наблюдаемый показатель  $D$  много меньше 3 — в наилучшем приближении  $D = 1, 23$ .

Де Вокулер выдвинул тезис о том, что поведение величины приблизительной плотности отражает реальность, имея в виду, что  $M(R) \propto R^D$ . Эта формула вызывает в памяти классический результат для шара радиуса  $R$ , вложенного в евклидово пространство размерности  $E$ , — объем такого шара  $\propto R^E$ . В главе 6 мы встречались с такой же формулой для кривой Коха, с той лишь разницей, что показателем там была не евклидова размерность  $E = 2$ , а дробная фрактальная размерность  $D$ . А в главе 8 мы получили формулу  $M(R) \propto R^D$  для канторовой пыли на временной оси (здесь  $E = 1$ ).

Все эти прецеденты заставляют (причем весьма настойчиво) предположить, что показатель де Вокулера  $D$  представляет собой не что иное, как фрактальную размерность.

## ВХОДЯТ ЛИ ЗВЕЗДЫ В ДИАПАЗОН МАСШТАБНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ?

Очевидно, что диапазон масштабной инвариантности, в котором удовлетворяет неравенству  $0 < D < 3$ , не должен включать в себя объекты с явно определенными границами — такие, например, как планеты. А вот входят ли в него звезды? Согласно данным, полученным Уэббом и приведенным в [135], массу Млечного Пути внутри сферы радиуса  $R$  вполне можно представить в виде  $M(R) \propto R^D$ , где величина экстраполируется с галактик. Мы, однако, продолжим наше обсуждение исключительно в галактических терминах.

## СУЩЕСТВУЕТ ЛИ У ДИАПАЗОНА МАСШТАБНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ ВЕРХНИЙ ПОРОГ?

Вопрос о том, насколько далеко в сторону очень больших масштабов простирается диапазон, внутри которого  $0 < D < 3$ , весьма пророчив, причем в последнее время он снова привлек к себе внимание. Многие авторы либо прямо заявляют, либо подразумевают, что этот диапазон допускает существование внешнего предела, соответствующего размерам скоплений галактик. Другие авторы выражают свое несогласие с этим мнением. Де Вокулер [104] утверждает, что «кластеризация галактик и, возможно, всех остальных форм материи является доминирующей характеристикой структуры Вселенной во всех доступных наблюдений».

нию масштабах, причем нет никаких указаний на какое бы то ни было приближение к однородности; средняя плотность вещества неуклонно падает по мере того, как принимаются во внимание все большие объемы пространства, и у нас нет экспериментально подтвержденных оснований полагать, что эта тенденция не распространяется на значительно большие расстояния и меньшие значения плотности».

Дебаты между этими двумя школами, безусловно, весьма интересны и важны — для космологии, но не для нашего эссе. Даже если диапазон, в котором  $0 < D < 3$ , имеет границы с обеих сторон, само его существование достаточно значительно для того, чтобы оправдать самое тщательное исследование.

В любом случае Вселенная (совсем как тот клубок ниток, о котором мы говорили в главе 6) располагает, по всей видимости, целым рядом различных эффективных размерностей. Если начать с масштабов порядка радиуса Земли, то первой встретившейся нам размерностью будет 3 (такова размерность твердых тел с четкой границей). Далее размерность падает до 0 (так как материя рассматривается как скопление изолированных точек). Далее идет весьма интересный участок, характеризующийся некой нетривиальной размерностью, удовлетворяющей неравенству  $0 < D < 3$ . Если масштабно-инвариантная кластеризация продолжается до бесконечности, то на этом последнем значении  $D$  ряд эффективных размерностей и заканчивается. Если же существует конечный внешний порог, то к списку добавляется четвертый интервал размерностей, внутри которого точки теряют свою индивидуальность, и у нас на руках оказывается однородный газ, т. е. размерность снова возвращается к 3.

Самым же наивным представлением является то, согласно которому галактики распределены во Вселенной приблизительно однородно. В этом случае последовательность размерностей  $D$  сводится к трем значениям: 3, 0 и опять 3.

◀ Общая теория относительности утверждает, что при отсутствии материи локальная геометрия пространства стремится стать плоской и евклидовой, в то время как присутствие материи переводит ее в локально риманову. Здесь мы можем говорить о глобально плоской Вселенной, размерность которой равна 3 с локальными значениями  $D < 3$ . Такой тип возмущений описан в [519], довольно туманной работе, автор которой приводит (с. 312) пример построения кривой Коха (см. главу 6), не ссылаясь при этом на самого Коха. ▶

## ВСЕЛЕННАЯ ФУРЬЕ

Нам остается лишь построить фрактал, который удовлетворял бы правилу  $M(r) \propto R^D$ , и посмотреть, как он будет согласовываться с

общепринятыми взглядами на Вселенную. Первая подробно описанная модель такого рода была предложена Э. Э. Фурнье д'Альбом (см. главу 40). Хотя книга Фурнье [152] представляет собой по большей части художественный вымысел, замаскированный под научное исследование, в ней все же содержится несколько чрезвычайно интересных соображений, которые мы вскоре обсудим. Сначала же, как мне кажется, следует описать структуру, предложенную Фурнье.

Начинаем построение с правильного восьмигранника, проекция которого представлена в центре рис. 141. Проекция показывает четыре угла квадрата, диагональ которого составляет 12 «единиц», и центр этого квадрата. Однако у восьмигранника есть еще две точки над и под нашей плоскостью на перпендикуляре, проведенном через центр квадрата, на одинаковом расстоянии в 6 «единиц» от этого центра.

Далее каждая точка заменяется шаром радиуса 1, который мы будем рассматривать как «звездный агрегат нулевого порядка». Наименьший шар, содержащий в себе все 7 первоначальных шаров, назовем «звездным агрегатом первого порядка». Агрегат второго порядка получается увеличением агрегата первого порядка в  $1/r = 7$  раз и заменой каждого из новых шаров радиуса 7 копией агрегата первого порядка. Аналогичным образом, агрегат третьего порядка получается увеличением агрегата второго порядка в  $1/r = 7$  раз и заменой каждого из шаров агрегата второго порядка. И так далее.

Короче говоря, при переходе между соседними порядками агрегации как число точек, так и радиус шаров увеличивается в  $1/r = 7$  раз. Следовательно, для всякого значения  $R$ , которое является радиусом какого-либо агрегата, функция  $M_0(R)$ , определяющая количество точек, содержащихся в шаре радиуса  $R$ , имеет вид  $M_0(R) = R$ . Для промежуточных  $R$  функция  $M_0(R)$  принимает меньшие значения (достигая  $R/7$ ), однако, согласно общей тенденции,  $M_0(R) \propto R$ .

Возможно также интерполировать агрегаты нулевого порядка последовательными этапами до агрегатов порядка  $-1$ ,  $-2$  и т. д. На первом этапе заменим каждый агрегат нулевого порядка копией агрегата первого порядка, уменьшенной в отношении  $1/7$ , и так далее. При таком построении отношение  $M_0(R) \propto R$  остается истинным для все меньших значений  $R$ . После бесконечной экстра- и интерполяции мы получаем самоподобное множество размерности  $D = \ln 7 / \ln 7 = 1$ .

Кроме того, размерность  $D = 1$  объекта в 3-пространстве вовсе не обязывает его непременно быть прямой линией да и любой другой спрямляемой кривой. Ему даже не обязательно быть связным. Каждая размерность  $D$  совместима с любой меньшей либо равной по величине топологической размерностью. В частности, топологическая размерность бесконечной в обе стороны вселенной Фурнье равна 0, так как она является вполне несвязной «пылью».

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАССЫ: ФРАКТАЛЬНАЯ ГОМОГЕННОСТЬ

Шаг от геометрии к распределению массы представляется мне как нельзя более очевидным. Если каждый звездный агрегат нулевого порядка нагрузить единичной массой, то масса  $M(R)$  внутри шара радиуса  $R > 1$  идентична величине  $M_0(R)$ , а следовательно,  $\propto R$ . Кроме того, чтобы получить агрегаты порядка  $-1$  из агрегатов нулевого порядка, необходимо разбить шар, который мы считали однородным и обнаружить, что он состоит из семи меньших шаров. На этом этапе правило  $M(R) \propto R$  распространяется и на радиусы, меньшие единицы.

Рассматривая полученное распределение массы по всему 3-пространству, мы видим, что оно чрезвычайно неоднородно, хотя на фрактале Фурнье ему в однородности нет равных. (Вспомните рис. 120.) В частности, любые две геометрически одинаковые части вселенной Фурнье содержат одинаковые массы. Предлагаю такое распределение массы называть *фрактально гомогенным*.

◁ Предыдущее определение сформулировано в терминах масштабно-инвариантных фракталов, но концепция фрактальной гомогенности в общем случае гораздо шире. Она применима к любому фракталу, для которого положительна и конечна хаусдорфова мера в размерности  $D$ . Фрактальная гомогенность требует, чтобы масса, содержащаяся в множестве, была пропорциональна хаусдорфовой мере этого множества. ►

## ВСЕЛЕННАЯ ФУРНЬЕ КАК КАНТОРОВА ПЫЛЬ. РАСШИРЕНИЕ ДО $D \neq 1$

Я надеюсь, что читателя не сбilo с толку небрежное употребление фрактальной терминологии в начальных разделах этой главы. Очевидно, что Фурнье, сам того не осознавая, шел путем, параллельным пути своего современника Кантора. Основная разница заключается в том, что конструкция Фурнье вложена в пространство, а не в интервал на прямой. Для вящего усиления сходства достаточно заменить шарообразные агрегаты Фурнье на блоки (заполненные кубы). Каждый агрегат нулевого порядка становится блоком, длина стороны которого равна 1, и включает в себя 7 меньших агрегатов со стороной  $1/7$ : центр одного из них совпадает с центром исходного куба, а остальные шесть касаются центральных подквадратов на гранях исходного куба.

Ниже мы рассмотрим, как получил значение  $D = 1$  из фундаментального физического феномена Фурнье, и как к тому же результату пришел Хойл. С геометрической же точки зрения, случай  $D = 1$  является особым, даже если на протяжении всего построения придерживаться формы восьмигранника и значения  $N = 7$ . Так как шары не перекрывают друг друга, величина  $1/r$  может принимать любое значение в интервале

от 3 до бесконечности, в результате чего получаем закон  $M(R) \propto R^D$ , где  $D = \ln 7 / \ln(1/r)$  на всем интервале от 0 до  $\ln 7 / \ln 3 = 1,7712$ .

Далее, взяв любое  $D$ , удовлетворяющее неравенству  $D < 3$ , можно, изменяя  $N$ , легко построить различные варианты модели Фурнье с данной размерностью.

## МОДЕЛЬ ШАРЛЬЕ И ДРУГИЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ ВСЕЛЕННЫЕ

Вышеописанные построения не избежали ни одного из недостатков, характерных для первых фрактальных моделей. Сильнее всего бросается в глаза то, что модель Фурнье, подобно модели кривой Коха в главе 6 и модели канторовой пыли в главе 8, до гротескности правильна. Для исправления ситуации Шарлье [77, 78] предложил предоставить  $N$  и  $r$  возможность переходить с одного иерархического уровня на другой, принимая значения  $N_m$  и  $r_m$ .

Репутация Шарлье в научных кругах была столь высока, что, несмотря на все его щедрые похвалы Фурнье, высказанные на всех ведущих языках науки того времени, даже исходную модель вскоре стали приписывать знаменитому интерпретатору, а не никому не известному автору. Новая модель широко обсуждалась в то время, особенно в [516, 517, 518, 519]. Более того, она привлекла внимание весьма влиятельного Эмиля Бореля, чьи комментарии в [45] очень пронизательны, хотя и несколько суховаты. Однако с той поры, если не считать нескольких судорожных попыток вытащить ее на свет, модель Шарлье пребывает в забвении (не очень убедительные причины такого забвения изложены в [445], с. 20–22 и 408–409). Тем не менее, умирать она упорно не желает. Основная идея к сегодняшнему дню была уже много раз открыта разными исследователями независимо друг от друга, особенно рекомендую заглянуть в [303]. (А еще см. раздел ПОЛЬ ЛЕВИ в главе 40.) Наиболее важным я, однако, считаю тот факт, что фрактальная основа вселенной Фурнье имплицитно присутствует в рассуждениях о турбулентности и галактиках в работе [579] (см. главу 10) и в модели галактического генезиса, предложенной Хойлом в [229] (ее мы рассмотрим чуть ниже).

Главная фрактальная составляющая присутствует и в моих моделях (см. главы с 32 по 35).

В этом свете возникает вопрос: может ли модель распределения галактик *не* быть фракталом с одним или двумя порогами? Думаю, что нет. Если мы согласны с тем, что распределение должно быть масштабно-инвариантным (причины необходимости этого изложены в главе 11), и с тем, что множество, на котором концентрируется материя, не является стандартным масштабируемым множеством, у нас не остается иного выбора, кроме признания фрактальности этого множества.

Принимая во внимание важность масштабной инвариантности, нетрудно понять, почему немасштабируемое обобщение Шарлье модели Фурнье было с самого начала обречено. < Оно, кстати, позволяет величине  $\ln N_m / \ln(1/r_m)$  изменяться в зависимости от  $m$  в пределах двух границ,  $D_{\min} > 0$  и  $D_{\max} < 3$ . Вот и еще одна тема для обсуждения: эффективная размерность не обязательно должна иметь одно-единственное значение, это значение может плавать между верхним и нижним пределами. К этой теме мы еще вернемся в главе 15. ►

## ПОЧЕМУ ФУРНЬЕ ОЖИДАЛ $D = 1$ ?

Обсудим теперь весьма впечатляющую аргументацию, которая привела Фурнье к выводу, что показатель  $D$  должен быть равен 1 (см. [152], с. 103). Эта аргументация сама по себе является серьезным доводом в пользу того, чтобы имя ее автора не было забыто.

Рассмотрим галактический агрегат произвольного порядка с массой  $M$  и радиусом  $R$ . Отбросив бесплодные сомнения и применив к данному случаю формулу для объектов, обладающих сферической симметрией, допустим, что гравитационный потенциал на поверхности сферы равен  $GM/R$  ( $G$  — гравитационная постоянная). Звезда, падающая на нашу Вселенную, сталкивается с ее поверхностью на скорости  $V = (2GM/R)^{1/2}$ .

Согласно Фурнье, из того факта, что ни одна доступная наблюдению звезда не движется со скоростью, превышающей  $1/300$  от скорости света, можно вывести очень важное заключение. Масса, содержащаяся внутри мирового шара, возрастает прямо пропорционально его радиусу, а не объему, или, иными словами, плотность вещества внутри мирового шара обратно пропорциональна площади его поверхности. . . Поясим последнее утверждение — потенциал на поверхности сферы всегда одинаков, так как он прямо пропорционален массе вещества внутри сферы и обратно пропорционален расстоянию от центра. Как следствие, звездные скорости, близкие к скорости света, не являются распространенным явлением в любой части Вселенной.

## СТВОРАЖИВАНИЕ ПО ХОЙЛУ; КРИТЕРИЙ ДЖИНСА

Иерархическое распределение фигурирует и в теории Хойла (см. [229]), согласно которой галактики и звезды образуются посредством каскадного процесса, причем начинается этот процесс с однородного газа.

Рассмотрим газовое облако массы  $M$ , нагретое до температуры  $T$  и распределенное с однородной плотностью внутри шара радиуса  $R$ . Как показал Джинс, при  $M_0/R_0 = JkRT/G$  возникает «критическая»

ситуация. (Здесь  $k$  — постоянная Больцмана, а  $J$  — числовой коэффициент.) Находясь в критическом состоянии, первичное газовое облако нестабильно и неизбежно должно сжаться.

Хойл постулирует, что (а) величина  $M_0/R_0$  достигает критического значения где-то в самом начале, (б) сжатие прекращается, когда объем газового облака уменьшается до  $1/25$  от первоначального объема, и (в) каждое облако на этом этапе распадается на пять меньших облаков с одинаковыми размерами, массами  $M_1 = M_0/5$  и радиусами  $R_1 = R_0/5$ . То есть процесс приходит к тому же месту, на каком начался: результатом его является нестабильное состояние, за которым следует второй этап сжатия и разделения, затем — третий и т. д. Створаживание прекращается лишь тогда, когда облака становятся настолько непрозрачными, что задерживают образующееся при сжатии газа тепло внутри.

Как и в различных других областях, в которых встречаются подобные каскадные процессы, я предлагаю и к этому случаю применить общую терминологию, т. е. пять облаков мы будем называть *творогом*, а сам каскадный процесс — *створаживанием*. Как я уже упоминал при введении последнего термина, я просто не мог удержаться от аллюзий с *галактиками*.

Фурнье ради удобства графического изображения своей модели вводит  $N = 7$ , Хойл же утверждает, что физически обоснованным является значение  $N = 5$ . Детализация геометрической иллюстрации Фурнье выходит за всякие — разумные или необходимые — рамки. Высказывания Хойла относительно пространственной структуры творога, напротив, довольно туманны. Детальной реализации модели Хойла нам придется подождать до главы 23, где мы рассмотрим случайное створаживание. Как бы то ни было, упомянутые расхождения не имеют принципиального значения: главным является тот факт, что  $r = 1/N$ , т. е. показатель  $D = 1$  должен стать неотъемлемой частью нашего построения, если мы хотим, чтобы створаживание завершалось тем же состоянием, с которого оно начиналось, — а именно, нестабильностью Джинса.

Кроме того, если длительность первого этапа принять за 1, то, согласно данным по газовой динамике, длительность  $m$ -го этапа составит  $5^{-m}$ . Следовательно, общая длительность всего процесса, состоящего из бесконечного количества этапов, не превышает 1, 2500.

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОДХОДОВ ФУРЬНЕ И ХОЙЛА К ВЫВОДУ $D = 1$

На границе нестабильного газового облака, удовлетворяющего критерию Джинса, скорость и температура связаны соотношением  $V^2/2 = JkT$ , так как  $GM/R$  равно  $V^2/2$  (Фурнье), и  $JkT$  (Джинс). Вспомним теперь о том, что в статистической термодинамике температура

газа прямо пропорциональна среднеквадратической скорости его молекул. Значит, из комбинации критериев Фурнье и Джинса можно предположить, что на границе облака скорость падения макроскопического объекта прямо пропорциональна средней скорости его молекул. Тщательный анализ роли температуры в критерии Джинса непременно покажет, что эти два критерия эквивалентны. < Вероятнее всего, аналогия распространяется и на справедливость отношения  $M(R) \propto R$  внутри галактик, о чем сообщает Валленквист в [583]. ►

## ПОЧЕМУ $D = 1, 23$ , А НЕ $D = 1$ ?

Расхождение между эмпирическим значением  $D = 1, 23$  и теоретическим значением Фурнье и Хойла  $D = 1$  поднимает важную проблему. П. Дж. Э. Пиблс рассмотрел ее в 1974 г. с позиций теории относительности. В его труде [467] получили исчерпывающее освещение физический и статистический (но не геометрический) аспекты упомянутой проблемы.

## ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ НЕБА

Небо — это проекция Вселенной. Для получения этой проекции каждая точка Вселенной сначала описывается сферическими координатами  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\phi$ , а затем координата  $\rho$  заменяется на 1. Если Вселенная представляет собой фрактал с размерностью  $D$ , а начало системы отсчета принадлежит этой самой Вселенной (см. главу 22), то структура проекции, как правило, определяется следующей альтернативой:  $D > 2$  подразумевает, что проекция покрывает некую ненулевую область неба, в то время как  $D < 2$  означает, что сама проекция имеет фрактальную размерность  $D$ . < Как показано на рис. 141 и 143, «правило» не лишено исключений, обусловленных структурой фрактала и/или выбором точки отсчета. О таких правилах часто говорят «истинно с вероятностью 1». ►

## ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ЭФФЕКТА ПЫЛАЮЩЕГО НЕБА (НЕВЕРНО НАЗЫВАЕМОГО ПАРАДОКСОМ ОЛЬБЕРСА)

Правило из предыдущего раздела имеет непосредственное отношение к мотивации, побуждавшей различных исследователей (включая Фурнье) открывать собственные варианты фрактальной Вселенной. Они понимали, что такие вселенные геометрически «отменяют» эффект пылающего неба, который еще часто (но неверно) называют парадоксом Ольберса. Если допустить, что распределение небесных тел равномерно (т. е.  $D = 3$  во всех масштабах), то небо над нами должно быть почти равномерно освещено и ночью, и днем, причем яркость этого освещения должна быть сравнима с солнечной.

Парадокс этот физиков больше не интересует, будучи сведен на нет теорией относительности, теорией расширяющейся Вселенной и дру-



гими соображениями. Однако его кончина имела занятный побочный эффект: многочисленные комментаторы принялись цитировать свои излюбленные объяснения эффекта пылающего неба — одни в надежде оправдаться за пренебрежительное отношение к кластеризации, другие же, напротив, напрочь отрицая ее реальность. Очень странная, надо сказать, точка зрения. Даже если предположить, что кластеризация галактик никак не связана с отсутствием эффекта пылающего неба, она все равно существует — и требует надлежащего изучения. К тому же, как мы увидим в главе 32, концепция расширяющейся Вселенной совместима не только со стандартной, но и с фрактальной гомогенностью.

Эффект пылающего неба объясняется очень просто. Поскольку количество излучаемого звездой света прямо пропорционально площади ее поверхности, количество света, достигающее наблюдателя, находящегося от звезды на расстоянии  $R$ , должно быть  $\propto 1/R^2$ , но площадь видимой поверхности звезды также  $\propto 1/R^2$ . Таким образом, отношение количества света к видимому сферическому углу не зависит от  $R$ . Кроме того, если распределение звезд во Вселенной равномерно, то практически любое направление взгляда рано или поздно встретит какую-нибудь звезду. Следовательно, небо освещено звездным светом равномерно и выглядит пылающим. (Лунный диск в этом случае образует исключительно *темную* область — по крайней мере, при отсутствии атмосферной диффузии.)

Если же допустить, что Вселенная фрактальна и что ее размерность  $D < 2$ , то парадокс разрешается сам собой. В этом случае проекция Вселенной на небесный свод является фрактальным множеством той же размерности  $D$ , т. е. множеством нулевой площади. Даже если звезды имеют ненулевой радиус, большая часть направлений уходит в бесконечность, не встречая на своем пути ни одной звезды. Если смотреть вдоль этих направлений, то мы увидим только черноту ночного неба. Если за интервалом, в котором  $D < 3$ , следует интервал, в котором  $D = 3$ , то фон неба будет не строго черным, но чрезвычайно слабо освещенным.

На эффект пылающего неба обратил внимание еще Кеплер вскоре после того, как Галилей в «Звездном послании» благожелательно отозвался об идее безграничной Вселенной. В своей «Беседе со звездным посланцем» (1610) Кеплер высказал следующее возражение: «Нимало не колеблясь, Вы заявляете, что взгляду доступны более 10 000 звезд... Если это так и если [звезды] той же природы, что и наше Солнце, то почему все эти солнца в совокупности не превосходят наше Солнце в яркости?... Может быть их затмевает эфир? Ни в малейшей степени... Совершенно очевидно, что наш мир никоим образом не может принадлежать беспорядочному рою из бесчисленных иных миров» (см. [500], с. 34–35).

Вывод был довольно спорный, однако об аргументации не забыли — свидетельством тому может служить замечание Эдмунда Галлея (сделанное им в 1720 г.): «Я слышал еще об одном возражении, которое гласит, что если бы число неподвижных звезд было более чем конечным, то весь свод их видимой сферы сплошь светился бы». Позднее это возражение обсуждалось де Шезо и И. Г. Ламбертом, однако авторство его приписали большому другу Гаусса немецкому астроному Ольберсу. Термин «парадокс Ольберса», которым с тех пор называют это противоречие, скандален, но симптоматичен. Результаты наблюдений, попавшие в разряд «не подлежащих классификации» (см. с. 51), часто приписываются первому же представителю Официального Большинства, который украсит их вполне классифицируемой оберткой, пусть даже и временной. Обсуждение предмета в исторической перспективе можно найти в [160, 438, 445, 108, 601, 239, 82, 197].

## ЗАМЕЧАНИЕ О НЬЮТОНОВСКОМ ТЯГОТЕНИИ

Преподобный Бентли все донимал Ньютона одним наблюдением, тесно связанным с эффектом пылающего неба: если распределение звезд однородно, то сила, с какой они действуют друг на друга, бесконечна. Можно добавить, что их гравитационный потенциал также бесконечен. И что любое распределение, в котором  $M(R) \propto R^D$ , даст при больших  $R$  бесконечный потенциал во всех случаях, кроме  $D < 1$ . Современная теория потенциала (теория Фростмана) подтверждает тот факт, что между ньютоновским тяготением и значением  $D = 1$  существует некая особенная связь. Полученный Фурнье и Хойлом показатель  $D = 1$  также следует отнести к проявлениям этой связи. ◁ Положение Фурнье о том, что «гравитационный потенциал на поверхности сферы всегда одинаков», является центральным в современной теории потенциала. ►

## ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

◁ У де Вокулера (см. [104]) сказано: «Согласно теории относительности, следует считать, что для того, чтобы шар из стационарного вещества был видимым в оптическом диапазоне, его радиус  $R$  должен быть больше предела Шварцшильда  $R_M = 2GM/c^2$ , где  $c$  — скорость света. На графике зависимости средней плотности  $\rho$  различных космических систем от их характеристического радиуса  $R$  точка  $\rho_M = 3c^2/8\pi GR_M^2$  определяет верхний предел. Отношение  $\rho/\rho_M$  можно назвать коэффициентом заполнения Шварцшильда. Для наиболее распространенных астрономических тел (звезд) или систем (галактик) коэффициент заполнения очень мал, порядка  $10^{-4} \div 10^{-6}$ ». Квадрат отношения скоростей, постулированный Фурнье, равен  $(300)^{-2} \sim 10^{-5}$  — как раз в середине упомянутого интервала. ►

## АГГЛЮТИНИРОВАННАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ ВСЕЛЕННАЯ?

Многие исследователи полагают, что можно объяснить образование звезд и других небесных объектов с помощью *восходящего* каскада (т. е. постепенной агглютинации сильно рассеянных частиц пыли во все большие куски), не желая ничего слышать о *нисходящем* каскаде à la Хойл (т. е. постепенной фрагментации очень больших и рассеянных масс на все меньшие части).

Похожая альтернатива возникает в связи с каскадами, постулированными в теории турбулентности (см. главу 10). Ричардсонов каскад протекает по нисходящей ко все более мелким вихрям, однако в процессе могут участвовать и восходящие каскады (см. главу 40, раздел ЛЬЮИС ФРАЙ РИЧАРДСОН). Таким образом, можно надеяться, что взаимоотношения между нисходящими и восходящими каскадами получат вскоре надлежащее объяснение.

## ФРАКТАЛЬНЫЕ МАССИВЫ ТЕЛЕСКОПОВ

Вряд ли можно найти более подходящий завершающий штрих для этой дискуссии, чем замечание относительно инструментов, с помощью которых производится наблюдение галактик. Дайсон [126] предлагает для улучшения качества наблюдения заменять большие одиночные телескопы массивами из малых телескопов. Диаметр каждого из малых телескопов должен составлять около 0,1 м (размер наименьшего оптически существенного атмосферного возмущения), их центры должны образовывать фрактально иерархическую схему, а соединение между телескопами обеспечат интерферометры Карри. Грубый анализ приводит к выводу, что в качестве подходящего значения размерности следует взять  $2/3$ . Вот заключение самого Дайсона: «Трехкилометровый массив из 1024 десятисантиметровых телескопов, соединенных между собой 1023 интерферометрами, — не самое практичное на сегодняшний день предложение. [Я выдвинул его] в качестве теоретической идеи, чтобы показать, что здесь, в принципе, можно сделать».

## ОБЗОР СЛУЧАЙНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК

Если верить тому, что можно эффективно описать распределение галактик с помощью нечаянно обнаруженных фрактальных моделей, не отличающихся ни сложностью, ни универсальностью, не стоит удивляться, что намеренно фрактальные случайные модели могут снабдить нас гораздо более эффективными описаниями. Начнем с того, что мы сможем значительно лучше понять створаживание Хойла, рассмотрев

его в надлежащем окружении, т. е. среди случайных фракталов (см. главу 23). Еще большей значимостью обладают, на мой взгляд, разработанные мною случайные модели, о которых мы поговорим в главах с 32 по 35. Один из доводов в пользу рассмотрения нескольких моделей заключается в том, что за улучшение качества описания приходится «платить» возросшей сложностью. Второй довод — каждая модель строится на особой фрактальной пыли, каждая из которых заслуживает отдельного рассмотрения. Рассмотрим вкратце эти модели в логическом порядке.

Примерно в 1965 г. я задался целью снабдить соотношение  $M(R) \propto R^D$  при  $D < 3$  соответствующей моделью, в которой «центр Вселенной» отсутствовал бы как понятие. Впервые я достиг этой цели с помощью модели случайного блуждания, описываемой в главе 32. Затем, в качестве альтернативы, я разработал модель трем, сущность которой заключалась в том, что из пространства вырезалась некая совокупность взаимно независимых и *размещенных случайным образом* трем *случайного* радиуса, причем верхняя граница радиуса могла достигать верхнего порога  $L$ , который мог быть конечным или бесконечным.

Поскольку обе модели были выбраны исключительно из соображений формальной простоты, меня приятно удивило наличие у них прогнозирующей ценности. Мои теоретические корреляционные функции [383] оказались в хорошем согласии с подобранными по кривым функциями, приведенными у Пиблса (см. [467], с. 243–249). < Точнее, два моих приближения совпали на двухточечной корреляции, случайные блуждания дали хорошую трех- и плохую четырехточечную корреляции, а сферические тремеры оказались на высоте во всех известных корреляциях. ►

К сожалению, примеры, генерируемые этими моделями, выглядят совершенно нереалистично. Воспользовавшись понятием, которое я разработал специально для этой цели и о котором расскажу в главе 35, можно сказать, что мои ранние модели демонстрируют неприемлемые лакунарные свойства. В случае модели трем этот недостаток можно исправить, введя более сложные формы трем. Для модели случайного блуждания я использовал менее лакунарный «субординатор».

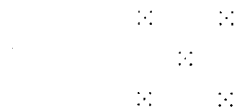
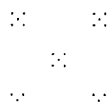
Таким образом, изучение скоплений галактик значительно стимулировало развитие фрактальной геометрии. В настоящее же время диапазон применений фрактальной геометрии при исследовании скоплений галактик значительно расширился, выйдя далеко за рамки тех генеральных убожеств и отладок, что мы предприняли в этой главе.

## ОГРАНЕННЫЕ АЛМАЗЫ, ПОХОЖИЕ НА ЗВЕЗДЫ

Распределение алмазных залежей в земной коре очень напоминает распределение звезд и галактик на небесном своде. Представьте себе большую карту мира, на которой каждая алмазная копь, каждое богатое

месторождение — разрабатываемое сейчас или уже заброшенное — отмечено булавкой. Рассматривая карту с достаточно большого расстояния, мы увидим, что плотность распределения булавок чрезвычайно неравномерна. Тут и там разбросано несколько отдельных булавок, однако большая часть концентрируется в немногочисленных благословенных (или проклятых) областях. Поверхность земли внутри этих областей, в свою очередь, вовсе не вымощена равномерно алмазами. Взглянув на каждую из них вблизи, мы вновь увидим, что большая часть территории остается пустой, в то время как немногочисленные рассеянные подобласти демонстрируют значительно возросшую концентрацию алмазов. Этот процесс можно продолжать на протяжении нескольких порядков величины.

Не возникает ли у вас неодолимого желания применить в этом контексте концепцию створаживания? Со своей стороны скажу, что подобная модель существует, предложил ее де Вис, а рассмотрим мы ее в главе 39 в разделе НЕЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЫ.



### **Рис. 141. ПРОЕКЦИЯ МУЛЬТИВСЕЛЕННОЙ ФУРЬЕ (РАЗМЕРНОСТЬ $D \sim 0,8270$ )**

На этой иллюстрации представлены в масштабе как проекция, так и «экваториальное» сечение Вселенной размерности 1, описанной в тексте главы. См. также рис. 143.

В книге Фурнье [152] к этой иллюстрации предлагается следующее пояснение: «Мультивселенная, построенная по принципу креста или восьмигранника, не является планом нашего мира, но помогает показать возможность существования бесконечного ряда подобных последовательных вселенных без возникновения эффекта «пылающего неба». *Количество материи в каждой мировой сфере прямо пропорционально ее радиусу.* Это условие является необходимым для соблюдения законов тяготения и излучения. В некоторых направлениях небо выглядит совершенно черным — несмотря на то, что ряд вселенных бесконечен. «Мировым числом» в данном случае является  $N = 7$ , а не  $10^{22}$ , как в реальном мире».

В терминах, вводимых в главе 34, вселенная с  $D = 1$  и  $N = 10^{22}$  обладает очень низкой лакунарностью, но чрезвычайно стратифицирована. ■

---

### **Рис. 143. ПЛОСКАЯ ВСЕЛЕННАЯ ФУРЬЕ (РАЗМЕРНОСТЬ $D = 1$ )**

Если мы попытаемся передать рис. 141 в точном масштабе, то его не только будет очень сложно напечатать и рассмотреть, он еще и окажется способен ввести зрителя в заблуждение. В самом деле, на нем изображена вовсе не Вселенная с размерностью  $D = 1$ , а всего лишь ее проекция на плоскость, причем размерность этой проекции равна  $D = \ln 5 / \ln 7 \sim 0,8270 < 1$ . Поэтому, дабы не оставить ложного впечатления, спешим представить регулярную плоскую конструкцию в духе Фурнье с размерностью  $D = 1$  и коэффициентом подобия  $1/r = 5$  вместо  $1/r = 7$ . Построение продолжено на один этап дальше, чем это возможно на рис. 141. ■

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× × ×  
× × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× × ×  
× × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× × ×  
× × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× × ×  
× × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

× × ×  
× × ×

× ×      × ×  
× ×      × ×  
× ×      × ×

## 10 ◊ ГЕОМЕТРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ; ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

Исследование турбулентности — одна из старейших, сложнейших и наиболее неблагодарных глав в истории физики. Простого здравого смысла и кое-какого опыта достаточно, чтобы показать, что в одних условиях поток газа или жидкости остается гладким (в специальной терминологии — «ламинарным»), а в других — нет. Вот только где провести границу? Следует ли обозначать термином «турбулентность» все негладкие потоки, включая большую часть метеорологических и океанографических феноменов? Или лучше будет сузить значение этого термина до какого-то одного класса, и если да, то до какого? Создается впечатление, что у каждого ученого имеются собственные ответы на эти вопросы.

К счастью, нам не нужно разбираться здесь с этими расхождениями во мнениях, так как мы намерены заниматься лишь бесспорно турбулентными потоками, самой заметной характеристикой которых является полное отсутствие сколько-нибудь определенного масштаба длины: в рамках одного процесса соседствуют «вихри» всевозможных размеров. Эта характерная черта хорошо видна на рисунках Леонардо и Хокусая. Она указывает на то, что турбулентность глубоко чужда духу «старой» физики, которая имела дело лишь с явлениями, имеющими вполне определенный масштаб. И та же самая причина включает изучение турбулентности в круг наших непосредственных интересов.

Кому-то из читателей, наверное, известно, что практически все исследователи турбулентности сосредоточивались на *аналитическом* рассмотрении потока жидкости, совершенно не касаясь *геометрической* стороны проблемы. Хочется верить, что эта несбалансированность не отражает предубежденного отношения к геометрии. По сути дела, многие геометрические формы, участвующие в турбулентности, легко увидеть или сделать видимыми, и они прямо-таки напрашиваются на надлежащее описание. Однако им не удавалось привлечь к себе заслуженного внимания до появления фрактальной геометрии. Потому что, как я с самого начала и предполагал, турбулентность включает в себя множество фрактальных аспектов; о некоторых из них мы поговорим в этой и последующих главах.



Здесь необходимо сделать две оговорки. Во-первых, мы оставим в стороне проблему возникновения турбулентности в ламинарном потоке. У меня есть серьезные основания полагать, что в это возникновение также вовлечены некоторые, весьма важные, фрактальные моменты, однако они еще недостаточно разъяснены и поэтому их лучше рано обсуждать здесь. Во-вторых, мы не намерены затрагивать такие периодические структуры, как ячейки Бенара и дорожки Кармана.

Начинается глава с призывов о более геометрическом подходе к турбулентности и об использовании при ее исследовании фракталов. Призывы эти многочисленны, но весьма кратки, так как включают в себя в основном предположения с очень небольшим (пока) количеством практических результатов.

После этого мы сосредоточимся на проблеме перемежаемости, которую я довольно активно исследовал. Самый важный из моих выводов состоит в том, что область рассеяния, т. е. пространственное множество, на котором концентрируется турбулентное рассеяние, может быть смоделировано фракталом. Из произведенных с различными целями измерений можно заключить, что размерность  $D$  этой области лежит где-то в районе 2, 5–2, 6, но, вероятно, не превышает 2, 66.

К сожалению, у нас не получится построить точную модель, пока мы не определим топологические свойства области рассеяния. В частности, представляет ли она собой пыль, извилистую разветвленную кривую (вихревую трубу) или волнистую слоистую поверхность (вихревой лист)? Первое предположение маловероятно, а второе и третье предполагают модели, похожие на разветвленные фракталы из главы 14. Однако принять такое решение мы с вами пока не можем. Прогресс на новом фрактальном фронте никак не помогает нам разобраться с фронтом старым, топологическим. Наши знания о геометрии турбулентности все еще пребывают в зачаточном состоянии.

Большая часть материала этой главы не требует какой-либо специальной подготовки. ◁ Но специалист наверняка заметит, что часть фрактального анализа турбулентности представляет собой *геометрический* аналог *аналитического* анализа корреляций и спектров. Отношения между теориями турбулентности и вероятности — старая история. В самом деле, самые первые исследования Дж. И. Тейлора оказались вторым по значимости (после броуновского движения Перрена) фактором, оказавшим серьезное влияние на создание Норбертом Винером математической теории стохастических процессов. Спектральный анализ уже давно вернул (даже с процентами) все, что он «занимал» в тогдашних исследованиях турбулентности. Настало время и для теории турбулентности воспользоваться достижениями современной стохастической геометрии. В частности, спектр Колмогорова имеет геометрический аналог, который мы рассмотрим в главе 30. ►

## ОБЛАКА, КИЛЬВАТЕРНЫЕ СЛЕДЫ, РЕАКТИВНЫЕ СТРУИ И Т. Д.

Общей задачей геометрии турбулентности является описание формы границы области, внутри которой проявляется какое-либо характерное свойство жидкости. В качестве яркого примера таких областей можно назвать нагромождение друг на друга валов как в обычных (водяных) облаках, так и в облаках, образуемых вулканическими извержениями или ядерными взрывами. На этом этапе нашего эссе и в самом деле трудно избавиться от ощущения, что раз уж существует интервал масштабов, в котором облако, можно сказать, имеет вполне определенную границу, то границы облаков просто *обязаны* быть фрактальными поверхностями. Это относится и к картинке, которую дает наступающий шторм на экране радара. (Первое подтверждение этого предположения можно найти в главе 12.)

И все же я предпочитаю иметь дело с более простыми формами. Мы можем рассмотреть турбулентность внутри ограниченной области, окруженной со всех сторон ламинарной жидкостью — скажем, кильватерный след или реактивную струю. В самом грубом приближении, каждая из этих областей представляет собой цилиндр. Если же рассмотреть ее границу подробнее, мы обнаружим целую иерархию выступов и впадин, величина которых возрастает с увеличением так называемого числа Рейнольдса — классической гидродинамической характеристики. Эта отчетливо видимая сложная «локальная» структура больше напоминает не цилиндр, а веревку с множеством плавающих вокруг распущенных концов. Типичное поперечное сечение такой фигуры уже совершенно не похоже на окружность, а оказывается ближе к кривой Коха и еще ближе к наиболее изрезанным береговым линиям с островами, рассмотренным в главах 5 и 28. В любом случае, граница реактивной струи выглядит фрактальной. Топология присутствующих в ней вихревых колец, безусловно, интересна, но не описывает всей структуры.

Прежде чем мы перейдем к следующему замечанию, я хотел бы, чтобы читатель представил мысленным взором картину какой-нибудь кильватерной струи — скажем, симпатичное нефтяное пятно, расплывающееся за вышедшим из строя танкером. Описывающий такую струю, в самом грубом приближении, «цилиндр» приобретает довольно сложную структуру: он совершенно теряет свою цилиндрическую форму, так как его поперечное сечение быстро расширяется по мере удаления от корабля, а его уже вовсе не прямая «ось» начинает демонстрировать всевозможные изгибы, типичный размер которых также увеличивается с увеличением расстояния от корабля.

Похожие свойства были обнаружены и в турбулентности, вызванной сдвигом относительно друг друга жидких масс, находящихся в соприкосновении (см. [56, 58]). Получающиеся в результате сцепленные

структуры («животные») вызывают сейчас широкий интерес. Их внешняя форма лишена каких бы то ни было фрактальных признаков, однако иерархия тонких деталей изгибов границы между жидкостями демонстрирует поразительно фрактальную структуру.

В качестве еще одного примера такого рода можно привести знаменитое Красное пятно в атмосфере Юпитера.

Похожие, но все же другие задачи встают перед исследователем Гольфстрима. Гольфстрим не является единым морским течением с четкой границей — он делится на множество извилистых ответвлений, причем эти ветви, в свою очередь, также делятся и ветвятся. Было бы весьма полезно получить подробное описание его склонности к ветвлению — нет никакого сомнения, без фракталов здесь не обошлось.

## ИЗОТЕРМЫ, ДИСПЕРСИЯ И Т. Д.

Интересно также было бы исследовать форму поверхностей постоянной температуры или изоповерхностей любой другой скалярной характеристики потока. Изотермы можно очерчивать с помощью поверхности, окружающей быстроразмножающийся планктон, который живет только при температуре воды, превышающей  $45^\circ$ , и занимает весь доступный ему объем. Граница такого пузыря чрезвычайно изрезана и искривлена; в конкретной модели из главы 30 граница очевидно фрактальна.

Целый широкий класс геометрических задач возникает в том случае, когда среда турбулентна во всем своем объеме; при этом взаимодействующие области отличает друг от друга какая-либо «пассивная» или инертная характеристика, которая никак не влияет на поток. Лучшим примером здесь будет рассеиваемая турбулентностью капля краски. Во все стороны от капли расходятся хорошо видимые бесконечно ветвящиеся языки всевозможных форм и размеров — и ни существующие методы анализа, ни стандартная геометрия не смогут оказать нам сколько-нибудь существенную помощь в описании образующихся фигур. На рис. 85 и в статье [386] вы найдете доводы в пользу фрактальной природы этих фигур.

## ДРУГИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

**Турбулентность при ясном небе.** Изученные мною разрозненные источники дают возможность сделать вывод, что несущее множество этого феномена фрактально.

**Поток вдоль фрактальной границы.** Еще один типичный случай, в котором гидромеханике не обойтись без фракталов (см. рис. 74 и 104).

**Растягивание вихрей.** Движение жидкости заставляет вихри растягиваться, а растягиваемый вихрь должен сплющиваться, чтобы сохранить фиксированный объем при увеличивающейся длине. Я предполагаю, что в пределах масштабной инвариантности потока форма вихря стремится к фрактальной.

**Траектория частицы в жидкости.** В грубом приближении, навеянном птолемеевой моделью планетарного движения, представим себе частицу, которую несет вертикально вверх с единичной скоростью общее течение жидкости и которая испытывает возмущающее воздействие иерархии вихрей, каждый из которых совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости. Результирующие функции  $x(t) - x(0)$  и  $y(t) - y(0)$  представляют собой суммы косинусоид и синусоид. Если высокочастотные члены очень слабы, то траектория частицы непрерывна и дифференцируема, а значит спрямляема, и ее размерность равна  $D = 1$ . Если же высокочастотные члены сильны и достигают 0, то траектория фрактальна с размерностью  $D > 1$ . Предположив, что вихри самоподобны, мы получаем траекторию, идентичную знаменитому пугалу математического анализа: функции Вейерштрасса (см. главы 2, 39 и 41). Это приводит нас к вопросу: можно ли связать переход всего объема жидкости в состояние турбулентности с условиями, при которых траектория движущейся в этой жидкости частицы фрактальна?

## ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Турбулентность в конце концов заканчивается рассеянием: благодаря вязкости жидкости энергия видимого движения преобразуется в тепло. В ранних теориях предполагалось, что это рассеяние однородно в пространстве. Однако надежды на то, что модель «гомогенной турбулентности» может иметь хоть какой-то смысл были рассеяны Ландау и Лифшицем [286], которые отмечают, что одни области характеризуются высокой степенью рассеяния, тогда как в других по сравнению с первыми рассеяние практически отсутствует. Это означает, что хорошо известное свойство ветра налетать порывами отражено — и даже более последовательным образом — и в меньших масштабах.

Этот феномен, получивший название *перемежаемость*, был впервые исследован в работе [19], с. 253. См. также [18] (раздел 8.3), [433] и [434]. Особенно ярко выражена перемежаемость при очень больших числах Рейнольдса, т. е. когда внешний порог турбулентности достаточно велик по отношению к ее внутреннему порогу (например, на звездах, в океанах и в атмосфере).

Области, в которых сосредоточивается рассеяние, весьма удобно называются *несущими* или *опорными*.

Тот факт, что мы сводим в этом эссе вместе перемежаемость турбулентности и распределение галактик, совершенно естествен и даже не нов. Некоторое время назад физики (например, [579]) предприняли попытку объяснить происхождение галактик с помощью турбулентности. Понимая, что гомогенная турбулентность не сможет объяснить звездной перемежаемости, фон Вайцзер набросал несколько поправок в духе модели Фурнье (или Шарлье, см. главу 9), а, значит, и в духе представляемой здесь теории. Если бы сегодня кто-нибудь занялся подобной объединяющей деятельностью, он вполне смог бы установить физическую связь между двумя типами перемежаемости и определить соответствующие самоподобные фракталы.

Одной из целей такого объединения может быть соотнесение размерности распределения галактик ( $D \sim 1,23$ , как нам известно) с размерностью, характеризующей турбулентность (где-то в районе 2,5–2,7).

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Как мы заметили, один и тот же термин «турбулентность» применяется, как ни странно, для обозначения нескольких различных феноменов. Возможно, факт отсутствия четкого определения станет более понятным, если допустить — а я не просто допускаю, я заявляю, что так оно и есть, и намерен это доказать, — что подходящее определение турбулентности требует участия фракталов.

При слове «турбулентность» перед нашим мысленным взором появляется картинка, которая не меняется вот уже почти сто лет, с тех самых пор как Рейнольдс впервые описал этот феномен по отношению к потоку жидкости в трубе: когда давление впереди потока мало, движение регулярно и «ламинарно», как только давление возрастает до определенной величины, вся регулярность неожиданно куда-то пропадает. В этом классическом примере носителя турбулентного рассеяния либо нет вообще, «пустое множество», либо им является вся труба целиком. И в том, и в другом случае отсутствуют не только достойные изучения геометрические особенности, но и сколько-нибудь веская причина для определения турбулентности.

С кильватерными струями все не так просто. Здесь существует граница между зоной турбулентности и окружающей ее водой, и геометрические особенности этой границы уже стоит изучить. Однако граница эта снова столь четко выражена, что не возникает насущной необходимости в отыскании «объективного» критерия для определения турбулентности.

Полностью установившаяся турбулентность в аэродинамической трубе также не представляет особых сложностей для исследователя, поскольку, как и в трубе Рейнольдса, зона турбулентности, по всей видимо-

сти, охватывает весь доступный объем. Тем не менее, используемые для достижения этого эффекта процедуры иногда весьма любопытны, если верить кое-каким упорно циркулирующим слухам. Говорят, что когда аэродинамическая труба только что запущена, она совершенно не годится для изучения турбулентности. Турбулентность не только не желает заполнять весь доступный ей объем, она и сама выглядит «турбулентной», проявляясь в нерегулярных и неконтролируемых порывах. Только после долгих трудов удается стабилизировать всю систему, превратив ее в некое подобие трубы Рейнольдса. Благодаря этому факту я числю себя среди тех, кому интересно, в какой степени неперемежающаяся «лабораторная турбулентность» в аэродинамических трубах может считаться тем же физическим явлением, что и перемежающаяся «естественная турбулентность» в атмосфере. Вывод: необходимо определиться с терминами.

К решению этой задачи мы подойдем кружным путем, начав с нечетко определенной концепции турбулентности и рассмотрев одномерные данные о скорости в точке. Приблизительный анализ таких данных может быть проиллюстрирован движениями центра тяжести большого самолета. Всякое отклонение самолета от своего пути указывает на наличие в атмосфере определенных областей с сильным рассеянием. Маленький самолет может послужить более чувствительным индикатором: он «чувствует» такие турбулентные потоки, которые никак не влияют на движение большого самолета, а каждый удар, претерпеваемый большим самолетом, воспринимается маленьким как целая серия более слабых ударов. Таким образом, если тщательно рассмотреть область сильного рассеяния в поперечном сечении, то станут ясно видны ламинарные включения, а при увеличении разрешающей способности анализа станут доступны и более мелкие включения.

Каждый этап требует переопределения того, что есть турбулентность. Понятие *турбулентного интервала данных* приобретает смысл, если понимать его как «интервал данных, который нельзя охарактеризовать полным отсутствием турбулентности». С другой стороны, более строгое понятие *целиком турбулентного интервала данных* представляется лишенным видимого смысла. По мере прохождения последовательных этапов анализа мы получаем все более ярко выраженную турбулентность на протяжении все меньшей доли от всего интервала данных. Объем носителя рассеяния, судя по всему, сокращается. Нашей следующей задачей будет построение модели этого носителя.

## РОЛЬ САМОПОДОБНЫХ ФРАКТАЛОВ

Как я уже говорил, меня не удивляет тот факт, что на сегодняшний день по-настоящему исследованы очень немногие геометрические аспекты турбулентности, так как ученые имели в своем распоряжении

только евклидовы методы. Чтобы избежать накладываемых ими ограничений, многие использовали в своих описаниях доевклидову терминологию. Например, в трудах по перемежаемости наблюдается необычно частое употребление таких «терминов», как *пятнистый* и *комковатый*, а Бэтчелор и Таунсенд [19] полагают, что «существует четыре возможных категории фигур: пузыри, пруты, бруски и ленты». Некоторые лекторы используют также (правда, чаще в устной речи) такие термины, как *фасоль*, *спагетти* и *салат* — образная терминология, не скрывающая мощи стоящей за ней геометрии.

Что касается тех исследований, которые я вел с 1964 г. и впервые представил на Киотском симпозиуме 1966 г. (см. [353]), то они усовершенствуют классический геометрический инструментарий добавлением в него самоподобных фракталов.

Отстаивать использование фракталов — шаг довольно новый и радикальный, однако обязать фракталы турбулентности быть самоподобными вполне укладывается в ортодоксальные рамки, поскольку само понятие самоподобия было впервые введено в обиход для описания турбулентности. Пионером в этой области выступил Льюис Фрай Ричардсон, с которым мы познакомились в главе 5. В 1926 г. [491] Ричардсон ввел концепцию иерархии вихрей, связанных каскадным процессом. (См. также главу 40.)

Кроме того, именно в контексте турбулентности теория каскадов и самоподобия достигла своих прогностических триумфов в период между 1941 и 1948 гг. Главными действующими лицами здесь были Колмогоров, Обухов, Онсагер и фон Вайцзекер, однако традиция связывает достижения этого периода только с именем Колмогорова. Как бы то ни было, где-то между Ричардсоном и Колмогоровым в теории турбулентности произошел некоторый почти незаметный сдвиг.

Если концепция самоподобия вытекает из рассмотрения доступных визуальному восприятию вихрей, то теория Колмогорова уже является чисто *аналитической*. Фракталы же позволяют применить методы самоподобия к *геометрии* турбулентности.

Фрактальный подход следует сопоставить с тем своеобразным фактом, что пузыри, пруты, бруски и ленты, составлявшие вчерашние варианты выбора, не самоподобны. Это, очевидно, и послужило причиной появления высказываний в том смысле, что выбор «примитивен» и что необходимы какие-то *промежуточные* варианты (см., например, [282]).

В голову приходят некоторые возможные произвольные изменения в стандартных формах специально для данного случая. Например, можно расщепить пруты на шнуры, окруженные свободно болтающимися прядями (вспомните аналогичную ситуацию с кильватерными или реактивными струями), и нарезать из брусков тонкие листы с отделяющимися слоями. Можно даже как-нибудь добиться самоподобия этих прядей и слоев.

Однако такое искусственное введение самоподобия никем до сих пор не было предпринято, и я, со своей стороны, считаю это занятие как неперспективным, так и малоприятным. Я предпочитаю следовать совершенно другим путем, предоставляя самому процессу генерировать и общие формы областей, и подробности структуры прядей и слоев. Поскольку в элементарных самоподобных фракталах отсутствует понятие привилегированного направления, мы не будем затрагивать (пока) все те интересные геометрические задачи, которые возникают при комбинации турбулентности и интенсивного движения всей системы.

◁ Обухов [454] и Колмогоров [277] представили в 1962 г. первые аналитические исследования перемежаемости. По своему непосредственному воздействию эти работы почти догнали работы тех же авторов 1941 г. [453, 276], однако в них имеются серьезные ошибки, и вряд ли можно говорить о сколько-нибудь значительной долгосрочной научной ценности этих работ. См. [367, 378, 387] и [280]. ►

## ВНУТРЕННИЙ И ВНЕШНИЙ ПОРОГИ

Благодаря вязкости, внутренний порог турбулентности положителен. А кильватерные и реактивные струи и прочие подобные потоки явно демонстрируют конечный внешний порог  $\Omega$ . Сейчас, однако, очень многие полагают, что в конечности  $\Omega$  следует усомниться. Ричардсон [491] заявляет, что «согласно результатам наблюдений, численные значения [предполагается, что они должны сходиться для образцов с размерами, близкими к  $\Omega$ ] зависят исключительно от того, насколько велика протяженность объема, учитываемого при вычислении. Исследования Дефанта показывают, что в атмосфере предела достичь невозможно». Метеорологи сначала проигнорировали это заявление (слишком поспешное, на мой взгляд), потом просто забыли о нем. Новые данные, приведенные в главе 11, и исследование лакуарности в главе 34 только подтверждают мое убеждение в том, что вопрос пока еще не закрыт.

## СТВОРАЖИВАНИЕ И ФРАКТАЛЬНО ГОМОГЕННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

На предварительном этапе мы можем приблизительно представить несущее множество турбулентности в виде одного из самоподобных фракталов, полученных в предыдущих главах с помощью створаживания. Это створаживание является грубой «дерандомизированной» формой модели Новикова–Стюарта в главе 23. После конечного числа  $m$  этапов створаживающего каскада рассеяние однородно распределяется по  $N = r^{-mD}$  из  $r^{-3m}$  неперекрывающихся субвихрей  $n$ -го порядка, положения которых определяются генератором. Продолжив каскад



до бесконечности, мы получаем предельное однородное распределение рассеяния на фрактале размерности  $D < 3$ . Я думаю, этот предел можно назвать *фрактально* гомогенной турбулентностью.

Гомогенная турбулентность по Дж.И.Тейлору получается при  $D \rightarrow 3$ . Самым выдающимся результатом такого подхода является то, что створаживание не исключает размерности  $D = 3$ , однако допускает и новую возможность:  $D < 3$ .

## ПРЯМОЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ ТОМУ, ЧТО РАЗМЕРНОСТЬ НОСИТЕЛЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ УДОВЛЕТВОРЯЕТ НЕРАВЕНСТВУ $D > 2$

С точки зрения линейных сечений широкие классы неограниченных фракталов ведут себя достаточно просто: сечение почти наверняка пусто при  $D < 2$  и с положительной вероятностью непусто при  $D > 2$ . (В главе 23 доказывается этот вывод для класса простых фракталов.)

Если бы множество-носитель турбулентного рассеяния удовлетворяло неравенству  $D < 2$ , то из предыдущего заявления вытекало бы, что практически ни один из экспериментальных замеров не попадет в зоны турбулентности. Так как этого не происходит, можно предположить, что в реальности  $D > 2$ . Это заключение обладает необычайной силой, поскольку оно опирается на многократно воспроизведенный эксперимент, возможные результаты которого сводятся к альтернативе между «часто» и «никогда».

Предварительный топологический аналог  $D_T > 2$  (см. [387]) выглядит весьма многообещающе, однако слишком специально для того, чтобы подробно рассматривать его на этих страницах.

## ГАЛАКТИКИ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. СРАВНЕНИЕ

Неравенство  $D > 2$  для множества-носителя турбулентного рассеяния и обратное неравенство  $D < 2$  для распределения массы в космосе (см. главу 9) происходят из тесно связанных между собой разных знаков величины  $D - 2$  на типичном сечении фрактала и на его типичной проекции на плоскость (или на небесный свод). Для рассматриваемого в настоящей главе феномена такое сечение должно быть непустым. В главе 9, напротив, было показано, что эффект пылающего неба «отменяется», если большая часть проведенных от Земли прямых линий *так никогда и не встречается* ни с одной звездой. Это означает, что проекция всех звезд на земной небосвод должна иметь исчезающе малую площадь.

Различие между знаками при  $D - 2$  в двух упомянутых проблемах должно иметь самое непосредственное отношение к различию между их структурами.

## (НЕ)РАВЕНСТВО ПОКАЗАТЕЛЕЙ [353, 387]

Множество полезных характеристик фрактально гомогенной турбулентности зависит исключительно от  $D$ . Эта тема рассмотрена в [387], где перемежающаяся турбулентность характеризуется с помощью ряда концептуально различных показателей, связанных некоторыми (не)равенствами. ◁ Аналогичным образом обстоит дело с явлениями, происходящими в критической точке. ►

**Спектральные (не)равенства.** В [353] (где я, кстати, использовал обозначение  $\theta = D - 2$ ) было впервые получено некое (не)равенство; обычно оно выражается через спектр скорости турбулентности, однако здесь мы запишем его в вариационной форме. Внутри фрактально гомогенной турбулентности скорость  $v$  в точке  $x$  удовлетворяет следующему выражению:

$$\langle [v(x) - v(x+r)]^2 \rangle = |r|^{2/3+B},$$

где  $B = (3 - D)/3$ .

В случае гомогенной турбулентности Тейлора  $D = 3$ , а значит,  $B$  обращается в нуль, после чего остается классический показатель Колмогорова  $2/3$ , с которым мы встретимся снова в главе 30.

В [387] также показано, что в более общей модели взвешенного створаживания, описанной в [378],  $B \leq (3 - D)/3$ .

**$\beta$ -модель.** Авторы работы [157] ухитрились нарастить на фрактально гомогенную турбулентность (как она описана в [387]) псевдодинамическую терминологию. Их интерпретация оказалась весьма удобной, хотя математические рассуждения и выводы идентичны моим. Термин « $\beta$ -модель», которым окрестили эту интерпретацию, даже приобрел некую популярность, и теперь его нередко идентифицируют с фрактальной гомогенностью.

## ТОПОЛОГИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ: ВОПРОС ВСЕ ЕЩЕ ОТКРЫТ

В предыдущих главах мы встретили с избытком свидетельств тому, что одно и то же значение  $D$  может характеризовать множества, весьма отличающиеся с точки зрения топологической связности. Топологическая размерность  $D_T$  ставит нижнюю границу для фрактальной размерности  $D$ , однако граница эта очень часто нарушается, причем

величины этих нарушений столь велики, что сама граница теряет всякий смысл. Фигура с фрактальной размерностью в интервале от 2 до 3 может выглядеть и как «лист», и как «линия», и как «пыль», а разнообразие конкретных конфигураций настолько велико, что становится очень сложно подобрать или даже придумать новые названия для них. Например, фрактальные фигуры, в общем и целом напоминающие веревку, могут вырастить настолько плотные «пряди», что в результате получится нечто «большее», чем веревка. Аналогичным образом, фрактальные почти-листья оказываются чем-то большим, чем листья. Возможно также произвольно смешивать их «листовые» и «веревочные» признаки. На интуитивном уровне можно было бы понадеяться на то, что должна существовать некая более тесная связь между фрактальной размерностью и степенью связности, однако эту надежду математики потеряли где-то между 1875 и 1925 гг. Мы обратимся к одной специальной проблеме такого рода в главе 23, но уже сейчас можно сказать, что действительная природа весьма нечеткой связи между этими структурами представляет собой по существу неизведанную территорию.

Вопрос о ветвлении, поднимаемый в главе 14, также очень важен, но его воздействие на исследования турбулентности на настоящий момент пока не выяснено.

**Неравенства эксцесса.** Рассмотрение проблемы связности в [88], [565] и [507] основано на использовании меры перемежаемости, называемой *эксцессом*. Со стороны может показаться, что эти модели имеют дело с фигурами, которые сочетают в себе топологические размерности плоскости (листья) и прямой (пруты). В действительности же топология здесь рассматривается опосредованно, через показатель предсказанного степенного отношения между эксцессом и числом Рейнольдса. К сожалению, такой подход не срабатывает, так как на показатель эксцесса влияют различные добавочные допущения, и, в конечном счете, он зависит исключительно от фрактальной размерности  $D$  фигуры, генерируемой моделью. В [88] предполагается, что значение  $D$  равно топологической размерности, которая постулируется там же,  $D_T = 2$ . Предположение неверно, оно лишь отражает тот факт, что данные фрактальны, а сама модель — нет. В статье [565] постулируется  $D_T = 1$ , но  $D$  при этом принимает дробное значение 2,6, т. е. эта модель включает в себя некий приближенный фрактал. И все же, предпринятая попытка вывести из эксцесса комбинацию интуитивной «фигурной» и топологической размерностей лишена каких бы то ни было оснований.



## 11 ◊ ФРАКТАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Эта глава посвящена первому пересечению фрактальной геометрии Природы с основным направлением математической физики. Тема эта представляется мне настолько важной, что заслуживает отдельной главы. Читатели, интересы которых лежат в других областях, могут эту главу спокойно пропустить и двигаться дальше.

### РАСКОЛ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Основным недостатком текущего состояния теоретических исследований турбулентности является то, что они разделены, как минимум, на две не связанные друг с другом области. В одной царит предложенная Колмогоровым в 1941 г. (см. [276]) весьма успешная феноменология (о которой мы подробно поговорим в главе 30). Вторая имеет дело с дифференциальными уравнениями гидродинамики, выведенными для невязких жидкостей Эйлером, а для вязких — Навье (и Стоксом). Эти области никак не соотносятся между собой. Если «объяснить» и «понять» означает «свести к фундаментальным уравнениям», то теория Колмогорова еще не объяснена и не понята. Решать уравнения о движении жидкости она также не помогает.

На первый взгляд может показаться, будто сделанное мною в предыдущей главе утверждение о том, что турбулентное рассеяние является гомогенным не на всем пространстве, а лишь на некотором фрактальном подмножестве, только углубляет пропасть между областями. *Но я заявлял и заявляю: это не так.* И у меня есть свидетельства в свою защиту.

### ВАЖНОСТЬ ОСОБЕННОСТЕЙ

Припомним процедуру, которая позволяет успешно решать уравнения математической физики. Обычно сначала составляется список, который объединяет результаты, полученные решением уравнения при особых условиях, с результатами, предположенными на основании физических наблюдений. Далее, опуская связанные с этими решениями детали, мы составляем список элементарных «особенностей», характерных для рассматриваемой задачи. Начиная с этого этапа, часто бывает возможно

решать более сложные варианты уравнения в первом приближении посредством идентификации подходящих особенностей и связывания их в требуемую последовательность. Именно так студент-аналитик строит график рациональной функции. Разумеется, стандартные особенности — это стандартные евклидовы множества, т. е. точки, кривые и поверхности.

## ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ — ЭТО ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА [386]

Рассматривая в таком свете сложности, возникающие при описании турбулентности с помощью решений Эйлера и Навье–Стокса, я склонен считать их следствием того факта, что не существует стандартной особенности, которая объясняла бы воспринимаемые нами на интуитивном уровне характеристические признаки турбулентности.

Исходя из этого, я заявляю [386], что турбулентные решения фундаментальных уравнений включают в себя особенности или «почти особенности» совершенно иного рода. Эти особенности представляют собой локально масштабно-инвариантные фрактальные множества, а почти особенности — приближения к ним.

Самым простым основанием для данного утверждения можно считать такое соображение: раз уж стандартные множества оказались неспособны адекватно описать феномен, ничто не мешает попробовать следующие по изученности множества. Существуют, однако, и более конкретные основания.

## НЕВЯЗКИЕ ЖИДКОСТИ (СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА)

**Первое конкретное предположение.** В моем вышеизложенном утверждении говорится, в частности, и о том, что особенности решений уравнений Эйлера представляют собой фрактальные множества.

**Основания.** Эта вера зиждется на одном очень старом правиле: симметрии и другие инвариантности, представленные в уравнении, «должны» быть отражены и в решении уравнения. (Самодостаточное, тщательное и красноречивое описание можно найти в четвертой главе книги Биркгофа «Гидродинамика» [37].) Безусловно, сохранение симметрии ни в малейшей степени не является всеобщим законом Природы, следовательно, здесь нельзя исключать и возможности «нарушения симметрии». Однако давайте предположим, что симметрия сохраняется, и посмотрим, что получится. Поскольку уравнения Эйлера независимы от масштаба, их типичные решения также должны быть независимы от масштаба, причем это условие должно соблюдаться и для любых особенностей, которыми они могут обладать. А так как безуспешность всех предшествующих попыток мы принимаем как свидетельство того,

что эти особенности не являются стандартными точками, линиями или поверхностями, они должны быть фракталами.

Может, конечно же, случиться так, что форма границы и начальные скорости окажутся ограничены неким масштабом. Здесь, однако, следует учитывать еще одну возможность — локальное поведение решений может определяться «принципом отсутствия ощущения границы». В этом случае решения должны быть локально безмасштабны.

**Исследования Александра Чорина.** В 1981 г. Чорин [80] применил к анализу диапазона инерции в полностью установившейся турбулентности метод вихрей, чем весьма серьезно укрепил мои позиции. Чорин установил, что сильно растянутая завихренность собирается в тело уменьшающегося объема, размерность которого  $D \sim 2,5$  вполне согласуется с выводами, сделанными в главе 10. Поправка к колмогоровским показателям,  $B = 0,17 \pm 0,03$ , также согласуется с экспериментальными данными. Из расчетов следует, что решения уравнений Эйлера в трех измерениях становятся несправедливыми при конечном значении времени.

В своей следующей, неопубликованной, работе Чорин подходит еще ближе к экспериментальному значению:  $2,5 < D < 2,6$ .

## ВЯЗКИЕ ЖИДКОСТИ (СЛУЧАЙ НАВЬЕ – СТОКСА)

**Второе конкретное предположение.** Далее я утверждаю, что особенности решений уравнений Навье–Стокса могут быть только фракталами.

**Неравенство размерности.** На интуитивном уровне мы чувствуем, что решения уравнений Навье–Стокса должны непременно быть более гладкими, а значит — менее особыми, нежели решения уравнений Эйлера. Отсюда возникает следующее предположение: размерность особенностей в случае Эйлера превышает таковую в случае Навье–Стокса. Переход к нулевой вязкости можно, вне всякого сомнения, считать особенностью.

**Почти особенности.** Заключительное предположение моего общего утверждения касается пиков рассеяния, входящих в понятие перемежаемости: они представляют собой особенности Эйлера, сглаженные вязкостью.

**Исследования В. Шеффера.** Рассмотрение моих предположений для случая вязких жидкостей было впервые предпринято В. Шеффером; некоторое время назад к нему присоединились и другие исследователи, желающие взглянуть в новом свете на поведение конечного или бесконечного объема жидкости, подчиняющегося уравнениям Навье–

Стокса и обладающего в момент времени  $t = 0$  конечной кинетической энергией.

Шеффер [510] исходит из допущения, что особенности действительно имеют место, и показывает, что они непременно удовлетворяют следующим теоремам. Во-первых, фрактальная размерность их проекции на временную ось не превышает  $1/2$ . Во-вторых, их проекция на пространственные координаты представляет собой в лучшем случае фрактал с размерностью 1.

Впоследствии обнаружилось, что первый из вышеприведенных результатов является следствием одного замечания в старой и довольно известной работе Лере [301], которая внезапно обрывается после получения формального неравенства, из которого как раз и следует первая теорема Шеффера. Хотя вряд ли ее можно назвать следствием — скорее, просто новая формулировка. Однако подобает ли нам относиться к этому свысока? Перенос чужих выводов в терминологически более изящную форму редко (и небезосновательно) расценивается как научное достижение, однако мне кажется, что для данного случая следует сделать исключение. Упомянутое неравенство из теоремы Лере было с практической точки зрения почти бесполезным, пока следствие Мандельброта–Шеффера не представило его миру в должной перспективе.

Все случаи применения размерности Хаусдорфа–Безиковича (во многом, кстати, шаблонные) в последних работах по уравнениям Навье–Стокса могут быть непосредственно выведены из моих предположений.

## ОСОБЕННОСТИ ДРУГИХ ФИЗИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Другие явления, которые, как мне представляется, следует описывать с помощью масштабно-инвариантных фракталов, не имеют ничего общего ни с Эйлером, ни с Навье и Стоксом. Например, распределение галактик определяется уравнениями гравитации. Однако аргумент о сохранении симметрии применим ко всем масштабно-инвариантным уравнениям. В сущности, довольно туманное замечание Лапласа (см. раздел МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПО ЛЕЙБНИЦУ И ЛАПЛАСУ, глава 41) можно теперь (задним числом!) истолковать так, будто оно намекает на тему главы 9.

В более общем смысле, фрактальный характер особенностей можно, скорее всего, проследить в неких обобщенных признаках, общих для самых различных уравнений математической физики. Может, это просто какой-то очень широкий род нелинейности? Мы еще вернемся к этому вопросу в главе 20 — правда, в несколько иной терминологии. ■

# IV $\diamond$ МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ФРАКТАЛЫ

---

## 12 $\diamond$ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДЛИНОЙ, ПЛОЩАДЬЮ И ОБЪЕМОМ

В главах 12 и 13 мы подробно рассмотрим свойства фрактальной размерности на примере многочисленных «мини-прецедентов» различной важности и возрастающей сложности, а в главе 14 покажем, что фрактальная геометрия непременно включает в себя различные концепции за пределами фрактальной размерности.

В настоящей главе мы опишем и применим к различным конкретным случаям фрактальные аналоги, которые я разработал специально для определенных стандартных выводов евклидовой геометрии. Их можно рассматривать как параллельные фрактальным отношениям вида  $M(R) \propto R^D$ , полученным в главах 6, 8 и 9.

### СТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Из того, что длина окружности радиуса  $R$  равна  $2\pi R$ , а площадь диска, ограниченного этой окружностью, составляет  $\pi R^2$ , следует, что

$$(\text{длина}) = 2\pi^{1/2} (\text{площадь})^{1/2}.$$

Соответствующее соотношение для квадрата имеет вид

$$(\text{длина}) = 4 (\text{площадь})^{1/2}.$$

Вообще в любом семействе плоских фигур, геометрически подобных, но имеющих различные линейные размеры, отношение  $(\text{длина})/(\text{площадь})^{1/2}$  представляет собой число, полностью определяемое общей для семейства формой.



Пространство ( $E = 3$ ) предоставляет нам новые альтернативные способы оценки линейной протяженности фигуры с помощью (длины), (площади)<sup>1/2</sup> и (объема)<sup>1/3</sup>, причем отношение между любыми двумя из этих трех величин является параметром фигуры, независимым от единиц измерения.

Эквивалентность различных линейных протяженностей во многих случаях оказывается очень полезной. А ее расширение (включающее время и массу) лежит в основе мощной методики, известной физикам как «анализ размерностей». (Желающим подробнее ознакомиться с основными его особенностями рекомендую прочесть [37].)

## ПАРАДОКСАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

Однако нам известно множество примеров (и их количество неуклонно растет), демонстрирующих, к нашему вящему разочарованию, полное отсутствие эквивалентности между альтернативными линейными протяженностями. Например, мозг млекопитающего характеризуется соотношением

$$(\text{объем})^{1/3} \propto (\text{площадь})^{1/D},$$

где  $D \sim 3$  *значительно больше* ожидаемого значения 2. Измерения длины главной реки бассейна (см. [186]) показывают, что

$$(\text{площадь})^{1/2} \propto (\text{длина})^{1/D},$$

где  $D$  *определенно больше* ожидаемого значения 1. В ранних исследованиях этот последний результат объяснялся тем, что речные бассейны не самоподобны — большие бассейны имеют вытянутую форму, а маленькие несколько сплюснуты. К сожалению, такая интерпретация не согласуется с экспериментальными данными.

Ниже приведено мое объяснение этих и других похожих наблюдений с более убедительных позиций, и моим инструментом будет новое — фрактальное — соотношение между длиной, площадью и объемом.

## ФРАКТАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЛИНОЙ И ПЛОЩАДЬЮ

Для бóльшей наглядности рассмотрим совокупность геометрически подобных островов с фрактальными береговыми линиями размерности  $D > 1$ . Стандартное отношение (длина)/(площадь)<sup>1/2</sup> в этом контексте стремится к бесконечности, но я намерен показать, что оно имеет достойный фрактальный аналог, вполне пригодный для каких угодно

практических целей. Определим длину побережья, измеренную с шагом длины  $G$ , как ( $G$ -длина), а площадь острова, измеренную в единицах  $G^2$  — как ( $G$ -площадь). Учитывая, что зависимость ( $G$ -длины) от  $G$  нестандартна, в отличие от стандартной зависимости ( $G$ -площади) от  $G$ , мы можем записать следующее обобщенное отношение:

$$(G\text{-длина})^{1/D} / (G\text{-площадь})^{1/2}.$$

Я утверждаю, что значение этого отношения одинаково для любого из наших самоподобных островов.

В результате мы имеем два различных способа оценки линейной протяженности каждого острова в единицах  $G$ : стандартное выражение ( $G$ -площадь) $^{1/2}$  и нестандартное ( $G$ -длина) $^{1/D}$ .

Характерная особенность данного подхода заключается в том, что при смене длины шага с  $G$  на  $G'$  мы получим другое отношение альтернативных линейных протяженностей:

$$(G'\text{-длина})^{1/D} / (G'\text{-площадь})^{1/2},$$

которое отличается от исходного на коэффициент  $(G'/G)^{1/D-1}$ .

Что касается отношения линейных протяженностей, то для каждого семейства взаимно подобных фигур оно имеет свое значение, независимо от того, фрактальные это фигуры или стандартные. Следовательно, это отношение представляет в количественном виде лишь один аспект формы фигуры.

Заметим, что полученное соотношение между длиной и площадью можно применять для оценки размерности фрактальной кривой, ограничивающей стандартную область.

**Доказательство соотношения.** Первым делом измерим длину каждой береговой линии с помощью внутренней, зависящей от площади, мерки:

$$G^* = (G\text{-площадь})^{1/2} / 1\,000.$$

Если аппроксимировать каждое из побережий наших островов многоугольником с длиной стороны  $G^*$ , эти многоугольники также будут взаимно подобны, а их периметры будут пропорциональны стандартным линейным протяженностям ( $G$ -площадь) $^{1/2}$ .

Заменим теперь  $G^*$  заданным шагом  $G$ . Из главы 6 нам известно, что измеренная длина при этом изменится в отношении  $(G/G^*)^{1-D}$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} (G\text{-длина}) &\propto (G\text{-площадь})^{1/2} (G/G^*)^{1-D} = \\ &= (G\text{-площадь})^{1/2-1/2(1-D)} G^{1-D} 1\,000^{D-1} = \\ &= (G\text{-площадь})^{D/2} G^{1-D} 1\,000^{D-1}. \end{aligned}$$

Наконец, возведя каждую часть в степень  $1/D$ , получаем искомое соотношение.

## НАСКОЛЬКО ИЗВИЛИСТА РЕКА МИССУРИ?

Вышеизложенные соображения проливают свет и на измерение длины рек. Чтобы определить длину главной реки речного бассейна, мы аппроксимируем форму русла извилистой самоподобной кривой размерности  $D > 1$ , которая начинается в точке, называемой истоком, и заканчивается в точке, называемой устьем. Если бы все реки, равно как и их бассейны, были взаимно подобны, то, согласно фрактальному соотношению между длиной и площадью, мы получили бы следующее соотношение:

$$(G\text{-длина реки})^{1/D} \propto (G\text{-площадь бассейна})^{1/2}.$$

Более того, исходя из стандартности площади:

$$(G\text{-площадь бассейна})^{1/2} \propto (\text{расстояние по прямой от истока до устья}).$$

Объединив эти соотношения, заключаем, что

$$(G\text{-длина реки})^{1/D} \propto (\text{расстояние по прямой от истока до устья}).$$

В высшей степени замечательно, что в уже упоминавшейся работе Хака [186] на основании эмпирических данных показано, что отношение

$$(G\text{-длина реки}) / (G\text{-площадь бассейна})^{0,6}$$

и в самом деле одинаково для всех рек. Из косвенной оценки  $D/2 = 0,6$  получаем  $D = 1,2$  — значение, весьма напоминающее те, что дают измерения длины береговых линий. Если с помощью  $D$  измерять степень иррегулярности, то значения для локальных излучин окажутся абсолютно идентичными значениям для поворотов в масштабе всей реки!

С другой стороны, согласно наблюдениям Дж. Э. Мюллера, значение  $D$  для бассейнов с площадью более  $10^4$  км<sup>2</sup> и рек соответствующих размеров уменьшается до 1. Исходя из наличия двух различных значений  $D$ , можно предположить, что если отобразить бассейны всех рек на листах бумаги одинакового размера, то карты бассейнов малых и больших рек будут выглядеть приблизительно одинаково, в то время как карты бассейнов *очень длинных* рек будут почти прямолинейными. Может оказаться, что нестандартное самоподобие нарушается вблизи внешнего порога  $\Omega$ , величина которого составляет порядка 100 км.

**Суммарная длина речного дерева.** На основании вышеизложенных соображений можно также предположить, что суммарная длина всех рек в бассейне должна быть пропорциональна площади бассейна. Мне говорили, что это предположение верно, однако конкретных ссылок у меня нет.

**Назад к геометрии.** Для рек и водоразделов, родственных кривой «прохождения снежинки» (см. рис. 104 и 105),  $D \sim 1,2618$ , что несколько больше наблюдаемого значения. Соответствующие размерности на рис. 106 и 107 составляют  $D \sim 1,1291$  — недолет.

Кривые Пеано на рис. 95 и 98 и вовсе попадают пальцем в небо, так как  $D = 1$ .

Заметим, что равенство размерностей рек и водоразделов является не логической необходимостью, а всего лишь характерной особенностью некоторых конкретных рекурсивных моделей. Возьмем, например, речную сеть, объединенную стреловидной кривой (см. рис. 205) и описанную в [381]. Реки здесь имеют размерность  $D = 1$ , а водоразделы —  $D \sim 1,5849$ .

## ГЕОМЕТРИЯ ДОЖДЯ И ОБЛАКОВ

На с. 13, 25 и 146 упоминается о возможности использования фракталов для моделирования облаков. Эта возможность теперь получила подтверждение в работе Лавджоя [319], который построил график зависимости фрактального периметра облаков и дождевых областей от их фрактальной же площади (см. рис. 169). Не много существует метеорологических графиков, которые учитывали бы все доступные данные в столь обширном диапазоне размеров, и были бы при этом хоть приблизительно такими же прямолинейными.

График построен на основании данных радиолокационных наблюдений зон дождей над тропической Атлантикой (скорость выпадения осадков свыше 0,2 мм/час) и данных наблюдений в инфракрасном диапазоне с геостационарного спутника зон облаков над Индийским океаном (т.е. зон с максимальной температурой облаков не выше  $-10^\circ\text{C}$ ). Площади зон варьируются от 1 км<sup>2</sup> до 1 000 000 км<sup>2</sup>. Размерность периметра, пригодного, по меньшей мере, для шести порядков величины, составляет 4/3. Удовольствие предоставить физическое объяснение наблюдаемому феномену я уступаю доктору Лавджою.

Самое большое облако простиралось от центральной Африки до южной Индии — а ведь это расстояние далеко превосходит толщину атмосферы, с которой очень часто (слишком часто, на мой взгляд) связывают внешний порог  $L$  атмосферной турбулентности. Заявление Ричардсона (см. с. 152) может еще оказаться пророческим.

## СОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПЛОЩАДЬЮ И ОБЪЕМОМ. КОНДЕНСАЦИЯ МИКРОКАПЕЛЬ

Рассуждение, с помощью которого мы получили соотношение между длиной и площадью, легко обобщается для случая пространственных областей, ограниченных фрактальными поверхностями, приводя к следующему соотношению:

$$(G\text{-площадь})^{1/D} \propto (G\text{-объем})^{1/3}.$$

Чтобы проиллюстрировать это соотношение, рассмотрим конденсацию пара в жидкость. Это физическое явление знакомо всем, однако его теоретическое описание появилось совсем недавно. Согласно Фишеру [151], нижеследующая геометрическая картинка была предложена (по всей видимости, совершенно независимо друг от друга) Я. Френкелем, В. Бандом и А. Бийлом в конце 30-х гг. Газ состоит из отдельных молекул, достаточно удаленных друг от друга, за исключением случайных скоплений, где молекулы более-менее тесно связаны между собой силами притяжения. Скопления различных размеров находятся во взаимном статистическом равновесии, ассоциируя и вновь диссоциируя, однако шансов на то, что появится настолько огромное скопление, что его можно будет счесть «каплей» жидкости, чрезвычайно мало. Площадь поверхности больших скоплений (тех, что не слишком «размазаны» в пространстве на манер, скажем, скоплений водорослей) достаточно хорошо определена. Поверхность скопления придает ему устойчивость. Если теперь понизить температуру, то скоплениям станет выгодно соединяться в капли, а каплям — сливаться вместе, минимизируя тем самым общую площадь поверхности и, как следствие, общую энергию. При благоприятных условиях капли быстро растут. Появление капли макроскопических размеров означает начало конденсации.

Отгалкиваясь от этой картины, Фишер предположил, что площадь и объем конденсирующейся капли связаны формулой, эквивалентной соотношению  $(\text{площадь})^{1/D} = (\text{объем})^{1/3}$ . Фишер оценивает величину  $D$  аналитически, не задумываясь о ее геометрическом смысле, мы же с неизбежностью должны признать, что поверхности капель представляют собой фракталы размерности  $D$ .

## МОЗГОВЫЕ ИЗВИЛИНЫ МЛЕКОПИТАЮЩИХ

Чтобы проиллюстрировать соотношение между площадью и объемом в важном предельном случае  $D = 3$  и в то же время довершить изгнание дьявола из кривых Пеано, представленных в главе 7, рассмотрим одну широко известную проблему из сравнительной анатомии в терминах почти заполняющих пространство поверхностей.

Объем головного мозга млекопитающих колеблется от 0,3 до 3 000 мл, причем у мелких животных его кора выглядит относительно или совершенно гладкой, тогда как у крупных животных она покрыта видимыми складками, независимо от положения животного на эволюционной лестнице. Зоологи утверждают, что отношение количества белого вещества (образованного нейронными аксонами) к количеству серого вещества (где находятся окончания нейронов) приблизительно одинаково у всех млекопитающих, и для того, чтобы поддерживать это отношение, кора большого мозга неизбежно собирается в складки. Знание того, что степень складчатости обусловлена чисто геометрическими причинами, освобождает человека от страха перед интеллектуальным превосходством дельфинов или китов — они, конечно, больше, однако вовсе не обязательно более высокоразвиты.

Количественная характеристика такой складчатости не под силу стандартной геометрии, но прекрасно вписывается в рамки геометрии фрактальной. Объем серого вещества приблизительно равен произведению его толщины на площадь внешней оболочки мозга, называемой на латыни *pia*. Если толщина  $\varepsilon$  одинакова для всех видов, то площадь оболочки будет пропорциональна не только объему серого вещества, но и объему белого вещества, а значит — полному объему мозга  $V$ . Следовательно, из соотношения между площадью и объемом получим  $D = 3$ , а оболочка будет поверхностью, которая за вычетом толщины  $\varepsilon$  заполняет пространство.

Эмпирическое соотношение между площадью и объемом лучше описывается выражением  $A \propto V^{D/3}$ , где  $D/3$  приблизительно находится в интервале от 0,91 до 0,93 (сведения получены из частной беседы с Джерисоном и основаны на экспериментальных данных Элиаса — Шварца, Бродмана и др.). Первое приходящее в голову объяснение заключается в том, что мозговая оболочка лишь частично заполняет пространство ( $2,73 < D < 2,79$ ). В соответствующем разделе главы 17 вкратце изложены несколько более продвинутые соображения.

## АЛЬВЕОЛЯРНЫЕ И КЛЕТОЧНЫЕ МЕМБРАНЫ

Найдется ли среди моих читателей биолог, который будет так любезен, что встанет и объявит всем окружающим, что предыдущий раздел не имеет никакой практической ценности и не открывает ничего нового? Я, со своей стороны, был бы чрезвычайно рад услышать такое заявление, поскольку оно лишь подкрепило бы некоторые мои рассуждения, помещенные в начале главы 7. Несмотря на то, что биолог предпочтет обойти за милую любую поверхность Пеано, устроенную для него математиками, я утверждаю, что лучшие теоретики от биологии хорошо знакомы с основной идеей таких поверхностей.

Таким образом, главная новость предыдущих разделов относится к поверхностям размерности  $D < 3$ , введение которых (как мы убедились) необходимо для согласования теории с экспериментом. Рассмотрим возможность применения этих новых поверхностей в биологии, обсудив кратко их полезность при выяснении подробной структуры некоторых живых мембран.

Начнем с краткого резюме раздела 4.3.7 труда Вайбеля «Стереологические методы» (см. [586]). Оценки общей площади поверхности альвеол человеческого легкого противоречивы: оптическая микроскопия дает  $80 \text{ м}^2$ , в то время как по данным электронной микроскопии площадь альвеол составляет  $140 \text{ м}^2$ . Существенно ли это расхождение? Ответственные за него мелкие детали не играют никакой роли в газообмене, будучи сглажены покрывающим их жидким слоем (в результате чего функциональная площадь альвеол еще более уменьшается), однако они весьма важны для обмена растворами. Из проведенных измерений (спровоцированных, кстати, моей статьей «Побережье Британии») можно в первом приближении заключить, что мембранная размерность  $D = 2,17$  в широком диапазоне масштабов.

Паумгартнер и Вайбель [464] рассмотрели субклеточные мембраны в клетках печени. В этом случае также возникает расхождение между различными оценками площади на единицу объема, и здесь оно также легко устранимо, стоит лишь нам постулировать  $D = 2,09$  для внешней митохондриальной мембраны (которая окружает клетку и по гладкости лишь немногим отличается от мембран с минимальным отношением площадь/объем). Для *внутренних* митохондриальных мембран  $D = 2,53$ , а для эндоплазматической сети  $D = 1,72$ .

Заметим еще, что носовая кость многих животных обладает чрезвычайно сложной структурой, в результате чего площадь покрывающей эту кость «мембраны» оказывается очень большой при сравнительном малом объеме. У оленей и песцов эта мембрана, *возможно*, служит для усиления обоняния, а вот у верблюдов аналогичная структура выполняет водосберегающую функцию [512].

## КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДУЛЯРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рассмотрим еще одну иллюстрацию соотношения между площадью и объемом, на этот раз в компьютерном аспекте. Компьютеры не являются естественными системами, но это не должно нас останавливать. Этот и некоторые другие прецеденты призваны продемонстрировать, что с помощью фрактальных методов можно, в конечном счете, описать любую естественную или искусственную «систему», состоящую из отдельных «элементов», самоподобно связанных между собой (кроме того, приоритетными в системе должны являться не свойства элементов, а правила их соединения).

Сложные компьютерные системы, как правило, разделены на многочисленные модули. Каждый состоит из некоторого большого числа  $C$  компонентов и связан со своим окружением некоторым большим числом  $T$  соединений. Оказывается, что  $T^{1/D} \propto C^{1/E}$  с точностью до нескольких процентов. (Причина необычного написания показателей прояснится чуть ниже.) В корпорации IBM это правило приписывают Э. Ренту (см. также [288]).

Согласно предварительным данным,  $D/E = 2/3$ ; это же значение Р. У. Киз [264] экстраполирует на гигантские «схемы» нервной системы (оптический нерв и мозолистое тело). Однако с ростом эффективности системы отношение  $D/E$  увеличивается. Эффективность, в свою очередь, отражает степень параллелизма, заложенную в систему. В частности, конструкции с крайними показателями характеризуются крайними значениями  $D$ . В сдвиговом регистре модули выстроены в ряд и  $T$  всегда равно 2, независимо от  $C$ : следовательно,  $D = 0$ . При интегральном параллелизме каждый компонент требует отдельного соединения, т. е.  $T = C$ , или  $D = E$ .

Объясняя значение  $D/E = 2/3$ , Киз отмечает, что компоненты, как правило, размещены в пределах объема модуля, тогда как соединения проходят через их поверхности. Чтобы показать, что это наблюдение имеет самое непосредственное отношение к правилу Рента, достаточно допустить, что все компоненты имеют приблизительно одинаковый объем  $v$  и площадь поверхности  $\sigma$ . Так как  $C$  — это *общий объем модуля*, деленный на  $v$ , величина  $C^{1/3}$  будет приблизительно пропорциональна радиусу модуля. С другой стороны,  $T$  — это *общая площадь поверхности модуля*, деленная на  $\sigma$ , т. е. величина  $T^{1/2}$  также будет приблизительно пропорциональна радиусу модуля. Правило Рента всего лишь выражает эквивалентность двух различных мер радиуса в стандартной пространственной фигуре.  $E = 3$  — это евклидова размерность модуля, а  $D = 2$  — размерность стандартной поверхности.

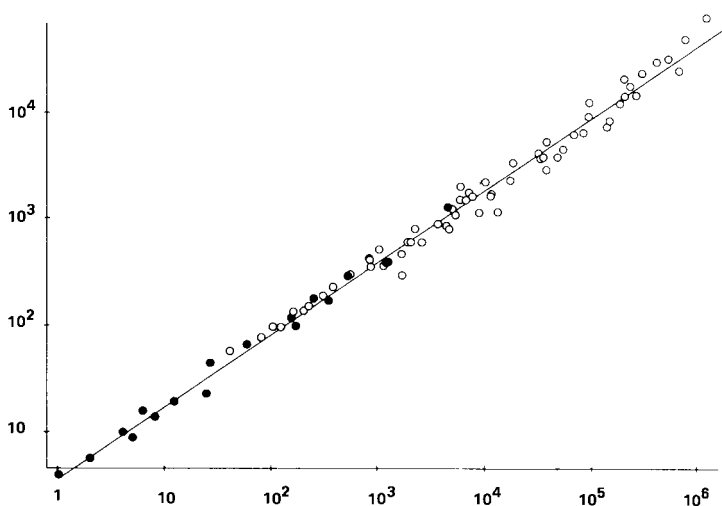
Следует сказать, что понятие модуля весьма неоднозначно, его даже можно считать неопределенным, однако правилу Рента это ничуть не мешает, пока подмодули в модуле соединяются друг с другом поверхностями.

Так же легко интерпретируются и крайние случаи, упомянутые выше. В стандартной линейной структуре  $E = 1$ , а граница между компонентами сводится к двум точкам; следовательно,  $D = 0$ . В стандартной плоской структуре  $E = 2$ , а  $D = 1$ .

Однако когда отношение  $E/D$  не равно ни  $3/2$ , ни  $2/1$ , ни  $1/0$ , стандартная евклидова геометрия не позволяет интерпретировать величину  $C$  как объем, а  $T$  — как площадь. Между тем, такие интерпретации имеют значительную практическую ценность — и не составляют никакой сложности для геометрии фрактальной. Для пространственной схемы,



контактирующей с внешним миром всей своей поверхностью,  $E = 3$ , а  $D$  может принимать любое значение между 2 и 3. Для плоской схемы, контакт которой с внешним миром осуществляется по всей длине ограничивающей ее кривой,  $E = 2$ , а  $D$  может принимать любое значение между 1 и 2. Случай интегрального параллелизма  $D = E$  подразумевает, что граница имеет форму кривой или поверхности Пеано. Кроме того, если граница используется не полностью, «эффективной границей» может стать любая поверхность, размерность  $D$  которой находится в интервале от 0 до  $E$ .



**Рис. 169. ОБЛАКА (○) И ЗОНЫ ДОЖДЕЙ (●). ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ ПЕРИМЕТРА ОТ ПЛОЩАДИ В ДВОЙНОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ МАСШТАБЕ (РИСУНОК ВЗЯТ ИЗ [319].)**

## 13 ◊ ОСТРОВА, КЛАСТЕРЫ И ПЕРКОЛЯЦИЯ; СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ДИАМЕТРОМ И КОЛИЧЕСТВОМ

Эта глава посвящена фрактальным  $\sigma$ -кривым, т. е. фракталам, которые состоят из бесконечного количества непересекающихся фрагментов, каждый из которых представляет собой связную кривую. Конкретные случаи охватывают широкий диапазон от береговых линий островов в архипелаге до такого важного физического феномена, как перколяция. Начальные разделы главы содержат новый материал, которого не было во «Фракталах» 1977 г.; остальная часть также в значительной степени обновлена.

Начнем с того, что перефразируем вопрос главы 5 и спросим, сколько же островов окружает берега Британии? Несомненно, их количество столь же велико, сколь и неопределенно. А если добавить к списку островов все скалы, малые скалы и просто торчащие над водой камни, то длина этого списка устремится чуть ли не к бесконечности.

Поскольку поверхность Земли весьма тщательно «сморщена», полная площадь любого острова — так же, как и длина его береговой линии — географически бесконечна. Однако области, окруженные береговыми линиями, имеют вполне определенную «картографическую площадь». А то, каким образом эта картографическая площадь разделена между различными островами, является важной географической характеристикой. Можно даже утверждать, что такое «соотношение между площадью и количеством» вносит большой вклад в понимание географических форм, чем описание очертаний отдельных береговых линий. Например, если мы будем рассматривать берега Эгейского моря, нам наверняка захочется включить сюда и берега его многочисленных островов. Этот вопрос, вне всякого сомнения, заслуживает самого тщательного количественного исследования, и в этой главе мы предпримем попытку такого исследования, воспользовавшись обобщением кривой Коха.

Далее мы рассмотрим разные другие фрагментированные фигуры, получаемые обобщением уже знакомых нам фракталообразующих процессов: либо процедуры Коха, либо створаживания. Эти фигуры мы будем называть *контактными кластерами*, причем распределение диаметров в зависимости от количества окажется для них таким же, что и для островов.

Особый интерес представляют контактные кластеры, заполняющие плоскость, в частности, кластеры, образуемые некоторыми кривыми Пеано, терагоны которых не имеют точек самопересечения, но имеют несколько тщательно контролируемых точек самокасания. В саге о приручении чудовищ Пеано появляется, таким образом, новая глава!

И последнее (только по порядку, а отнюдь не по значимости): в эту главу включена первая часть прецедентного исследования геометрии перколяции, весьма важного физического феномена, рассмотрение которого будет продолжено в главе 14.

## ОБОБЩЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКОГО ЗАКОНА КОРЧАКА

Составим список всех островов некоего региона в порядке уменьшения их размера. Общее количество островов, размер которых превышает  $a$ , будем записывать как  $\text{Nr}(A > a)$ ,  $\triangleleft$  обозначение построено по подобию обозначения  $\text{Pr}(A > a)$ , позаимствованного из теории вероятности. ► В данном случае  $a$  — это возможное значение картографической площади острова, а букву  $A$  будем использовать для обозначения площади неопределенной величины.

Обозначив через  $B$  и  $F'$  положительные константы (показатель и префактор, соответственно), получим следующее, весьма замечательное, соотношение между площадью и количеством:

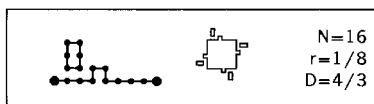
$$\text{Nr}(A > a) = F' a^{-B}.$$

Если мы захотим приписать кому-либо честь открытия этого правила, то лучше всех, пожалуй, подходит кандидатура Й. Корчака [279] (хотя, по его утверждению,  $B = 1/2$ , что я считаю невероятным и не обоснованным представленными в статье данными). Более того, значение  $B$  различно для различных регионов и всегда больше  $1/2$ . Позвольте мне теперь показать, что вышеприведенный обобщенный закон является аналогом распределения, полученного нами в главе 8 для длин пустот в канторовой пыли.

## КОНТИНЕНТ И ОСТРОВА КОХА. ИХ РАЗЛИЧНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

Для построения коховского аналога канторовых пустот я разбиваю генератор на два не связанных друг с другом элемента. Чтобы получаемая фрактальная кривая оставалась интерпретируемой как береговая линия, генератор включает в себя связную ломаную, состоящую из  $N_c < N$  звеньев и соединяющую концевые точки интервала  $[0, 1]$ . Этот элемент мы назовем *берег-генератором*, так как он определяет, каким образом

изначально прямое побережье преобразуется в побережье фрактальное. Оставшиеся  $N - N_c$  звеньев образуют замкнутую петлю, которая «порождает» острова и называется поэтому *остров-генератором*. Ниже приводится пример такого составного генератора:



На последующих этапах построения субострова всегда находятся у левой половины берег-генератора (при движении от 0 к 1) и остров-генератора (при движении по часовой стрелке).

Первая неожиданность: предельный фрактал в этом случае характеризуется двумя различными размерностями. Собрав вместе береговые линии всех островов, получим  $D = \ln N / \ln(1/r)$ , однако береговая линия каждого отдельного острова имеет размерность  $D_c = \ln N_c / \ln(1/r)$ , причем соблюдается неравенство

$$1 \leq D_c < D.$$

Суммарная береговая линия, не будучи связной, является сама по себе не кривой, а бесконечной суммой ( $\Sigma$ ) замкнутых кривых (петель). Предлагаю ввести для ее обозначения термин *сигма-петля* (или  *$\sigma$ -петля*).

Заметим, что моделирование полученного соотношения между  $D$  и  $D_c$  при описании реальных островов требует некоторых дополнительных допущений, кроме, разумеется, тех случаев, когда его можно вывести из соответствующей теории (см. главу 29).

## СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДИАМЕТРОМ И КОЛИЧЕСТВОМ

Доказательство применимости закона Корчака к островам, рассмотренным в последнем разделе, проще всего осуществляется тогда, когда генератор включает в себя один остров, а терагоны избегают самопересечений. (Напомним, что *терагонами* называются аппроксимирующие ломаные линии.) В этом случае на первом этапе создается один остров — обозначим его «диаметр», определяемый  $\sqrt{a}$ , через  $\lambda_0$ . На втором этапе образуется  $N$  островов диаметра  $r\lambda_0$ , а результатом  $m$ -го этапа будет  $N^m$  островов диаметра  $\lambda = r^m \lambda_0$ . В целом, всякий раз, как  $\lambda$  умножается на  $r$ , количество островов  $\text{Nr}(\Lambda > \lambda)$  умножается на  $N$ . Следовательно, распределение  $\Lambda$  (для всех значений  $\lambda$  вида  $r^m \lambda_0$ ) описывается выражением

$$\text{Nr}(\Lambda > \lambda) = F\lambda^{-D},$$

ключевым показателем в котором является фрактальная размерность береговой линии! Как следствие:

$$\text{Nr}(A > a) = F' a^{-B}, \quad \text{где } B = D/2;$$

т. е. мы самостоятельно вывели закон Корчака. При других значениях  $\lambda$  или  $a$  получится ступенчатая кривая, знакомая нам по главе 8, где она описывала распределение длин канторовых пустот.

Результат не зависит ни от  $N_c$ , ни от  $D_c$ . Его можно распространить на тот случай, когда генератор включает в себя два или более островов. Заметим, что эмпирически полученное значение  $B$  для всей Земли составляет величину порядка 0,6, что весьма близко к половине размерности  $D$ , полученной измерением длин береговых линий.

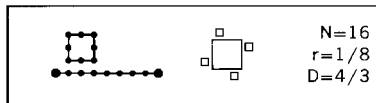
## ОБОБЩЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ $E > 2$

Применив наше построение к пространству, мы убедимся в том, что  $E$ -мерный диаметр, определяемый как  $(\text{объем})^{1/E}$ , подчиняется гиперболическому выражению вида  $\text{Nr}((\text{объем})^{1/E} > \lambda) = F\lambda^{-D}$ , ключевым показателем в котором снова является  $D$ .

Показатель  $D$  оказывается определяющим и в особом случае канторовой пыли ( $E = 1$ ), однако здесь имеется одно существенное отличие. Длина за пределами канторовых пустот обращается в нуль, тогда как площадь за пределами «коховых островов» вполне может быть положительной (как, впрочем, чаще всего и бывает). К этому предмету мы вернемся в главе 15.

## ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО КАК МЕРА ФРАГМЕНТАЦИИ

Вышеописанное построение допускает следующее изменение генератора:



Общая величина  $D$  остается неизменной, однако береговая размерность  $D_c$  принимает наименьшее возможное значение,  $D_c = 1$ . То есть в рамках этой модели береговые линии островов могут быть спрямляемы! В этом случае общая величина  $D$  определяет не степень иррегулярности, а единственно степень фрагментации. Размерность  $D$  характеризует здесь не извилистость отдельных кривых, а целое соотношение между

количеством прямоугольных островов в бесконечном семействе и их площадью.

При измерении длины кривой шагом  $\varepsilon$  результат все еще стремится к бесконечности при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , однако теперь для этого имеется другая причина. Шагом длины  $\varepsilon$  можно измерять только острова, диаметр которых не меньше  $\varepsilon$ . Однако по мере того, как  $\varepsilon \rightarrow 0$ , число таких островов возрастает, и измеренная длина изменяется пропорционально  $\varepsilon^{1-D}$  — точно так же, как и в отсутствие островов.

В общем случае  $D_c > 1$ , значение  $D_c$  характеризует только степень иррегулярности, в то время как  $D$  описывает степень иррегулярности и фрагментации в совокупности.

**Фрагментированная фрактальная кривая может иметь касательные в любой точке.** Закруглив углы островов, можно добиться того, что к береговой линии в любой ее точке можно будет провести касательную, причем площади островов — а с ними и общая размерность  $D$  — останутся неизменными. Таким образом, фрактальность  $\sigma$ -кривой и отсутствие у кривой касательных — вовсе не одно и то же.

## БЕСКОНЕЧНОСТЬ ОСТРОВОВ

**Безвредная расходимость.** При  $a \rightarrow 0$  количество островов  $\text{Nr}(A > a) = Fa^{-B}$  стремится к бесконечности. Следовательно, закон Корчака вполне согласуется с нашим первоначальным наблюдением относительно практически бесконечного числа островов.

**Относительная площадь наибольшего острова.** Этот последний факт приемлем математически только потому, что суммарная площадь очень маленьких островов конечна и пренебрежимо мала.  $\triangleleft$  Общая площадь всех островов, площадь каждого из которых меньше  $\varepsilon$ , изменяется пропорционально значению интеграла функции  $a(Ba^{-B-1}) = Ba^{-B}$  на интервале от 0 до  $\varepsilon$ . Так как  $B < 1$ , интеграл сходится, и его значение  $B(1-B)^{-1}\varepsilon^{1-B}$  стремится к нулю по мере уменьшения  $\varepsilon$ .  $\blacktriangleright$

Следовательно, относительный вклад самого большого острова в суммарную площадь всех островов стремится к некоторому положительному пределу по мере того, как увеличивается количество островов. Он *отнюдь не является* асимптотически пренебрежимым.

**Относительная длина самой длинной береговой линии.** С другой стороны, если  $D_c = 1$ , то длины побережий оказываются распределены по гиперболическому закону с показателем  $D > 1$ . То есть суммарная длина береговой линии маленьких островов становится бесконечной. По мере того, как продвигается построение и увеличивается число островов, длина побережья наибольшего острова становится величиной относительно пренебрежимой.

**Относительно пренебрежимые множества.** В более общем виде неравенство  $D_c < D$  выражает то обстоятельство, что длина кривой, построенной только с помощью генератора береговой линии, пренебрежимо мала по сравнению с длиной всего побережья. Аналогичным образом, прямая ( $D = 1$ ) пренебрежимо мала по сравнению с плоскостью ( $D = 2$ ). Примерно по той же причине, по какой точка, выбранная наугад на плоскости, практически никогда не попадает на ось  $x$ , точка, выбранная наугад на «сердцевинном» острове, со всех сторон окруженном субостровами, почти никогда не приходится на его береговую линию.

## В ПОИСКАХ БЕСКОНЕЧНОГО КОНТИНЕНТА

В масштабно-инвариантной Вселенной различие между островом и континентом не может основываться на традиции или «относительном размере». Единственный разумный подход состоит в том, чтобы определить континент как особый остров *бесконечного* диаметра. Ниже я намерен показать, что построения, приведенные в начале главы, *практически никогда* не генерируют континентов. ◁ Для тех, кто знаком с теорией вероятности: вероятность того, что такое построение даст в итоге континент, равна нулю. ►

При разумном подходе к поискам континента следует отказаться от отдельного выбора инициатора и генератора. С этого момента нам придется использовать один и тот же генератор и для интерполяции, и для экстраполяции. Процесс осуществляется в несколько последовательных этапов, каждый из которых разбивается на шаги. Он очень напоминает экстраполяцию канторова множества в главе 8, однако заслуживает более подробного описания.

Первый шаг укрупняет выбранный нами генератор в отношении  $1/r$ . На втором этапе мы некоторым образом «помечаем» *одно* из звеньев увеличенного генератора. На третьем — смещаем увеличенный генератор так, чтобы помеченное звено совпало с интервалом  $[0, 1]$ . Четвертый и последний этап заключается в интерполяции оставшихся звеньев увеличенного генератора.

Процесс повторяется до бесконечности, причем его течение и результат определяются последовательностью положений «помеченных» звеньев. Эта последовательность может принимать различные формы.

Для получения первой формы берег-генератор должен включать в себя некоторое положительное число  $N_c - 2$  «некрайних» звеньев, которые, по определению, принадлежат генератору, но не содержат его концевых точек (0 или 1). Если мы последовательно помечаем некрайние звенья, каждый этап экстраполяции растягивает исходный участок береговой линии и в пределе приводит к включению этого участка во фрактальное побережье бесконечной протяженности в обоих направ-

лениях. Следовательно, построение континентальной береговой линии, исходя из таких начальных условий, *вполне возможно*.

Вторая форма: всегда помечаем какое-либо из крайних звеньев берег-генератора, причем каждая из двух возможностей выбирается бесконечное количество раз. В этом случае исходный участок побережья также растягивается до бесконечности. Если каждый раз выбирать одно и то же звено, береговая линия будет удлиняться только в одном направлении.

Чтобы получить третью форму, будем всегда помечать звено, принадлежащее остров-генератору. Тогда остров, который до экстраполяции был самым большим, окажется вблизи берегов бóльшего острова; после следующего этапа этот бóльший остров окажется у берегов еще бóльшего острова, и т. д. до бесконечности. Континента при таком построении мы не получим *вовсе*.

В следующем замечании мы воспользуемся некоторой толикой «вероятностного здравого смысла», который, должно быть, не чужд ни одному читателю. Предположим, что помечаемое звено выбирается посредством броска  $N$ -гранной кости. Для того, чтобы получить при экстраполяции континент, необходимо, по всей видимости, чтобы всякая метка после некоторого конечного ( $k$ -го) этапа попадала на одно из  $N_c - 2$  некрайних звеньев берег-генератора. Назовем эти звенья «выигрышными». Чтобы после  $k$  этапов иметь уверенность в том, что мы получим в итоге континент, мы должны быть уверены, что *каждый* последующий бросок нашей кости *без единого исключения* окажется выигрышным. Такая удача, безусловно, возможна, однако вероятность ее стремится к нулю.

## КОМБИНАЦИИ ОСТРОВОВ, ОЗЕР И ДЕРЕВЬЕВ

Так как острова Коха взаимоподобны, их диаметр  $\Lambda$  можно переопределить как расстояние между двумя любыми заданными точками, которые лучше всего выбирать на береговой линии. Кроме того, при получении соотношения между диаметром и количеством мы пользовались, в основном, наличием у генератора береговой части. Тем же обстоятельством, что оставшиеся звенья генератора образуют острова, или тем, что они избегают самопересечений, мы так по-настоящему и не воспользовались. Таким образом, соотношение

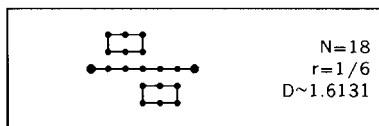
$$\text{Nr}(\Lambda > \lambda) = F\lambda^{-D}$$

имеет очень широкую область применения.  $\blacktriangleleft$  Можно даже отказаться от неперемного условия отсутствия пересечений терагонов, образованных двумя интервалами.  $\blacktriangleright$  Покажем теперь на примерах, как конфигу-

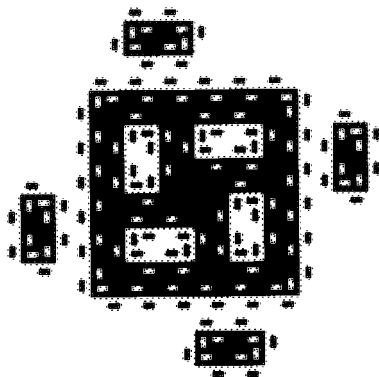


рация  $N - N_c$  исходных звеньев может повлиять на топологию образующегося фрактала.

**Комбинация островов и озер.** Ранее мы располагали остров-генератор слева и в направлении по часовой стрелке. Попробуем теперь расположить его также в направлении по часовой стрелке, но справа. В результате вместо островов мы получим озера. Кроме того, можно включить в один генератор  $u$  острова,  $u$  озера. В обоих случаях предельный фрактал представляет собой  $\sigma$ -петлю, компоненты которой вложены друг в друга. Рассмотрим, например, генератор



Если инициатором служит квадрат, мы получим на некотором отдаленном этапе построения следующий терагон:



**Неуловимый континент.** На вышеприведенном рисунке можно видеть, что длина стороны инициатора вносит не присущий генератору внешний порог. Более последовательным решением будет экстраполировать эту длину, как мы поступили в случае островов без озер. Однако и в этом случае мы можем быть почти уверены, что мы получим не континент, а лишь бесконечно вложенные друг в друга острова и озера.

**Соотношение между площадью и количеством.** При определении площади острова (или озера) можно исходить либо из общей площади фигуры, либо из площади суши (или воды) в пределах береговой линии. Эти две величины связаны между собой постоянным коэффициентом, т. е. влияют на количество  $\text{Nr}(A > a)$  через его префактор  $F'$ , а не через показатель  $D/2$ .

**Комбинация интервалов и деревьев.** Допустим теперь, что оставшиеся  $N - N_c$  звеньев образуют либо ломаную с двумя свободными концами, либо дерево. В обоих случаях фрактал разделяется на бесконечное множество не связанных между собой элементов, каждый из которых представляет собой кривую. Такую  $\sigma$ -кривую уже нельзя считать  $\sigma$ -петлей; уместнее, пожалуй, будет назвать ее  $\sigma$ -деревом или  $\sigma$ -интервалом.

## ПОНЯТИЕ КОНТАКТНОГО КЛАСТЕРА

Генератор может также сочетать в себе петли, ветви и разные другие топологические конфигурации. Связные части предельных фракталов, получаемых при таком построении, напоминают *кластеры* из теории перколяции (как будет показано позже в этой главе) и из многих других областей физики. Для нас использование термина «кластер» чрезвычайно неудобно, так как совсем недавно (при рассмотрении пылевидных множеств в главе 9) мы вкладывали в него несколько иной смысл. Стало быть, необходим более точный и — как следствие — более громоздкий термин. Я решил остановиться на словосочетании «контактный кластер». Хорошо еще, что в термине « $\sigma$ -кластер» нет такой двусмысленности.

(Можно заметить, что *контактный кластер* имеет однозначное и естественное математическое определение, тогда как понятие кластеризации в пыли размыто и интуитивно и определяется, в лучшем случае, через весьма спорные статистические законы.)

**Контактные кластеры, заполняющие плоскость.** В случае, когда размерность  $D$  достигает своего максимума  $D = 2$ , остаются в силе рассуждения из предыдущего раздела, однако возникает необходимость в кое-каких добавочных замечаниях. Каждый отдельный кластер стремится к некоторому пределу, который может представлять собой прямую или — как бывает чаще всего — фрактальную кривую. С другой стороны, все кластеры в совокупности образуют  $\sigma$ -кривую, ответвления которой заполняют плоскость в высшей степени плотно. В пределе эта  $\sigma$ -кривая ведет себя подобно кривым из главы 7: она перестает быть кривой и становится областью плоскости.

**Неуловимый бесконечный кластер.** Данный подход ни в коем случае не подразумевает возможности образования *действительно бесконечного кластера*. Можно легко построить топологию генератора таким образом, чтобы любая данная ограниченная область была почти наверняка окружена контактными кластерами. Этот кластер, в свою очередь, почти наверняка окажется окружен большим кластером и т. д. Размер кластера сверху ничем не ограничен. В более общем виде: если

кластер представляется бесконечным только потому, что он окружает очень большую область, то стоит лишь вспомнить о том, что сам он окружен кластером еще бóльшего размера, и конечный размер любого кластера перестанет вызывать сомнения.

## СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МАССОЙ И КОЛИЧЕСТВОМ. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ВЗВЕШЕННЫМ ДИАМЕТРОМ И КОЛИЧЕСТВОМ. ПОКАЗАТЕЛИ $D - D_c$ И $D/D_c$

Переформулируем функцию  $\text{Nr}(\Lambda > \lambda)$  двумя способами: первый состоит в замене диаметра кластера  $\lambda$  его массой  $\mu$ , второй — в назначении единице размера контактного кластера некоторого веса.

Массой кластера здесь называется просто количество звеньев длины  $b^{-k}$  в самом кластере (только *не* считайте звенья *внутри* петельных кластеров). В сущности (см. главы 6 и 12), мы строим несколько модифицированную сосиску Минковского (рис. 57), размещая в каждой вершине квадрат со стороной  $b^{-k}$  и добавляя по половине квадрата к каждой концевой точке.

Масса кластера диаметра  $\Lambda$  равна площади его модифицированной сосиски,  $M \propto (\Lambda/b^k)^{D_c} (b^k)^2 = \Lambda^{D_c} / (b^k)^{D_c-2}$ . Поскольку  $D_c < 2$ , масса  $M$  стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ . Масса всех контактных кластеров в совокупности пропорциональна  $(b^k)^{D-2}$ ; при  $D < 2$  она также стремится к нулю. Что касается относительной массы каждого отдельного кластера, то она пропорциональна  $(b^k)^{D_c-D}$ ; скорость ее стремления к нулю возрастает при увеличении значения разности  $D - D_c$ .

**Соотношение между массой и количеством.** Очевидно, что

$$\text{Nr}(M > \mu) \propto (b^k)^{-D+2D/D_c} \mu^{-D/D_c}.$$

**Распределение диаметра, наделенного массой.** Заметим, что величина  $\text{Nr}(\Lambda > \lambda)$  представляет собой количество строк, расположенных выше строки с номером  $\lambda$  в списке, в котором перечисляются контактные кластеры в порядке уменьшения их размеров. Однако сейчас нам необходимо сопоставить каждому контактному кластеру количество строк, равное его массе. Как нетрудно убедиться, окончательное выражение имеет вид

$$\text{Wnr}(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-D+D_c}.$$

## МАССОВЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ $Q = 2D_c - D$

Обозначим фрактал размерности  $D$ , рекурсивно построенный из инициатора  $[0, \Lambda]$ , через  $\mathcal{F}$  и примем его общую массу за  $\Lambda^D$ . Если  $\mathcal{F}$  —

канторова пыль, то, как нам известно из главы 8, масса  $M(R)$ , содержащаяся в диске радиуса  $R < \Lambda$  с центром в нуле, пропорциональна  $R^D$ .  $\triangleleft$  Величина  $\ln[M(R)R^{-D}]$  представляет собой периодическую функцию от  $\log_b(\Lambda/R)$ , однако мы не станем задерживаться на этих сложностях, так как они исчезают, стоит лишь модифицировать фрактал таким образом, чтобы все значения  $r > 0$  оказались допустимыми коэффициентами самоподобия.  $\blacktriangleright$

Мы знаем, что правило  $M(R) \propto R^D$  применимо также к кривой Коха (см. главу 6). Кроме того, оно распространяется и на рекурсивные острова и кластеры, рассматриваемые в этой главе, только  $D$  следует заменить на  $D_c$ . Во всех случаях масса, содержащаяся в диске радиуса  $R$  с центром в нуле, определяется выражением

$$M(R, \Lambda) = R^{D_c} \phi(R/\Lambda),$$

где  $\phi$  — функция, выводимая из формы фрактала  $\mathcal{F}$ . В частности:

$$M(R, \Lambda) \propto R^{D_c} \quad \text{при } R \ll \Lambda;$$

$$M(R, \Lambda) \propto \Lambda^{D_c} \quad \text{при } R \gg \Lambda.$$

Рассмотрим теперь среднее взвешенное значение  $M(R)$  в случае, когда  $\Lambda$  изменяется в соответствии с весьма широким гиперболическим распределением  $\text{Wng}(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-D+D_c}$ , и обозначим это среднее через  $\langle M(R) \rangle$ . Известно, что  $1 \leq D_c < D \leq 2$ . Исключив сочетание  $D = 2$  и  $D_c = 1$ , можно записать  $0 < D - D_c < D_c$ . Следовательно,

$$\langle M(R) \rangle \propto R^Q, \quad \text{где } Q = 2D_c - D > 0.$$

Когда центр диска находится не в точке 0, а в какой-либо другой точке фрактала  $\mathcal{F}$ , изменяется только коэффициент пропорциональности, тогда как показатель остается неизменным. Не изменяется он и при усреднении по всем положениям центра в  $\mathcal{F}$ , и при замене интервала  $[0, 1]$  другим инициатором.  $\triangleleft$  Обычно берут дугу кривой произвольной длины  $\Lambda$  и произвольной же формы. Вышеприведенные формулы для  $M(R, \Lambda)$  применимы и для  $\langle M(R, \Lambda) \rangle$ , усредненного по всем формам. Окончательный результат всегда одинаков.  $\blacktriangleright$

**Замечание.** Предыдущее рассуждение никак не зависит от топологии кластеров — они могут быть петлями, интервалами, деревьями или чем-нибудь еще.

**Вывод.** Формула  $\langle M(R) \rangle \propto R^Q$  показывает, что при гиперболическом распределении величины  $\Lambda$  и, как следствие, очень широком ее разбросе, одну из существенных ролей размерности берет на себя некий показатель, отличный от  $D$ . Обычно он равен  $2D_c - D$ , однако различные весовые функции дают различные показатели  $Q$ .

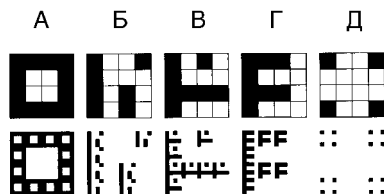
**Предостережение: не всякий массовый показатель является размерностью.** Составная величина  $Q$  представляет собой весьма важную характеристику. А так как это массовый показатель, возникает искушение назвать его размерностью, однако это искушение ничем не обосновано. При слиянии различных кластеров с одинаковой размерностью  $D_c$ , но разными  $\Lambda$ ,  $D_c$  не изменяется, поскольку размерность — это не свойство совокупности различных множеств, но свойство каждого отдельного множества. И  $D$ , и  $D_c$  являются фрактальными размерностями, а  $Q$  — нет.

Обобщая, можно сказать, что во многих областях физики известны соотношения вида  $\langle M(R) \rangle \propto R^Q$ , однако сама по себе эта формула еще не гарантирует того, что  $Q$  непременно будет фрактальной размерностью. Называть же  $Q$  *эффективной размерностью*, как предлагают некоторые авторы, все равно, что попусту сотрясать воздух, так как  $Q$  не обладает ни одним из остальных свойств, характеризующих  $D$  как размерность (например, суммы или произведения размерностей  $D$  имеют смысл, которому нет аналогов в случае  $Q$ ). Более того, эти пустые слова оказываются источником возможных недоразумений.

## РАСРЕДОТОЧЕННЫЕ КЛАСТЕРЫ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПРИ СТВОРАЖИВАНИИ

Существует еще два метода построения контактных кластеров. Первый основан на створаживании и применим в случае  $D < 2$ , второй использует кривые Пеано и пригоден для случая  $D = 2$ . Читатели, интересующиеся перколяцией, могут пропустить этот и следующий за ним разделы.

Начнем с замены построения Коха естественным обобщением канторова створаживания на плоскость. В качестве иллюстрации на нижеследующем рисунке представлены пять примеров генераторов, под которыми помещены последующие этапы построения:



Во всех этих случаях предельный фрактал имеет нулевую площадь и не содержит внутренних точек. Его топология зависит от формы генератора и может быть весьма разнообразной.

В случае генератора А предтворог на каждом этапе построения представляет собой связное множество, а предельный фрактал оказывается кривой — примером может служить чрезвычайной важности конструкция (называемая ковром Серпинского), которую мы подробно рассмотрим в главе 14.

В случае генератора Д предтворог распадается на несвязные участки, максимальный линейный масштаб которых неуклонно уменьшается по мере того, как  $k \rightarrow \infty$ . Предельный фрактал представляет собой пыль, аналогичную той, что мы наблюдали в модели Фурнье (глава 9).

Генераторы Б, В и Г более интересны: здесь предтворог распадается на части, которые мы назовем *предкластерами*. Можно сказать, что на каждом этапе «старые» предкластеры преобразуются в более тонкие и извилистые конструкции и появляются «новые» предкластеры. Путем тщательного выбора генераторов мы добиваемся того, что каждый новорожденный предкластер оказывается целиком заключен в одной-единственной ячейке наимельчайшей решетки предыдущего этапа построения. По контрасту с «перекрестно сосредоточенными кластерами» следующего раздела я предлагаю назвать эти кластеры «рассредоточенными». Таким образом, размерность предельных контактных кластеров имеет вид  $\ln N_c / \ln b$ , где  $N_c$  — целое число, *не превышающее* количества ячеек в самом большом компоненте генератора. Значение  $N_c$  достигает своего максимума, т. е. становится равным количеству ячеек, в случае генераторов Б и В, чьи контактные кластеры представляют собой, соответственно, интервалы с  $D_c = 1$  и фрактальные деревья с  $D_c = \ln 7 / \ln 4$ . Во фрактале же, построенном с помощью генератора Г, величина  $N_c$  максимума не достигает: в этом случае  $F$ -образные предкластеры продолжают разделяться на все более мелкие части, и в пределе мы снова получаем прямые интервалы с  $D_c = 1$ .

Соотношение между диаметром и количеством и другие выводы предыдущего раздела остаются в силе и в том случае, если заменить псевдо-сосиску Минковского совокупностью ячеек со стороны  $b^{-k}$ , частично совпадающей с каким-либо контактным кластером.

## ПЕРЕКРЕСТНО СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ КЛАСТЕРЫ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПРИ СТВОРАЖИВАНИИ

Придадим генератору плоского створаживания одну из приведенных ниже форм (справа от каждого генератора показан результат следующего этапа построения):



Оба случая демонстрируют массивное «перекрестное сосредоточение», т. е. каждый новорожденный предкластер соединяет в себе элементы,

принадлежащие на предыдущем этапе построения нескольким ячейкам наимельчайшей решетки.

В контексте кохова построения аналогичная ситуация возникает в том случае, когда допускается самокасание терагонов, в результате чего происходит слияние малых кластеров. В обоих случаях анализ довольно громоздок, и мы не можем останавливаться на нем подробно. Скажем лишь, что для малых  $\lambda$  соотношение  $\text{Ng}(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-D}$  остается верным.

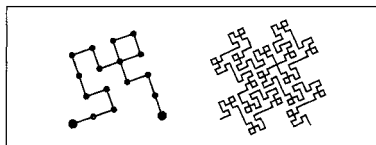
$\triangleleft$  Если кто-нибудь все же попытается оценить величину  $D$  на основании этого соотношения, не исключив из рассмотрения больших  $\lambda$ , то полученная оценка будет систематически отклоняться от истинного значения, оказываясь, как правило, меньше него.  $\blacktriangleright$

Величина  $b^{D_c}$  приобретает новые, неизвестные ранее свойства. Нет, например, необходимости в том, чтобы она обязательно была целым числом, выводимым из формы генератора путем простого наблюдения; она может быть и дробью. Причина заключается в том, что каждый контактный кластер сочетает в себе: (а) целое число своих собственных версий, уменьшенных с коэффициентом  $1/b$ , и (б) множество уменьшенных версий, возникающих при сосредоточении, причем коэффициентами подобия здесь являются меньшие соотношения вида  $r_m = b^{-k(m)}$ . Переписав генерирующее размерность уравнение  $\sum r_m^D = 1$  (см. с. 87) в переменных  $x = b^{-D}$ , получим уравнение  $\sum a_m x^m = 1$ . Случаи, когда  $1/x$  — целое число, могут рассматриваться лишь как исключения.

## ПРИРУЧЕНИЕ ЗАУЗЛЕННЫХ ЧУДОВИЦ ПЕАНО

Створаживанием нельзя получить заполняющую плоскость совокупность кластеров ( $D = 2$ ), однако я обнаружил возможность альтернативного подхода к задаче: нужно лишь воспользоваться кривыми Пеано — правда, несколько иными, нежели те, что были приручены в главе 7. Как читатель, несомненно, помнит, кривые Пеано, терагоны которых избегают самопересечений, порождают деревья рек и водоразделов. Другие терагоны Пеано (например, терагоны на рис. 95, если оставить углы нескругленными) представляют собой просто заполненные ячейки решетки. По мере продолжения построения пустые ячейки, разделяемые такими кривыми, «сходятся» в повсюду плотную пыль (например, состоящую из точек, ни одна координата которых не кратна  $b^{-k}$ ).

Между этими крайностями существует еще один весьма интересный класс кривых Пеано. Ниже представлен примерный генератор одной такой кривой вместе с результатом следующего этапа построения:



Теперь мы готовы приручить и этот класс кривых Пеано. На рисунке видно, что каждая точка самокасания «заузливает» открытый предкластер, который затем может обзавестись ветвями и точками самокасания, потерять при «разузливании» некоторые части самого себя и, в конце концов, превратиться в тонкую и в высшей степени разветвленную кривую, определяющую контактный кластер. Согласно нашему определению, данному в предыдущих разделах, диаметр кластера  $\Lambda$  остается постоянным с момента его рождения и приблизительно равен длине стороны «породившего» кластер квадрата. Его распределение подчиняется уже известному нам соотношению  $Nr(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-2}$ .

Заметим мимоходом, что в отличие от коховых контактных кластеров, которые являются пределами рекурсивно построенных кривых, данные кластеры представляют собой пределы (в своем роде) открытых компонентов *дополнения* кривой.

## КЛАСТЕРЫ В БЕРНУЛЛИЕВОЙ ПЕРКОЛЯЦИИ

Какой бы метод ни использовался при генерации фрактальных контактных кластеров с размерностями  $D = E$  и  $D_c < D$ , они представляют собой геометрическую модель, в которой до недавних пор весьма нуждались физики для разрешения одной очень важной проблемы — бернуллиевой перколяции сквозь решетки. Дж. М. Хаммерсли, сформулировавший и первым исследовавший эту проблему, не употреблял в данном контексте имени Бернулли, однако из-за фрактальной перколяции, с которой мы встретимся в главе 23, нам придется здесь пользоваться полным термином. (Этот термин был также принят в [530], причем независимо от меня.)

**Литература.** Всем желающим рекомендую следующие обзорные материалы по бернуллиевой перколяции: [520], [112] (особенно хороша глава, написанная Дж. У. Эссамом), [266], [98], [536] и [134].

**Определения.** Понятие перколяции включает в себя некоторые элементы из теории вероятности, поэтому, если быть до конца последовательными, нам не следовало бы обсуждать его на данном этапе. Однако некоторая толика непоследовательности приносит порой неплохие результаты. Простейшей задачей о перколяции для случая  $E = 2$  является перколяция по связям на квадратной решетке. Для упрощения картины представим себе большую квадратную решетку, составленную из двух видов стержней: одни сделаны из изолирующего винила, другие — из электропроводящей меди. Такая решетка может считаться *решеткой Бернулли*, если каждый стержень выбран совершенно случайно, независимо от других стержней, причем вероятность выбора проводящего стержня равна  $p$ . Наибольшие скопления связанных между собой



медных или виниловых стержней называются, соответственно, медными или виниловыми *кластерами*. Если решетка содержит хотя бы одну непрерывную цепочку медных стержней, электрический ток сможет *пройти* всю решетку *насквозь*, от одного края до другого. В таких случаях говорят, что решетка *перколирует*. (От латинского *per* «сквозь» и *colare* «течь».) Все стержни, находящиеся в неразрывном электрическом контакте одновременно с верхним и нижним краями решетки, образуют «перколяционный кластер», а стержни, непосредственно участвующие в передаче, составляют так называемую «магистраль» кластера.

Обобщение на решетки другой формы и на структуры с  $E > 2$  очевидно.

**Критическая вероятность.** Наиболее замечательная находка Хаммерсли имеет отношение к особой роли некоторой пороговой вероятности или, как он ее назвал, *критической вероятности*  $p_{\text{крит}}$ . Эта величина появляется на сцене, когда размер решетки Бернулли (измеряемый числом стержней) стремится к бесконечности. Оказывается, когда  $p > p_{\text{крит}}$ , вероятность существования перколяционного кластера возрастает с размером решетки и стремится к единице. Когда же  $p < p_{\text{крит}}$ , вероятность перколяции устремляется к нулю.

Поскольку в случае перколяции по связям на квадратных решетках дело обстоит таким образом, что либо медь, либо винил должны перколировать, то  $p_{\text{крит}} = 1/2$ .

**Аналитическая масштабная инвариантность.** Изучение перколяции уже довольно давно вылилось в поиски аналитических выражений, которые связали бы между собой стандартные физические величины. Выяснилось, что все эти величины обладают свойством *масштабной инвариантности* в том смысле, что отношения между ними задаются степенными законами. При  $p \neq p_{\text{крит}}$  масштабная инвариантность сохраняется вплоть до внешнего порога, величина которого зависит от  $p - p_{\text{крит}}$  и обозначается через  $\xi$ . По мере того, как  $p \rightarrow p_{\text{крит}}$ , порог  $\xi \rightarrow \infty$ . Физики постулируют (см. [536], с. 21), что величина  $\langle M(R, \Lambda) \rangle$  следует правилу, полученному нами на с. 180.

## ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КЛАСТЕРОВ

**Форма кластеров.** Допустим, что  $p = p_{\text{крит}}$ , а длина каждого отдельного стержня уменьшается, в то время как общий размер решетки остается постоянным. Кластеры при этом становятся все более тонкими («кожа да кости»), все более извилистыми и разветвленными. В частности [293], количество стержней, расположенных вне кластера, но по соседству с каким-либо стержнем, принадлежащим кластеру, приблизительно пропорционально количеству стержней внутри кластера.

**Гипотеза о фрактальных кластерах.** Вполне естественно предположить, что масштабная инвариантность — свойство не только аналитическое, но распространяется и на геометрию кластеров. Однако эту идею нельзя осмыслить средствами стандартной геометрии, поскольку кластеры *отнюдь* не являются прямыми линиями. Фрактальная же геометрия, можно сказать, просто создана для устранения таких трудностей: как следствие, я высказал предположение, что кластеры можно представить в виде фрактальных  $\sigma$ -кривых, удовлетворяющих равенствам  $D = 2$  и  $1 < D_c < D$ . Это предположение было принято и оказалось весьма плодотворным. Подробнее мы рассмотрим его в главе 36.

◀ Строго говоря, масштабно-инвариантные фракталы были призваны представлять только те кластеры, которые *не* усечены границей исходной решетки. Это исключает из рассмотрения сам перколяционный кластер. (Термин *кластер* обладает чудесным даром создавать путаницу, вы не находите?) Для объяснения возникающего осложнения представим себе чрезвычайно большую решетку, выберем на ней какой-нибудь кластер и квадрат меньшего размера, наложенный на этот кластер. По определению, пересечение кластера и квадрата включает в себя меньший перколяционный кластер, однако оно же включает в себя и «остаток», который соединяется с меньшим перколяционным кластером посредством связей, находящихся *вне* квадрата. Заметим, что пренебрежение этим остатком смещает вниз оценку  $D_c$ . ▶

**Неслучайные фрактальные модели — очень приближенные, но конкретные.** Для того, чтобы утверждение о фрактальной природе какого-либо естественного феномена было обоснованным, его следует сопроводить описанием конкретного фрактального множества, которое могло бы послужить моделью этого явления в первом приближении или хотя бы дать нам возможность представить его перед мысленным взором. Моя модель береговых линий, основанная на кривых Коха, или модель галактических скоплений Фурнье показывают, что такое приближенное неслучайное представление может оказаться весьма полезным. Я полагаю также, что рекурсивно построенные контактные кластеры (подобные тем, что рассматриваются в этой главе) могут снабдить нас полезными фрактальными моделями слабо изученного естественно-го феномена, который обычно моделируется кластерами Бернулли.

Однако сами кластеры Бернулли полностью изучены (по крайней мере, принципиально), и следовательно, их моделирование с помощью явных рекурсивных фракталов представляет собой несколько иную задачу. Рассмотренные мною коховы контактные кластеры для этого случая не годятся из-за асимметрии между виниловыми и медными стержнями, которая сохраняется даже при равных количествах стержней обоих видов. Далее на очереди заузленные кластеры Пеано. Возьмем терагон на некотором отдаленном этапе построения и покроем ячейки, расположен-

ные слева от кривой, медью, а остальные — винилом. Результат представляет собой форму перколяции относительно ячеек решетки (или их центров, называемых узлами). Задача становится симметричной. Однако она отлична от задачи Бернулли, так как получаемая конфигурация медных и виниловых ячеек очень отличается от той, какой она могла бы быть при независимом их распределении: например, в бернуллиевой решетке девять ячеек, образующих суперквадрат, могут целиком состоять из меди или винила, тогда как в случае заузленной кривой Пеано это невозможно. (С другой стороны, обе модели позволяют группам из четырех ячеек, образующих суперквадрат, принимать любые возможные конфигурации.) Эта разница имеет далеко идущие последствия: например, в задаче о бернуллиевой перколяции по узлам с  $p = 1/2$  не перколируют ни медь, ни винил, тогда как в случае заузленных кластеров Пеано перколируют и медь, и винил (учитывая, что  $p = 1/2$  — критическая вероятность).

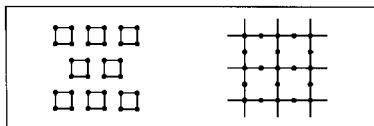
Перечень вариантов бернуллиевой перколяции по связям уже довольно обширен и может быть с легкостью продлен. Я же успел рассмотреть множество вариантов рекурсивно построенных фрактальных контактных кластеров. Детальное сравнение этих двух перечней, к сожалению, заняло бы слишком много места, и потому я не стану приводить его здесь.

Позвольте мне ограничиться весьма расплывчатым выводом о том, что фрактальная сущность задачи о бернуллиевой перколяции в значительной степени иллюстрируется неслучайными заполняющими пространство  $\sigma$ -кластерами, определенными ранее в этой главе. Основная слабость данной модели заключается в том, что за пределами уже сказанного она остается совершенно неопределенной. Ее можно подогнать к любой степени иррегулярности и фрагментации. На предмет топологии см. главу 14.

**Модель критических кластеров.** Рассмотрим, в частности, критические кластеры, определяемые как кластеры при  $p = p_{\text{крит}}$ . Для их представления экстраполируем рекурсивный  $\sigma$ -кластер, как показано ранее в этой главе. Затем, остановив интерполяцию, усечем его таким образом, чтобы положительный внутренний порог оказался равен размеру ячейки в исходной решетке.

**Модели не критических кластеров.** Для того, чтобы распространить эту геометрическую картину на не критические кластеры, т. е. на кластеры при  $p \neq p_{\text{крит}}$ , нам необходимы фракталы с положительным внутренним и конечным внешним порогами. Аналитические рассуждения показывают, что протяженность наибольшего медного кластера составляет величину порядка  $\xi$  при  $p < p_{\text{крит}}$  и уходит в бесконечность при  $p > p_{\text{крит}}$ . Оба варианта легко осуществимы. Можно, например, начать с того же генератора, что и в предыдущем подразделе, однако вместо

естественной его экстраполяции, подставим в качестве инициатора одну из следующих фигур:



**Докритические кластеры.** Инициатор на рисунке слева (построенный с таким расчетом, чтобы  $p < p_{\text{крит}}$ ) составлен из квадратов с длиной стороны  $\xi/2$ . Применяя выбранный генератор к левым сторонам квадратов, будем помещать его *внутри* квадратов, во всех же остальных случаях — *снаружи*. Квадрат инициатора превратится при этом в нетипичный кластер протяженности  $\xi$ , окруженный множеством типичных кластеров протяженности  $< \xi$ .

**Сверхкритические кластеры.** Инициатор на рисунке справа (построенный так, чтобы  $p > p_{\text{крит}}$ ) составлен из тех линий исходной квадратной решетки, координаты которых ( $x$  или  $y$ ) являются четными целыми числами. Из каждого узла (координаты которого являются четными целыми числами) исходят по четыре связи; выбранный генератор всегда помещается слева. В особом случае, когда берег-генератор не содержит ни петель, ни свободных концов, получающаяся картинка представляет собой дерандомизированный и систематизированный вариант грубой модели кластеров, основанной исключительно на «узлах и связях».

Заметим, что фрактально-геометрическое представление выводит некритические кластеры из критических, в то время как физики предпочитают рассматривать критические кластеры как предельный случай некритических кластеров при  $\xi \rightarrow \infty$ .

## РАЗМЕРНОСТЬ $D_c$ КРИТИЧЕСКИХ БЕРНУЛЛИЕВЫХ КЛАСТЕРОВ

Значение  $D_c$  непосредственно выводится либо из показателя  $D/D_c = E/D_c$  в формуле для  $\text{Ng}(M > \mu)$ , либо из показателя  $Q = 2D_c - D = 2D_c - E$  в формуле для  $\langle M(R) \rangle$ . Введя греческие буквы  $\tau$ ,  $\sigma$  и  $\eta$  в обычном для данного контекста значении, получим  $E/D_c = \tau - 1$  и  $2D_c - E = 2 - \eta$ . Отсюда

$$D_c = E/(\tau - 1) = E/(1 + \sigma^{-1})$$

$$\text{и } D_c = 1 + (E - \eta)/2.$$

Благодаря установленным физиками соотношениям между величинами  $\tau$ ,  $\sigma$  и  $\eta$ , мы знаем, что вышеприведенные формулы для  $D_c$  экви-

валентны. И наоборот, их эквивалентность имеет не только физические корни, поскольку следует из геометрических соображений.

Харрисон, Бишоп и Куинн [198], Киркпатрик [267] и Штауффер [536] независимо друг от друга получили одинаковое значение  $D_c$ . Они отталкиваются от свойств кластеров при  $p > p_{\text{крит}}$  и, как следствие, выражают полученный результат с помощью различных критических показателей ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  и  $\sigma$ ). За их рассуждениями не стоит никакой конкретной фрактальной картины. Примером опасностей, таящихся в таком подходе (относительно которого я уже предостерегал ранее в этой же главе), может послужить тот факт, что он привел Стенли [533] к заключению: величины  $Q$  и  $D_c$  являются одинаково законными размерностями.

В случае  $E = 2$  численное значение  $D_c$  равно 1,89. Оно согласуется с эмпирическими свидетельствами, полученными с помощью определенной процедуры, знакомой нам по другим задачам. Возьмем некоторую величину  $r$ , которая, кстати, вовсе *не обязана* иметь вид  $1/b$ , где  $b$  — целое число. Теперь возьмем большой вихрь, который в сущности представляет собой квадратную или кубическую решетку со стороной 1. Покроем его субвихрями со стороной  $r$ , сосчитаем количество  $N$  квадратов или кубов, пересекающих кластер, и вычислим приближенное значение размерности  $\ln N / \ln(1/r)$ . Повторим процесс с каждым непустым субвихрем со стороной  $r$ , покрыв его субсубвихрями со стороной  $r^2$ . И так далее, по возможности большее число раз. Наиболее осмысленные результаты дает  $r$ , близкое к 1. В некоторых ранних экспериментах [391, 192] была получена смещенная оценка  $D^+ \sim 1,77$ , однако последующее, более обширное, моделирование [537] подтвердило теоретическое значение  $D$ .

◁ Смещенное экспериментальное значение  $D^+$  очень близко к  $Q$ ; на какой-то миг может даже показаться, что это подтверждает теоретические рассуждения [534] и [391], которые ошибочны в том, что объявляют величину  $Q$  размерностью. Мое внимание на эту ошибку обратил С. Киркпатрик. Еще одну, более раннюю, отличную от вышеприведенной, но также ошибочную оценку  $D$  можно найти в статье [293]. ►

## КИПАРИСОВЫЕ РОЩИ ОКЕФЕНОКИ

Если взглянуть с самолета на лес, за которым никто систематически не «присматривает», можно увидеть, что его граница весьма напоминает береговую линию острова. Контуры отдельных групп деревьев чрезвычайно извилисты и изрезаны, и по соседству с каждой большой группой расположены меньшие группы различного размера. Мое предположение о том, что эти формы могут подчиняться закону Ричардсона и/или/ закону Корчака, было полностью подтверждено в неопуб-

ликованном исследовании болота Окефеноки (см. [261]), предпринятом Х. М. Хейстингсом, Р. Монтиччиоло и Д. вун Канноном. Наиболее изрезанными оказались контуры кипарисовых роц ( $D \sim 1,6$ ); гораздо слабее выражена изрезанность широколиственных и смешанных лесов: размерность  $D$  их границ приближается к 1. Мои информаторы отмечают наличие впечатляющего разнообразия масштабов как при личном наблюдении, так и при изучении карт растительности. Имеется, кстати, и внутренний порог, равный приблизительно 40 акрам, — возможно, следствие особенностей аэрофотосъемки.



## 14 ◊ ВЕТВЛЕНИЕ И ФРАКТАЛЬНЫЕ РЕШЕТКИ

В главе 6 мы рассматриваем плоские кривые Коха с размерностью  $D < 2$ , которые не содержат двойных точек, благодаря чему их можно назвать лишенными самопересечений или неразветвленными. А глава 7 посвящена кривым Пеано, неизбежным пределом для которых являются повсюду плотные двойные точки. В настоящей главе мы намерены сделать следующий шаг и исследовать некоторые примеры намеренно разветвленных самоподобных фигур: плоских кривых ( $1 < D < 2$ ), пространственных кривых ( $1 < D < 3$ ) и поверхностей ( $2 < D < 3$ ). Количество двойных точек в разветвленной самоподобной кривой стремится к бесконечности.

Математический аппарат, используемый в этой главе, не нов (хотя и известен очень немногим специалистам) — новым является мое применение его для описания Природы.

### САЛФЕТКА СЕРПИНСКОГО — ОЧЕРЕДНОЕ ЧУДОВИЩЕ

Я предложил термин *салфетка Серпинского* для обозначения фигуры, изображенной на рис. 205. На рис. 207 показан пространственный вариант той же фигуры. Процедуры их построения описаны в пояснениях к рисункам.

У Хана [190] читаем: «Точка кривой называется точкой ветвления, если граница сколь угодно малой ее окрестности содержит более чем две точки, принадлежащие той же кривой... Здравый смысл, судя по всему, настаивает на том, что никакая кривая просто не может состоять из одних лишь... точек ветвления. Это очевидное убеждение опровергается... кривой Серпинского, *все точки которой являются точками ветвления*».

### ЭЙФЕЛЕВА БАШНЯ: ПРОЧНОСТЬ И ИЗЯЩЕСТВО

И опять Хан со своими взглядами сел в лужу, хотя надо признать, что не характерный для него выбор слов («судя по всему») оказывается весьма мудр. Мой первый контраргумент позаимствован из достижений инженерной мысли. (Перед тем, как приступить к рассмотрению

компьютерных структур в конце главы 12, я уже говорил о том, что не усматриваю ничего нелогичного во включении искусственных систем со сложной структурой в настоящий труд, посвященный феноменам Природы.)

Я утверждаю, что (задолго до Коха, Пеано и Серпинского) в построенной Гюставом Эйфелем в Париже башне была осознанно воплощена идея фрактальной кривой, содержащей множество точек ветвления.

В первом приближении Эйфелева башня состоит из четырех А-образных элементов. Согласно легенде, Эйфель выбрал букву А, чтобы выразить в своей башне слово *Amour*<sup>1</sup>. Все четыре А-образных элемента имеют общую вершину, а соседние А — общее ребро. Кроме того, на верхушке возвышается еще одна, прямая, башня.

Заметьте, что и А-элементы, и верхняя башня сделаны не из цельных балок, а из колоссальных ферм. Фермой называется жестко скрепленная совокупность взаимосвязанных звеньев, каждое из которых не может быть деформировано без деформации, по крайней мере, одного из соседних звеньев. При одинаковой прочности фермы оказываются значительно легче цельных цилиндрических балок. А Эйфель сообразил, что фермы, звенья которых сами являются фермами, еще легче.

Бакминстер Фуллер открыл миру глаза на то, что секрет прочности скрыт в точках ветвления, однако умудренные опытом строители готических соборов знали об этом задолго до него. Чем дальше мы заходим в применении этого принципа, тем ближе подбираемся к идеалу Серпинского! Бывший ученик Безиковича Фримен Дайсон в поисках прочных и легких конструкций для своих межпланетных построек описал однажды бесконечно экстраполированную Эйфелеву башню ([125], с. 646).

## КРИТИЧЕСКИЕ ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ КЛАСТЕРЫ

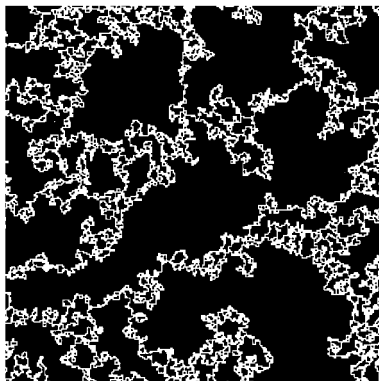
Вернемся снова к природе, вернее, к образу природы, описываемому статистической физикой. Я полагаю, что при изучении перколяции сквозь решетки нам просто *не обойтись* без кого-нибудь из родственников салфетки Серпинского. В главе 13, открывающей рассмотрение данного прецедента, утверждалось, что перколяционные кластеры фрактальны. Теперь я пойду дальше и скажу, что разветвленная структура салфетки Серпинского представляет собой весьма многообещающую модель структуры магистралей кластеров.

Физики оценят эту модель главным образом по тому факту, что она работает, и работает быстро: в статье [166] показано, что с помощью такой модели можно выполнять обычные вычисления *точно*. Подробности слишком специальные для того, чтобы войти в настоящее эссе, а вот

<sup>1</sup>Любовь (франц.). — Прим. перев.



причины, благодаря которым я пришел к этим выводам, могут оказаться интересными. Впервые я задумался об этом, когда заметил сходство между салфеткой Серпинского и магистралями кластеров, показанными на следующем рисунке:



Наиболее явная причина заключена в тремах, оставшихся пустыми после удаления болтающихся связей (образовавшихся после сокращения кластера до магистрали) и кластеров, целиком содержащихся внутри заинтересовавшего меня кластера. Вторая причина: в главе 13 мы показали, что самоподобие является в высшей степени желательным свойством для геометрической модели перколяционного кластера, а ветвление салфетки Серпинского как раз самоподобно. И наконец, размерности этих двух структур настолько близки, что это едва ли может быть простым совпадением! Согласно оценке С. Киркпатрика, плоский кластер имеет размерность  $D \sim 1.6$  — поразительно близко к размерности  $D$  салфетки Серпинского! Размерность же пространственного кластера  $D \sim 2,00$  почти совпадает с фрактальной размерностью асимметричной паутины на рис. 207. Кроме того, в [166] показано, что идентичность размерности  $D$  магистрали и размерности обобщенной салфетки сохраняется и в  $\mathbb{R}^4$ . Еще один аргумент в пользу «салфеточной» модели мы представим несколько позже в виде последнего приложения ветвления.

## ТРОИЧНЫЙ КОВЕР СЕРПИНСКОГО

Перейдем от треугольных решеток к прямоугольным. Они демонстрируют большое разнообразие возможных конструкций — *кривых* на плоскости и в пространстве и *поверхностей* в пространстве. Что касается кривых, то они, несмотря на внешнее сходство с салфеткой Серпинского, весьма отличны от нее с фундаментальной точки зрения на ветвление, к которой мы еще вернемся после определения этих кривых.

Буквальное распространение на плоскость канторова метода удаления средних третей описано в пояснении к рис. 205; инициатором такого построения служит квадрат. Фрактал, получаемый бесконечным повторением этого процесса, широко известен под неприятзательным названием *троичного ковра Серпинского*. Его размерность  $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,8927$ .

## НЕТРОИЧНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ КОВРЫ

Для построения «ковра с большим медальоном в центре» запишем, как обычно,  $r = 1/b$ , где  $b$  — целое число, большее 3; в качестве инициатора возьмем квадрат, в качестве тремы — квадрат со стороной  $1 - 2r$  с центром в той же точке, а в качестве генератора — узкое кольцо из  $4(b - 1)$  квадратов со стороной  $r$ . Размерность такого ковра имеет вид  $D = \ln[4(b - 1)] / \ln b$ . Если взять нечетное целое  $b > 3$ , в качестве тремы — один подквадрат со стороной  $r$  и с центром в той же точке, что и центр инициатора, а в качестве генератора — широкое кольцо из  $(b^3 - 1)$  малых квадратов, то получится «ковер с малым медальоном в центре». Размерность такого ковра имеет вид  $D = \ln(b^3 - 1) / \ln b$ . Таким образом, в центрированных коврах можно получить сколь угодно близкое приближение к любому значению  $D$  в интервале от 1 до 2.

Нецентрированные ковры определяются при  $b \leq 2$ . Например, при  $b = 2$  и  $N = 3$  можно разместить трему, состоящую из одного подквадрата, в правом верхнем подквадрате. Соответствующее предельное множество оказывается *салфеткой* Серпинского, построенной из треугольника, образующего левую нижнюю половину квадрата.

## ТРОИЧНАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ ПЕНА

Буквальное распространение троичного ковра на пространство начинается с удаления из куба в качестве тремы среднего подкуба (27-й части объема исходного куба), после чего остается «оболочка» из 26 подкубов. Получаемый посредством такой процедуры фрактал я предлагаю назвать *троичной фрактальной пеной*. Ее размерность  $D = \ln 26 / \ln 3 = 2,9656$ .

Каждая трема здесь со всех сторон окружена непрерывной границей, разделенной на бесконечное множество бесконечно тонких слоев бесконечной плотности. Для того, чтобы попасть из точки, расположенной в одной треме, в точку, расположенную в другой треме, необходимо пройти сквозь бесконечное количество слоев. Это напоминает «пространственно-временную пену», которая, согласно Дж. А. Уилеру и Дж. У. Хокингу, составляет тончайшую структуру материи. Вынужден, однако, признаться, что я не владею этой темой в достаточной степени, поэтому не решусь обсуждать ее здесь.

## ТРОИЧНАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ ГУБКА МЕНГЕРА

Карл Менгер предлагает в качестве тремы другую фигуру: крест, из центра которого спереди и сзади торчит по выступу. При этом от куба остается  $N = 20$  связанных друг с другом подкубов со стороной  $1/3$ . Из этих подкубов двенадцать образуют «бруссы» или веревки, а остальные восемь являются узлами или соединителями. Размерность предельного множества (см. рис. 208) составляет  $D = \ln 20 / \ln 3 = 2,7268$ . Я называю эту структуру *губкой*, так как здесь и творог, и сыворотка представляют собой связанные множества. Можно представить себе, как между двумя любыми точками области сыворотки свободно течет вода.

Чтобы получить комбинацию веревок и листов, возьмем в качестве тремы троичный крест всего лишь с одним выступом — спереди. А если при этом время от времени менять направление выступа, то листы в предельной конструкции получатся дырявыми. Возможно, здесь следует упомянуть и о том, что я размышлял обо всех этих формах, когда искал модели для описания турбулентной перемежаемости, — еще до того, как прочел о них у Менгера.

## НЕТРОИЧНЫЕ ГУБКИ И ПЕНЫ

Для получения обобщенных губок Менгера с нетроичным основанием  $b > 3$ , трема должна представлять собой комбинацию из трех цилиндров с квадратными основаниями с соблюдением следующих условий: ось каждого из цилиндров должна совпадать с одной из осей единичного куба, длина каждого цилиндра должна быть равна 1, а стороны его основания должны быть параллельны другим осям куба. Чем больше длина стороны основания, тем «легче» получаемая губка. Наибольшая возможная длина стороны основания для случая  $E = 3$  составляет  $1 - 2/b$ , генератор при этом имеет вид комбинации  $12b - 16$  кубов со стороной  $r = 1/b$ . Отсюда размерность  $D = \ln(12b - 16) / \ln b$ . Аналогичным образом получаем «плотную» губку (только при нечетном  $b$ ) — длина стороны основания цилиндра в этом случае равна  $1/b$ . При  $E = 3$  генератор имеет вид комбинации  $b^3 - 3b + 2$  кубов со стороной  $r = 1/b$ . И размерность теперь равна  $D = \ln(b^3 - 3b + 2) / \ln b$ .

Фрактальные пены обобщаются аналогичным образом. При  $E = 3$  «густые» пены дают размерность  $D = \ln(b^3 - 1) / \ln b$ , а «разреженные» —  $D = \ln(6b^2 - 12b + 8) / \ln b$ . Если пустоты велики, а размерность близка к 2, то пена похожа на чрезмерно ноздреватый эмментальский сыр; при малых пустотах и  $D \sim 3$  пена напоминает другой изысканный сыр — аппенцельский.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПУСТОТ

Тремы губок сливаются в одно целое, в то время как тремы ковров и пен представляют собой изолированные друг от друга пустоты, подобные паузам в канторовой пыли (см. главу 8). Распределение их линейного масштаба  $\Lambda$  подчиняется правилу

$$\text{Nr}(\Lambda > \lambda) \propto F\lambda^{-D},$$

где  $F$  — константа. Это правило нам хорошо известно еще с рассмотрения пустот в канторовой пыли, а также островов и кластеров в главе 13.

## ПОНЯТИЕ О ФРАКТАЛЬНОЙ СЕТИ. РЕШЕТКИ

*Решеткой* в стандартной геометрии называется совокупность параллельных прямых, ограничивающих одинаковые квадраты, треугольники или другие регулярные фигуры. Этот же термин, судя по всему, применим и к правильным фракталам, любые две точки которых могут быть соединены одна с другой двумя различными путями, нигде более не пересекающимися. В случае *неправильного* — например, случайного — фрактала *решетку* я заменяю *сетью*.

При более внимательном сравнении стандартных и фрактальных решеток становятся заметны весьма значительные различия. Первое заключается в том, что стандартные решетки инвариантны при сдвигах, но не при масштабировании, тогда как для фрактальных решеток верно обратное. Второе различие: при уменьшении размера ячейки стандартной решетки решетка в пределе сходится в плоскость. Кроме того, некоторые стандартные решетки можно интерполировать, помещая дополнительные прямые посередине между уже существующими прямыми и продолжая этот процесс до бесконечности. В этом случае решетка также сходится в плоскость. Аналогичным образом, если возможна интерполяция стандартной пространственной решетки, то пределом ее становится все пространство. То есть предел стандартной решетки *не является* решеткой. В случае фракталов ситуация прямо противоположна: пределом приближенной фрактальной решетки является фрактальная же решетка.

Термин применим и к фрактальным пенам — их можно считать *разветвленными фрактальными решетками*.

## ФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ СЕЧЕНИЙ

**Основное правило.** Во многих случаях при изучении фракталов важно знать размерности линейных и плоских сечений. Основное

наблюдение здесь (мы воспользовались им в главе 10 для того, чтобы показать, что размерность турбулентности  $D > 2$ ) касается сечения плоской фрактальной фигуры интервалом, «независимым от фрактала». Оказывается, если сечение пусто, то его размерность «почти наверняка» составляет величину  $D - 1$ .

Соответствующее значение для пространственного случая  $D - 2$ .

**Исключения.** К сожалению, этот результат весьма сложно проиллюстрировать, имея дело с неслучайными фракталами, обладающими осями симметрии. Интервалы, на которые мы первым делом обращаем внимание, параллельны этим осям и, как следствие, нетипичны, а *почти любое* простое сечение каким-либо другим интервалом принадлежит исключительному множеству, к которому вообще правило не применимо.

Возьмем, например, ковер Серпинского, троичную губку Менгера и троичную пену. Значение  $D - 1$ , которое почти наверняка должно оказаться размерностью сечения плоской фигуры отрезком, будет, соответственно, равно:

$$\begin{aligned} & \ln(8/3)/\ln 3, \\ & \ln(20/9)/\ln 3 \text{ и} \\ & \ln(26/9)/\ln 3. \end{aligned}$$

Обозначим через  $x$  абсциссу интервала, параллельного оси  $y$  ковра Серпинского. Если число  $x$ , записанное в троичной системе счисления, оканчивается на бесконечную последовательность нулей и двоек, то сечения сами представляют собой интервалы, а значит  $D = 1$  — больше, чем мы ожидали. Если же  $x$  оканчивается на бесконечную последовательность единиц, то сечения являются пылевидными канторовыми множествами с размерностью  $D = \ln 2/\ln 3$ , которая слишком мала. А если  $x$  оканчивается периодической последовательностью периода  $M$ , включающей в себя  $pM$  единиц и  $(1 - p)M$  нулей или двоек, то размерность сечений имеет вид  $D = p(\ln 2/\ln 3) + (1 - p)$ . Ожидаемое значение  $D$  получается лишь при  $p \sim 0,29$ . ◁ То же верно и в случае случайной последовательности цифр в троичной записи числа  $x$ . ► Таким образом, мы получаем три различных размерности — наибольшую, наименьшую и среднюю.

Очень похожие результаты получаются и в пространственном случае.

Что касается салфетки Серпинского, ее наиболее вероятная размерность  $D = \ln(3/2)/\ln 2$ , однако значения размерности «естественных» сечений варьируются от 1 до 0. Например, если короткий интервал, проходящий через середину одной из сторон салфетки, достаточно близок к перпендикуляру, то его пересечением с салфеткой будет *единственная* точка (размерность сечения  $D = 0$ ).

Разнообразие этих особых сечений отчасти объясняется регулярностью исходных фигур. С другой стороны, наиболее экономичное сечение

(причем необязательно прямой линией) неизбежно является основой понятий топологической размерности и степени ветвления, к которым мы сейчас и переходим.

## РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ФРАКТАЛЫ КАК КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

Как мы уже отмечали, термин «кривая» используется в настоящем эссе как эквивалент фразы «связная фигура с топологической размерностью  $D_T = 1$ ». Вообще говоря, математик сочтет такую формулировку не совсем удовлетворительной, точные же выражения для этого понятия весьма деликатны. К счастью, для того, чтобы объяснить, почему любая кривая Коха с инициатором  $[0, 1]$  заслуживает звания кривой, нам в главе 6 хватало одного простого соображения: как и сам интервал  $[0, 1]$ , кривая Коха связна, однако становится несвязной при удалении любой принадлежащей ей точки кроме 0 и 1. А граница снежинки похожа в этом отношении на окружность — она связна, но становится несвязной, если удалить любые две ее точки.

Выражаясь более педантично (как нам теперь и подобает), топологическая размерность определяется рекурсивно. Для пустого множества  $D_T = -1$ . Для любого другого множества  $S$  значение  $D_T$  на единицу больше, чем наименьшая размерность  $D_T$  разъединяющего множество  $S$  «сечения». Размерность конечных и канторовых пылевидных множеств  $D_T = 1 - 1 = 0$ , так как для их разъединения требуется удалить пустое множество. Следующие же связные множества становятся несвязными при удалении «сечения» с размерностью  $D_T = 0$ : окружность, интервал  $[0, 1]$ , граница снежинки Коха, салфетка и ковер Серпинского, губки Менгера. (В трех последних случаях достаточно избежать особых сечений, включающих в себя интервалы.) Следовательно, размерность всех перечисленных множеств  $D_T = 1$ .

Исходя из тех же соображений, фрактальная пена представляет собой поверхность с размерностью  $D_T = 2$ .

Рассмотрим еще один вариант доказательства того, что для салфетки, всех ковров и всех губок с  $D < 2$  топологическая размерность  $D_T = 1$ . Поскольку  $D_T$  есть целое число  $\leq D$ , из неравенства  $D < 2$  следует, что  $D_T$  должна быть равна либо 0, либо 1. Но рассматриваемые множества являются связными, значит размерность  $D_T$  не может быть меньше 1. Единственное решение:  $D_T = 1$ .

## СТЕПЕНЬ ВЕТВЛЕНИЯ КРИВОЙ

Топологическая размерность и соответствующие понятия пыли, кривой и поверхности дают нам лишь классификацию первого уровня.

В самом деле, два конечных множества, содержащих соответственно  $M'$  и  $M''$  точек, имеют одинаковую размерность  $D_T = 0$ , но различаются топологически. А канторова пыль отлична от любой конечной пыли.

Рассмотрим, как можно применить к кривым параллельное различие, основанное на количестве содержащихся в множестве точек ( $\triangleleft$  его «мощности»  $\triangleright$ ), что приведет нас к топологическому понятию *степени ветвления*, определенному в начале двадцатых годов Паулем Урысоном и Карлом Менгером. Это понятие почти не упоминается в математической литературе (за исключением трудов самих первопроходцев), зато приобретает все большее значение в физике — любое чудовище проще изучать в прирученном виде, нежели в диком. Оно показывает также, что, рассматривая сначала салфетку, а лишь затем ковер, мы будем руководствоваться не только эстетическими соображениями или стремлением к завершенности.

В понятие степени ветвления входит сечение множества, содержащее *наименьшее* количество точек, которые следует удалить для разъединения множества  $S$ . Кроме того, оно включает в себя и окрестности всех точек  $P$ , принадлежащих множеству  $S$ .

**Окружность.** Для плавного перехода от стандартной геометрии к фрактальной начнем с того, что назовем множеством  $S$  окружность радиуса 1. Окружность  $B$  с центром в точке  $P$  пересекает  $S$  в  $R = 2$  точках, за исключением тех случаев, когда радиус  $B$  больше 2 — при этом  $R = 0$ . Диск, ограниченный окружностью  $B$ , называется окрестностью точки  $P$ . Таким образом, любая точка  $P$  лежит в какой-либо произвольно малой окрестности, граница которой пересекает  $S$  в  $R = 2$  точках. Вот, собственно, и все: если  $B$  является границей некоторой общей окрестности точки  $P$ , не обязательно круглой, но «не слишком большой», то  $R$  равно, по меньшей мере, 2. Слова «не слишком большой» в предыдущем предложении могут, несомненно, внести путаницу, однако избежать их, к сожалению, не представляется возможным. Величина  $R = 2$  называется степенью ветвления окружности. Заметим, что для всех точек окружности эта величина неизменна.

**Салфетка.** Положим теперь, что множество  $S$  — это салфетка Серпинского, построенная с помощью трем. Здесь  $R$  уже не является одинаковым для всех точек  $P$ . Позвольте мне, воспользовавшись рассуждениями Серпинского, показать, что во всех точках множества, за исключением вершин инициатора, значение  $R$  может быть равным либо 3 ( $R_{\min}$ ), либо 4 ( $R_{\max}$ ).

Значение  $R = 4$  относится к вершинам любого конечного приближения к  $S$  с помощью треугольников. Вершина для аппроксимации порядка  $h \geq k$  является общей вершиной  $P$  для двух треугольников с длиной стороны  $2^{-k}$ . Окружности с центром в точке  $P$  и радиусом  $2^{-k}$  (при  $h > k$ ) пересекают множество  $S$  в 4 точках и ограничивают произ-

вольно малые окрестности точки  $P$ . А если  $B$  ограничивает «достаточно малую» окрестность точки  $P$  (при том, что вершины инициатора лежат вне  $B$ ), то можно показать, что  $B$  пересекает  $S$ , по меньшей мере, в 4 точках.

Значение  $R = 3$  характеризует любую точку множества  $S$ , являющуюся пределом бесконечной последовательности треугольников, каждый из которых содержится внутри предшествующего ему треугольника и имеет вершины, отличные от вершин своего предшественника. Окружности, описанные вокруг этих треугольников, пересекают множество  $S$  в 3 точках, ограничивая при этом произвольно малые окрестности точки  $P$ . В этом случае, если  $B$  ограничивает достаточно малую окрестность точки  $P$  (вершины инициатора здесь также должны лежать вне  $B$ ), то можно показать, что  $B$  пересекает  $S$ , по меньшей мере, в 3 точках.

**Ковры.** Когда множество  $S$  является ковром Серпинского, мы получаем радикально иной результат. Пересечение границы любой достаточно малой окрестности и  $S$  представляет собой несчетно бесконечное множество точек, причем независимо от параметров  $N$ ,  $r$  или  $D$ .

**Замечание.** В этой дихотомии конечного/бесконечного салфетка немногим отличается от стандартных кривых, в то время как ковры неотличимы от плоскости.

**Однородность. Единственность.** Обозначив через  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  наименьшее и наибольшее значения  $R$ , достижимые в точке, принадлежащей множеству  $S$ , Урысон доказывает, что  $R_{\max} \geq 2R_{\min} - 2$ . Ветвление называется *однородным*, если выполняется равенство  $R_{\max} = R_{\min}$ ; так бывает, когда  $R \equiv 2$ , как в простых замкнутых кривых, или когда  $R \equiv \infty$ .

Для других решеток, где  $R_{\max} = 2R_{\min} - 2$ , я предлагаю термин *квазиоднородные*. Самый простой и широкоизвестный пример таких решеток — самоподобная салфетка Серпинского. Другие неслучайные примеры входят в собранную Урысоном коллекцию (см. [571]) и не являются самоподобными. Таким образом, условиям квазиоднородности и самоподобности одновременно удовлетворяет только одно известное множество — салфетка Серпинского. Можно ли строго подтвердить эту, судя по всему, единственность?

**Стандартные решетки.** Здесь степень ветвления варьируется от минимального значения 2 для всех точек решетки, за исключением узлов, до переменного конечного максимального значения, достигаемого в узлах решетки: 4 (квадратная решетка), 6 (треугольная или кубическая решетка) или 3 (шестиугольная решетка). Однако по мере уменьшения размера ячейки стандартной решетки любого типа она трансформируется из кривой в область плоскости, и степень ее ветвления  $R$  устремляется к бесконечности.



Последнее становится более очевидным, если заменить бесконечно малое на бесконечно большое в решетке с фиксированным размером ячейки. Для того, чтобы изолировать все *увеличивающуюся* область решетки, придется пересечь неограниченно большое количество точек.

**Формальное определение.** ◀ См. [426] и [38], с. 442. ▶

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕТВЛЕНИЯ

Зададим себе привычный вопрос. Как бы ни занимали математиков фигуры Серпинского, Менгера и им подобные, не очевидно ли, что для человека, изучающего Природу, степень ветвления не может представлять никакого интереса? Ответ так же привычен — для нас с вами! — как и вопрос. Степень ветвления обретает значимость уже в «реальном мире» конечных аппроксимаций, получаемых при остановке ведущей к фракталу интерполяции при некотором положительном конечном вунтреннем пороге  $\varepsilon$ .

В самом деле, если дано приближение салфетки Серпинского, составленное из заполненных треугольников с длиной стороны  $\varepsilon$ , то можно разъединить область, линейный масштаб которой превышает  $\varepsilon$ , простым удалением трех или четырех точек, каждая из которых принадлежит границе между двумя соседними пустотами. Это число (3 или 4) не изменяется при улучшении приближения. Следовательно, с точки зрения ветвления, все приближения салфетки можно считать кривыми.

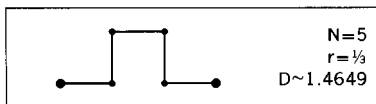
Все ковры, напротив, обладают общим свойством: никакая пара пустот не имеет общей границы. Для разъединения конечного приближения такой фигуры, при рассмотрении которой мы игнорируем пустоты, меньшие  $\varepsilon$ , необходимо удалять целые интервалы. И количество этих интервалов возрастает по мере того, как  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Уайберн [592] показал, что все фрактальные кривые, обладающие этим свойством, топологически идентичны (◀ гомеоморфны ▶) и характеризуются тем, что никакая их часть не может быть отделена удалением одной точки.

С учетом предыдущих замечаний неудивительно, что конечность ветвления находит столь явные и четко очерченные области применения в тех случаях, когда фрактальная геометрия оказывается призвана подробно определить, в какой пропорции плоская фрактальная кривая сочетает в себе два своих стандартных предела: прямую и плоскость. Обобщая, можно сказать, что знать фрактальную размерность кривой *относительно не достаточно*. Например, при исследовании критических феноменов для моделей Изинга на фрактальной решетке авторами работы [165] было установлено, что наиболее важные результаты (◀ будь то при нулевой или при положительной температуре ▶) непосредственно зависят от конечности величины  $R$ .

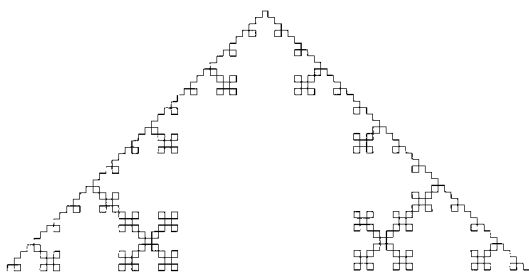
Вот и настало время дать объяснение, к которому мы ранее были не готовы. Причина, по которой магистраль кластера в критической бернуллиевой перколяции лучше моделируется салфеткой Серпинского, нежели ковром, проясняется следующим открытием Киркпатрика [265]. Даже в чрезвычайно больших решетках критическую магистраль можно разредить удалением некоторого, по существу неизменного, малого количества связей (величины порядка 2). Даже принимая во внимание всевозможные отклонения, это открытие представляется мне весьма убедительным свидетельством того, что  $R < \infty$ .

## АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМА ВЕТВЛЕНИЯ

Существуют два варианта снежинки Коха, которые достигают ветвления без образования петель. Первый — плоская кривая, инициатором которой является квадрат, а генератор выглядит следующим образом:



Как видно из рисунка, получаемая кривая ничуть не похожа на снежинку:



Другой пример — поверхность с нулевым объемом, бесконечной площадью и размерностью, равной  $\ln 6 / \ln 2 = 2,58497$ . Инициатором служит правильный тетраэдр. К средней четверти каждой грани (т.е. к треугольнику, вершины которого являются середины ограничивающих грань ребер) приставляется другой тетраэдр, линейные размеры которого уменьшены в два раза. Процедура повторяется с каждой гранью получающегося в результате правильного (асимметричного и невыпуклого) 24-гранника, а затем снова и снова до бесконечности. Начиная со второго этапа построения, добавляемые тетраэдры касаются друг друга гранями без самопересечений. В конце концов они заполняют всю поверхность инициатора. Назовем каждую четверть этой конструкции, выросшую на одной из граней инициатора, пирамидой Коха.

## ТАЙНЫ ПИРАМИДЫ КОХА

Пирамида Коха воистину чудесна — если смотреть сверху, форма ее очень проста, однако в ней скрыто множество потаенных ходов и камер, потрясающих даже самое смелое воображение.

Если смотреть сверху, пирамида Коха — это тетраэдр, основанием которого служит равносторонний треугольник. Что касается трех остальных граней, то они представляют собой прямые равнобедренные треугольники, соединенные вершинами при прямых углах. Если приложить три пирамиды Коха к трем граням правильного тетраэдра, то получится простой куб.

А теперь поднимем нашу пирамиду вверх и стряхнем с нее песок пустыни. Рассматривая ее основание с некоторого расстояния, мы видим, что оно разделяется на четыре равных равносторонних треугольника. Однако на месте среднего треугольника находится отверстие, ведущее в «камеру первого порядка», которая имеет форму правильного тетраэдра, четвертая вершина которого совпадает с верхушкой пирамиды. Подойдя ближе и получив возможность разглядеть более мелкие детали, мы обнаруживаем, что и находящиеся в углах основания правильные треугольники, и верхние грани камеры первого порядка также не являются гладкими поверхностями. Их гладкость нарушается тетраэдральными камерами второго порядка. Аналогичным образом, при исследовании камер второго порядка, мы видим, что в середине каждой треугольной стены имеется треугольное же отверстие, ведущее в камеру третьего порядка. Чем глубже мы погружаемся в пирамиду, тем меньшие камеры открываются нашему взору, и конца им не видно.

Сумма объемов всех камер в точности равна объему всей пирамиды Коха. С другой стороны, если считать, что основания камер являются частью этих камер, а остальные три грани — нет, то окажется, что камеры *не пересекаются ни в одной точке*. Если бы строителям нашей пирамиды пришлось выдалбливать камеры в толще скалы, то им пришлось бы удалить всю породу, оставив лишь тонкую оболочку. Кривая, которой пирамида Коха опирается на плоскость, и «стены» камер представляют собой салфетки Серпинского.

## СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕМЫ И РЕШЕТКИ

Авторы работы [313] невольно сделали значительный вклад во фрактальную геометрию, попытавшись заполнить  $\mathbb{R}^E$  шарами, радиус каждого из которых имеет вид  $\rho_k = \rho_0 r^k$ , где  $r < 1$ ; число шаров радиуса  $\rho_k$  на единицу объема имеет вид  $n_k = n_0 \nu^k$ , где  $\nu$  — целое число вида  $\nu = (1 - r)r^{-E}$ , что накладывает жесткие ограничения на  $r$ . Таким образом, показатель распределения размеров пустот определяется

следующим выражением:

$$D = \ln \nu / \ln(1/r) = E - \ln(1-r) / \ln r.$$

Сначала разместим большие сферы радиуса  $\rho_1$  в центрах ячеек решетки с шагом  $2\rho_1$ . Узлы решетки с шагом  $2\rho_2$ , лежащие вне больших сфер, оказываются достаточно многочисленными, чтобы послужить центрами для сфер меньшего радиуса ( $\rho_2$ ) и так далее. Такая конструкция подразумевает следующие верхние границы величины  $r$ :

$$\begin{array}{ll} \text{при } E=1, & r \leq 1/3; \\ \text{при } E=2, & r \leq 1/10; \\ \text{при } E=3, & r \leq 1/27; \\ & \text{при } E \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0. \end{array}$$

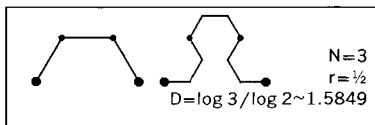
Заполнение  $\mathbb{R}^3$  непересекающимися шарами может занять меньшее время. В случае же одномерной линии максимальное значение  $r$  составляет  $1/3$ , что соответствует значению  $r$  для троичной канторовой пыли! Существование канторовых пылевидных множеств с  $r > 1/3$  указывает на то, что одномерная упаковка может оставлять пустоты произвольно малой размерности. С другой стороны, более тесная упаковка подразумевает более сложную структуру.

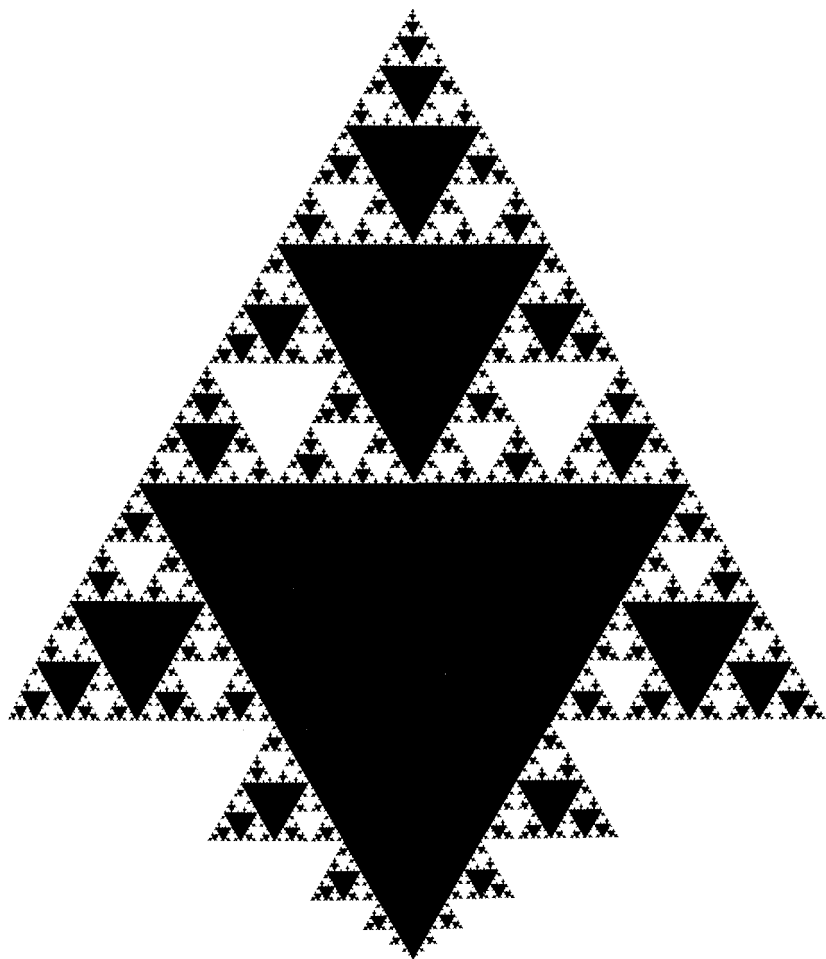
## АНОНС: ЛАКУНАРНОСТЬ

Даже после того, как мы добавим к размерностям  $D_T$  и  $D$  степень ветвления  $R$ , фрактал остается во многих отношениях недостаточно определен. Особое значение имеет еще одно дополнительное свойство, которое я назвал лакунарностью. Пустоты в очень лакунарном фрактале имеют очень большой размер, и наоборот. Основные определения можно было бы привести и здесь, однако мне представляется более целесообразным отложить это до главы 34.

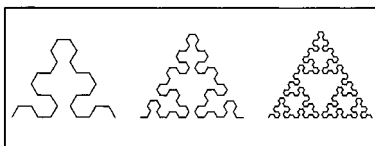
### Рис. 205. СТРЕЛА СЕРПИНСКОГО (РАЗМЕРНОСТЬ ГРАНИЦЫ $D \sim 1,5849$ )

В [522] Серпинский строит кривую, инициатором которой является интервал  $[0, 1]$ , а генератор и второй терагон выглядят следующим образом:





Последующие этапы построения имеют вид:



О том, как будет выглядеть эта кривая на одном из поздних этапов построения, можно получить представление, взглянув на очертания «береговой линии» в верхней части рис. 205 (над самым большим черным треугольником).

**Самокасания.** Конечные приближения кривой не имеют точек самокасания (как в главе 6), однако предельная кривая содержит бесконечно много таких точек.

**Стрелы, заполняющие плоскость.** Стрела на рис. 205 (если положить ее набок, она будет больше похожа на тропическую рыбу) определяется как участок кривой Серпинского между двумя последовательными возвращениями в точку самокасания — в данном случае, в середину интервала  $[0, 1]$ . Такими стрелами можно заполнить плоскость; при этом соседние стрелы соединяются друг с другом в этакой безумной экстраполяции застежки Велькро<sup>1</sup>. (Или, возвращаясь к предыдущей метафоре, плавники одной рыбы в точности помещаются между плавниками двух других рыб.) Кроме того, сплавив вместе четыре должным образом выбранных соседних стрелы, мы получим точно такую же стрелу, увеличенную вдвое.

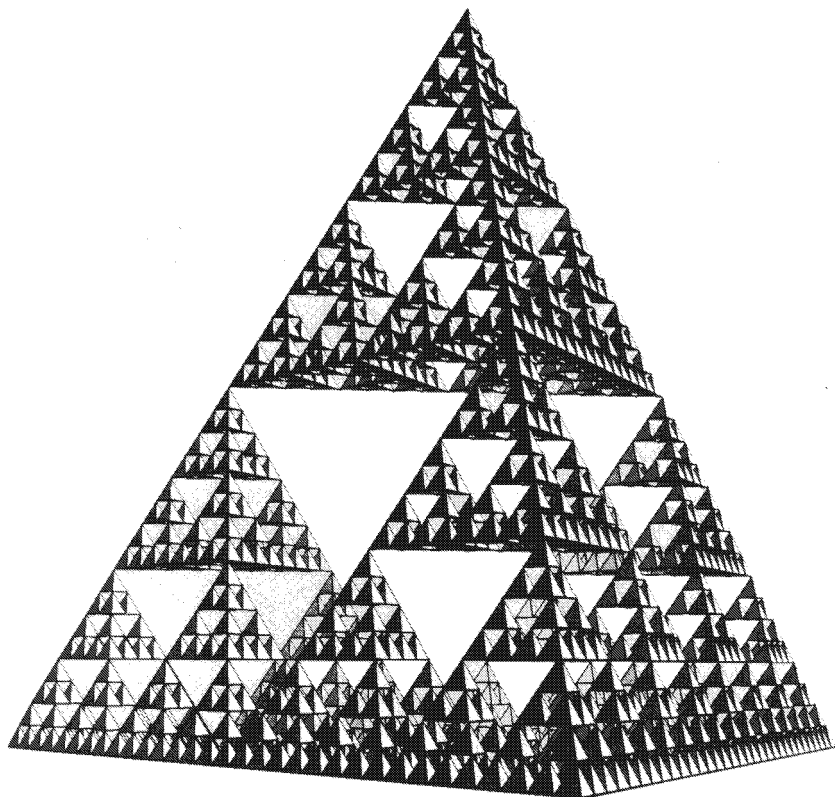
**Трема салфетки Серпинского.** Я называю кривую Серпинского салфеткой по альтернативному способу ее построения, который основан на вырезании «трем» — метод, широко используемый в главах 8 и 31–35. Мы получаем салфетку Серпинского, имея в качестве инициатора, генератора, а также двух последующих этапов построения следующие замкнутые множества:



Этот трема-генератор содержит в себе вышеприведенный линейный генератор в качестве собственного подмножества.

**Водораздел.** Впервые я столкнулся со стрелой Серпинского — правда, тогда я еще не знал о Серпинском — при изучении формы одного водораздела [381]. ■

<sup>1</sup>В просторечии известной как «липучки». — *Прим. перев.*

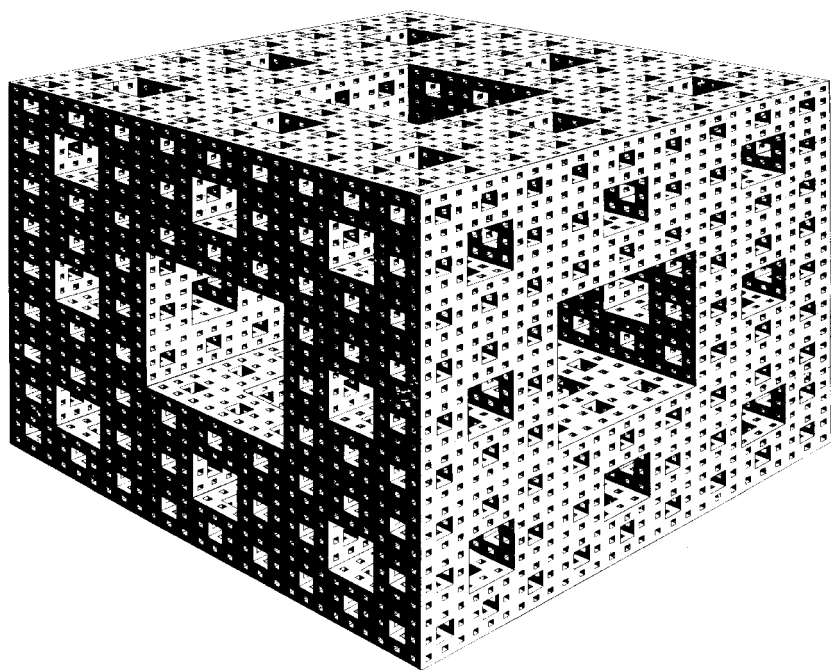


**Рис. 207. АСИММЕТРИЧНАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ ПАУТИНА  
(РАЗМЕРНОСТЬ  $D = 2$ )**

Эта паутина получается рекурсивным построением из замкнутого тетраэдра (инициатора) и совокупности четырех меньших тетраэдров (служащих генератором).

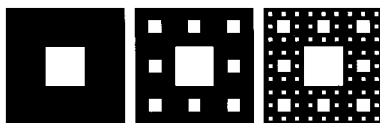
Ее размерность  $D = 2$ . Попробуем спроецировать ее вдоль линии, соединяющей середины любой из пар противоположных ребер. Проекцией тетраэдра-инициатора будет квадрат, который мы назовем исходным. Каждый тетраэдр второго поколения проецируется на подквадрат, длина стороны которого составляет  $1/4$  от длины стороны исходного квадрата, и т. д. Таким образом на исходный квадрат проецируется вся паутина целиком. Границы подквадратов перекрываются.





**Рис. 208. КОВЕР СЕРПИНСКОГО (РАЗМЕРНОСТЬ  $D \sim 1,8928$ ) И ГУБКА МЕНГЕРА (РАЗМЕРНОСТЬ  $D \sim 2,7268$ )**

**Ковер Серпинского.** В [523] Серпинский строит кривую, инициатором которой является сплошной квадрат, а генератор и два следующих терегона представлены ниже:



$$N = 8, \quad r = 1/3, \quad D \sim 1,8928$$

Площадь такого ковра обращается в нуль, а общий периметр его пустот стремится к бесконечности.

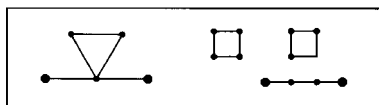
**Рис. 208. Губка Менгера.** Принцип построения очевиден. Продолжая построение до бесконечности, мы получим некий остаток, на-



зывается губкой Менгера. Я сожалею о том, что в своих предыдущих эссе ошибочно приписал ее авторство Серпинскому. (Рисунок воспроизводится по книге Леонарда М. Блюменталья и Карла Менгера «Геометрические этюды»<sup>1</sup> с любезного разрешения ее издателей, компании W. H. Freeman & Co. © 1970.) Пересечения губки с медианами или диагоналями исходного куба являются трюичными канторовыми множествами.

**Сливающиеся острова.** Как ковер, так и салфетку Серпинского можно получить и другим способом — еще одним обобщением рекурсии Коха, допускающим самоперекрытия, которые, однако, учитываются только единожды.

Для получения салфетки инициатором следует взять правильный треугольник, а генератором — фигуру, изображенную слева на приведенном ниже рисунке. Для получения ковра в качестве инициатора возьмем квадрат, а генератором послужит фигура, изображенная справа.



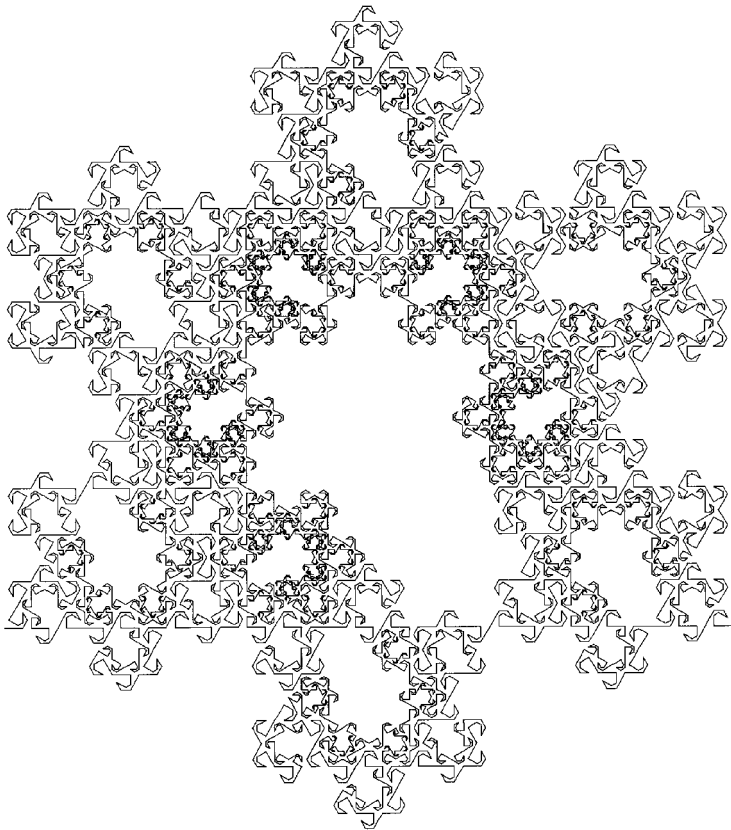
Здесь мы снова встречаемся с двумя феноменами, знакомыми нам по главе 13: береговая линия каждого острова спрямляется, следовательно, размерность ее равна 1, размерность же салфетки или ковра выражает скорее степень фрагментации суши (т.е. степень ее разделенности на острова), нежели степень неправильности береговых линий островов.

В остальном результат совершенно нов: в главе 13 море представляется собой связное множество, что выглядит как должная топологическая интерпретация открытых морских пространств. Оно открыто и в смысле топологии множеств, т.е. его граница ему не принадлежит. Новизна, привнесенная настоящим построением, заключается в том, что коховы острова могут теперь *асимптотически* «сливаться» в некий сплошной сверхостров, однако континента из него не получается, а береговые линии образуют в сочетании решетку.

◁ С точки зрения топологии, всякий ковер Серпинского является плоской универсальной кривой, а губка Менгера представляет собой пространственную универсальную кривую. То есть (см. [38], с. 433 и 501) эти фигуры оказываются самыми сложными кривыми соответственно в плоскости и в пространстве любой более высокой размерности. ►

■

<sup>1</sup>Blumenthal, L. M. & Menger, K. *Studies in geometry*. (См. [38]). — Прим. перев.



**Рис. 210. РАСКОЛ В СНЕЖНЫХ ПАЛАТАХ  
(РАЗМЕРНОСТЬ  $D \sim 1,8687$ )**

Давным-давно в далекой стране в прекрасных Снежных Палатах восседал Великий Правитель со своею свитой. Однако между его подданными произошел раскол, за ним последовала война, в которой ни одна из сторон не одержала верх. И тогда Мудрые Старейшины провели границу, разделившую Палаты надвое, дабы туда могли войти без опасения ступить на враждебную территорию и представители Севера, и представители Юга.

**Загадки лабиринта.** Кто контролирует Великую Палату и как можно войти в нее снаружи? Почему некоторые малые палаты оказываются несориентированы ни по какой стороне света? Подсказку можно найти на обезьяньем дереве на рис. 55. ■

## V ◇ НЕМАСШТАБИРУЕМЫЕ ФРАКТАЛЫ

---

### 15 ◇ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОБЪЕМА. ЖИВАЯ ПЛОТЬ

Фрактальные кривые, поверхности и пылевидные множества, описываемые и в научных целях приручаемые в этой части, можно назвать масштабно-инвариантными только в асимптотическом или как-нибудь иначе ограниченном смысле.

Первая глава части посвящена поверхностям положительного (не обращающегося в нуль!) объема. Что за безумное сочетание противоречивых понятий! Неужели мы наконец добрались до математических чудовищ, лишенных-таки какой бы то ни было полезности для естествоиспытателя? Ответ и на этот раз решительно отрицательный. Некая парочка весьма известных математиков-теоретиков, полагая, что они старательно избегают всяческих связей с Природой, невольно подготовили для меня как раз тот инструмент, в котором я нуждался, чтобы (помимо всего прочего) описать геометрию... живой плоти.

### КАНТОРОВЫ ПЫЛЕВИДНЫЕ МНОЖЕСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ

В качестве предварительного шага освежим в памяти построение Кантором трюничного множества  $C$ . Его нулевая длина (а если быть точным до конца, то нулевая линейная мера) следует из того факта, что длины трем (средних третей) составляют в сумме

$$1/3 + 2/3^2 + \dots + 2^k/3^{k+1} + \dots = 1.$$

Однако то, что множество  $C$  является абсолютно несвязным (и, следовательно, его топологическая размерность  $D_T = 0$ ), не зависит от длин

трем. Это свойство основано на том фундаментальном факте, что на каждом этапе построения каждый полученный на предыдущем этапе интервал рассекается удалением тремы, центр которой приходится на середину этого интервала. Обозначим отношение длин тремы и ее «несущего» интервала через  $\lambda_k$ , тогда выражение для совокупной длины интервалов, оставшихся после  $K$  этапов построения, принимает вид  $\prod_0^K (1 - \lambda_k)$ . Эта длина уменьшается при  $K \rightarrow \infty$  до некоторого предела, который мы обозначим через  $P$ . В оригинальной конструкции Кантора  $\lambda_k \equiv 2/3$ , следовательно,  $P = 0$ . Однако  $P > 0$  всегда, когда  $\sum_0^\infty \lambda_k < \infty$ . В этом случае остаточное множество  $C_*$  имеет положительную длину  $1 - P$ . Это множество не самоподобно, следовательно, не характеризуется размерностью подобия, однако, исходя из определения Хаусдорфа–Безиковича (см. главу 5), мы можем заключить, что размерность  $D$  такого множества равна 1. Из неравенства  $D > D_T$  следует, что множество  $C_*$  фрактально. Так как ни  $D$ , ни  $D_T$  не зависят от длин трем  $\lambda_k$ , значения этих размерностей дают весьма поверхностную характеристику множества  $C_*$ .

Еще более явным выглядит построение на плоскости. Вырежем из единичного квадрата крест площади  $\lambda_1$ , оставив четыре малых квадрата по углам. Затем вырежем из каждого малого квадрата крест относительной площади  $\lambda_2$ . Этот каскад порождает пыль, топологическая размерность  $D_T$  которой равна 0, а площадь выражается произведением  $\prod_0^\infty (1 - \lambda_k)$ . Если площадь не обращается в нуль,  $D = 2$ .

Аналогичным образом можно получить в  $E$ -мерном пространстве пыль положительного объема с размерностями  $D_T = 0$  и  $D = E$ .

## ПЛАВАЮЩАЯ ВЕЛИЧИНА $\ln N / \ln(1/r)$

◁ Хотя канторовы пылевидные множества положительной меры, площади или объема не имеют размерности подобия, представляется полезным записать равенство  $r_k = (1 - \lambda_k)/2$  и рассмотреть формальные размерности, определяемые как  $D_k = \ln N / \ln(1/r_k)$ .

В своем медленном изменении размерность  $D_k$  воплощает идею об эффективной размерности, рассмотренную в главе 3 при описании спутанной в шар нити. На прямой размерность  $D = 1$  предельного множества  $C_*$  представляет собой предел отношения  $\ln 2 / \ln(1/r_k)$ . Более того, заключение  $D = 1$  не требует непрременной справедливости неравенства  $\sum \lambda_k < \infty$ , а удовлетворяется выполнением более слабого условия  $\lambda_k \rightarrow 0$ . Как следствие, мы имеем три класса линейных канторовых пылевидных множеств: а) с размерностью  $0 < D < 1$  и нулевой длиной, б) с размерностью  $D = 1$  и нулевой длиной и, наконец, в) с размерностью  $D = 1$  и положительной длиной.

Случай, подобный последнему (в), может произойти и с кривыми Коха. Для этого достаточно изменять генератор на каждом этапе по-

строения и позволить его размерности  $D$  устремиться к 2. Возьмем, например,  $r_k = k/2$  и присвоим  $N_k$  (а значит и  $D_k$ ) максимальное значение, о котором мы говорили в пояснении к рис. 83. Предельная кривая в этом случае обладает весьма примечательным сочетанием свойств: ее фрактальная размерность  $D = 2$  нестандартна для кривой, однако ее топологическая размерность ( $D_T = 1$ ) и площадь, которая обращается в нуль, являются стандартными.

Та же комбинация свойств характерна и для броуновского движения (см. главу 25), только здесь она достигается при избегании двойных точек.

Формальная размерность может дрейфовать не только в сторону значения  $D = 2$ , но и *прочь* от него. Например,  $k$  этапов построения заполняющего плоскость дерева могут завершиться этапами с размерностью  $D < 2$ . Результат такого построения бывает полезен при моделировании определенных речных бассейнов, которые в масштабах, превышающих внутренний порог  $\eta$ , выглядят как заполняющие плоскость, но в областях меньшего масштаба орошают почву не столь эффективно. Значение  $\eta$  очень велико в пустынях и очень мало (вплоть до 0) во влажных джунглях. Эффективная размерность таких рек составит  $D = 2$  для масштабов, больших  $\eta$ , и  $D < 2$  для масштабов, меньших  $\eta$ . ►

## КРИВЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПЛОЩАДИ

Так как наше интуитивное представление о пылевидных множествах весьма несовершенно, нас мало беспокоит пыль положительной длины или объема. А вот *кривую*, площадь которой отлична от нуля, проплотить уже значительно сложнее. Поэтому после того, как Лебег [294] и Осгуд [458] убедили всех в том, что глотать все равно придется, эти кривые сменили кривую Пеано на посту самого чудовищного чудовища. После описания соответствующего примера я покажу, что действительность не так страшна, как идея: поверхности положительного объема оказываются в самом буквальном смысле близки сердцу любого человека.

А идея заключается в обобщении построения со срединным смещением, приведенного на рис. 71. Мы оставляем неизменными бухты и полуострова, каждый из которых представляет собой треугольник, вдающийся в треугольник болота, причем середина основания полуострова совпадает с серединой основания болотного треугольника. Новизна состоит в том, что относительные ширины  $\lambda_k$  бухт и полуостровов больше не являются постоянными, но стремятся к нулю при увеличении  $k$  таким образом, что  $\prod_0^\infty (1 - \lambda_k) > 0$ . При таком построении площадь болота не стремится к нулю и, следовательно, предельное болото имеет размерность  $D = 2$ . С другой стороны, болото оказывается совершенно

отличным от любого стандартного множества с размерностью 2. Оно не только не имеет внутренних точек, но и является кривой с  $D_T = 1$ , поскольку окрестность любой точки может быть отделена от остального множества удалением всего двух точек.

Идею приведенного выше построения мы позаимствовали у Осгуда [458], несколько упростив его причудливую манеру упрощения сложных надуманных конструкций. Однако не должно судить о ценности научного открытия, исходя из причин его совершения.

## ГЕОМЕТРИЯ АРТЕРИЙ И ВЕН

Позволю себе процитировать Гарвея (1628 г., [201]): «Движение крови может быть названо круговым в том смысле, в каком Аристотель утверждает, что воздух и дождь воспроизводят круговое движение высших тел. . . Подобно этому и в живом теле, благодаря движению крови. . . различные его части питает, лелеет и оживляет более теплая, совершенная, насыщенная, живая и питательная кровь, которая затем, после соприкосновения с упомянутыми частями, становится холодной, сгущенной и, так сказать, ослабленной».

Гарвей пытался донести до современников идею кровообращения, согласно которой почти в каждой точке тела можно найти на малом расстоянии друг от друга и артерию, и вену. (Загляните также и в «Венецианского купца» Шекспира.) В этой идее не нашлось места для капилляров, однако в первом приближении мы вполне можем потребовать, чтобы и артерия, и вена были расположены *бесконечно близко* от *любой* точки тела, — исключая, разумеется, точки, находящиеся *внутри* артерий (вены), которые не могут быть очень близко к вене (артерии).

Сформулируем это иначе (только в такой формулировке результат выглядит еще более странно!): каждая точка ткани, не относящейся к системе кровообращения, должна лежать на границе между двумя кровеносными системами.

Еще одно конструкторское ограничение заключается в том, что кровь нужно экономить. Отсюда полный объем всех артерий и вен должен составлять лишь малый процент от объема тела, оставляя большую часть пространства тканям.

## ЧУДОВИЩА ЛЕБЕГА – ОСГУДА ВНУТРИ НАС

С точки зрения евклидовой геометрии, наши критерии представляют собой изысканную аномалию. Искомая фигура должна быть топологически двумерной, так как она образует границу, общую для двух топологически трехмерных фигур, причем требуется, чтобы ее объем был

одновременно не только пренебрежимо мал по сравнению с объемами фигур, которые она ограничивает, но и гораздо больше этих объемов!

Одно из достоинств фрактального подхода к анатомии заключается в демонстрации того, что вышеуказанные требования прекрасно сочетаются друг с другом. Всем требованиям, которые нам вздумалось наложить на конструкцию системы кровообращения, вполне отвечает пространственный вариант построения Осгуда, описанный в одном из предыдущих разделов.

Вены и артерии в нашей конструкции являются стандартными трехмерными областями, поскольку в них должны целиком уместиться сферы малого радиуса (кровяные шарики). С другой стороны, сосуды занимают очень небольшую долю от общего объема тела. Ткань — иное дело; в ней нет ни одного участка, сколь угодно малого, который не был бы пересечен и артерией, и веной. Ткань представляет собой фрактальную поверхность: ее топологическая размерность 2, а фрактальная размерность 3.

В таком виде вышеприведенные критерии теряют всю свою экстравагантность. И кому теперь интересно, что их появление связано с попыткой надуманного математического бегства от здравого смысла. Они оказались неизбежными и с точки зрения этого самого здравого смысла. Более того, *фрактальные чудовища Лебега — Осгуда составляют самую сущность нашей плоти!*

## ОБ ИНТУИЦИИ И ЗДРАВОМ СМЫСЛЕ

Совместное расположение дыхательных путей и кровеносной системы в легком также представляет собой весьма интересную конструкцию, в которой общую границу имеют уже три множества — артерии, вены и бронхиолы. Первым примером такого множества мы обязаны Брауэру. Рассматривая конструкцию Брауэра с учетом приведенных выше соображений, мы не найдем абсолютно никаких противоречий со здравым смыслом. Однако для оценки ее в исторической перспективе нам следует еще раз обратиться к нашему красноречивому поборнику интуитивного знания и общепринятых воззрений, Гансу Хану.

«Мы интуитивно знаем, что три области могут граничить между собой только в отдельных точках... Мы не в состоянии интуитивно постичь построение Брауэра, хотя логический анализ требует от нас его принятия. В очередной раз [обнаруживается], что даже в простых и элементарных вопросах геометрии совершенно нельзя полагаться на здравый смысл. Невозможно использовать [его] в качестве отправной точки или фундамента математической дисциплины. Пространство геометрии представляет собой... целиком логическое построение...»

[Однако если] мы привыкнем иметь дело с подобными логическими построениями, если они проникнут в школьную программу, если мы будем узнавать о них, так сказать, с младых ногтей, так же, как мы узнаем сейчас о трехмерной евклидовой геометрии — тогда, очевидно, никому и в голову не придет сказать, что такие геометрические построения противны здравому смыслу».

Настоящее эссе служит наглядной демонстрацией того, что Хан опять оказывается глубоко неправ. Для того, чтобы справиться с теми неприятностями, о которых он говорит, необходимо, на мой взгляд, научиться *тот здравый смысл, который есть у нас сейчас*, воспринимать новое — нет необходимости отбрасывать «старый» здравый смысл и пытаться воспитать «новый». Хан ставит ошибочный диагноз и прописывает лекарство, которое загонит пациента в гроб.

Здравый смысл в геометрии никогда не отрицал того, что он нуждается в помощи логики, невзирая на ее странные и запутанные методы. С чего бы логике опять пытаться от него ускользнуть?

Словом, ни в коем случае нельзя полагаться на то, что типичный математик считает совместимым со здравым смыслом; никак невозможно позволять какому бы то ни было здравому смыслу руководить нами при построении той или иной модели; и вообще, математика слишком важна, чтобы можно было отдать ее на откуп фанатикам от логики. ■



## 16 ◊ ДЕРЕВЬЯ. СКЕЙЛИНГОВЫЕ ОСТАТКИ. НЕОДНОРОДНЫЕ ФРАКТАЛЫ

В настоящей главе обсуждаются нитевидные фрактальные деревья и другие почти масштабно-инвариантные фракталы, т.е. масштабно-инвариантные за исключением пренебрежимо малого во фрактальном смысле остатка. Эти фракталы оказываются неоднородными в том смысле, что для разных частей таких множеств размерности  $D$  и/или  $D_T$  принимают различные значения. Оглядываясь же назад, мы видим, что все рассмотренные до сих пор фракталы можно охарактеризовать как однородные.

### ПОНЯТИЕ О МНОЖЕСТВЕ СКЕЙЛИНГОВЫХ ОСТАТКОВ

**Стандартные интервалы.** *Полуоткрытый* интервал  $]0, 1]$ , включающий в себя правую концевую точку и не включающий левую, является масштабно-инвариантным, так как он состоит из  $N = 2$  уменьшенных копий себя  $]0, 1/2]$  и  $]1/2, 1]$ . А вот *открытый* интервал  $]0, 1[$  нельзя считать масштабно-инвариантным, так как кроме  $N = 2$  своих копий меньшего масштаба  $]0, 1/2[$  и  $]1/2, 1[$  он включает в себя и среднюю точку  $x = 1/2$ . Я предлагаю назвать эту среднюю точку *скейлинговым (или масштабным) остатком*. При вычислении  $D$  — и во многих других случаях — ею можно пренебречь. Физик сказал бы, что она характеризуется меньшим физическим порядком величины, чем целое и части.

Приведенный пример может ввести нас в искушение рассматривать *все* остаточные члены как порожденные излишней педантичностью усложнения, никак не влияющие на результат масштабирования. Однако в аналогичных примерах, относящихся к фракталам, которые я называю *неоднородными фракталами*, остаток может приобрести неожиданную большую значимость. Неоднородный фрактал — это сумма (или разность) множеств с различной фрактальной и топологической размерностью. Ни одно из этих множеств нельзя полностью исключить из рассмотрения, даже если они пренебрежимо малы как во фрактальном, так и в топологическом смысле. И между ними часто возникают конфликты с весьма интересными и значительными последствиями.

**Канторовы пылевидные множества и изолированные точки.**

$\triangleleft$  Построим канторову пыль, разделив интервал  $[0, 1]$  на  $b = 4$  части и сохранив крайние  $[0, 1/4]$  и  $[3/4, 1]$ . Альтернативный способ — удаление интервалов  $]1/4, 1/2[$  и  $]1/2, 3/4[$  — дает ту же пыль и остаточную точку  $x = 1/2$ . Эта изолированная точка не является фракталом, так как и  $D_T$ , и  $D$  в этом случае равны 0.

При обобщении на пространство  $\mathbb{R}^E$  канторова пыль имеет размерности  $D_T = 0$  и  $D > 0$ , а для нефрактального множества остатков верно равенство  $D_T = D = E - 1$ . То есть остаток вполне может превосходить пыль топологически и/или фрактально.  $\blacktriangleright$

**ФРАКТАЛЬНЫЕ ДЕРЕВЬЯ, ОСТАТОЧНЫЕ ЧЛЕНЫ КОТОРЫХ ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЙ ИНТЕРВАЛЫ**

На рис. 223 представлены зонтичные деревья с бесконечно тонкими стволами. К жизни они совершенно не приспособлены, и в главе 17 мы постараемся несколько увеличить их адекватность в качестве моделей реальных растений. И все же даже эти «остовы» деревьев представляют большой интерес для многих областей математики. Топологу все они показались бы одинаковыми, так как, на его взгляд, любое дерево состоит из бесконечно упругих нитей, и наши деревья также можно растягивать или сжимать до тех пор, пока они не совпадут друг с другом. Однако эти деревья все-таки различаются и с точки зрения здравого смысла, и как фракталы.

**Концы ветвей.** Дерево представляет собой сумму двух множеств (ветвей и концов ветвей), размерности которых уживаются друг с другом очень интересным способом. Более простой для изучения частью дерева является множество концов ветвей — фрактальная пыль, похожая на многие другие известные нам пылевидные множества. Она масштабно-инвариантна:  $N = 2$ , а  $r$  лежит в интервале между  $1/\sqrt{2}$  и 0. Следовательно,  $D$  варьируется от 2 до 0, хотя фигуры на рисунке имеют размерность  $D$  от 1 до 2. Угол между ветвями принимает при каждом разветвлении одно и то же значение  $\theta$ ; это значение может изменяться в довольно широких пределах, никак не влияя на  $r$  и  $D$ . То есть одна и та же размерность  $D$  может характеризовать весьма различные древесные формы.

Когда  $1 < D < 2$ , деревья самопересекаются при  $\theta < \theta_{\text{крит}}$ , следовательно, если мы хотим обойтись без самопересечений, то выбор доступных значений  $\theta$  сужается. Деревья на рис. 223 удовлетворяют условию  $\theta = \theta_{\text{крит}}$ , однако мы начнем с предположения, что  $\theta = \theta_{\text{крит}} + \varepsilon$ .

**Деревья.** На первый взгляд, деревья на рисунке кажутся самоподобными, поскольку каждая ветвь вместе с произрастающими из нее

меньшими ветвями является уменьшенной копией целого. Однако на самом деле две ветви, выходящие из главного разветвления, *не* дают в сумме целого: необходимо прибавить сюда и остаток, т. е. ствол дерева. Даже с точки зрения здравого смысла, таким остатком никак нельзя пренебречь. Более того, люди, как правило, придают большее значение стволам и ветвям деревьев, нежели концам ветвей. Если верить интуиции, ветви «господствуют» над своими концами.

Кроме того, независимо от значения  $D$ , концы ветвей дерева без самопересечений образуют пыль с размерностью  $D_T = 0$ , а ветви (неважно, с включенными концами или нет) — кривую с размерностью  $D_T = 1$ . Следовательно, топологически ветви господствуют-таки над своими концами. ◁ В самом деле, чтобы отделить от множества точку  $P$  и ее окрестность, необходимо удалить либо одну (если  $P$  — конец ветви), либо две (если  $P$  принадлежит внутренней части ветви), либо три точки (если  $P$  — точка ветвления). ►

Перейдем к фрактальному аспекту. Размерность множества концов ветвей  $D$ , а размерность каждой ветви 1. Что касается целого, то оно, не будучи масштабно-инвариантным, все же характеризуется фрактальной размерностью, определяемой по формуле Хаусдорфа–Безиковича, причем эта размерность не может быть ни меньше  $D$ , ни меньше 1, а на деле оказывается равной большей из двух величин. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

**Фрактальные деревья.** Когда  $D > 1$ , фрактальная размерность всего дерева равна  $D$ . Несмотря на то, что ветви доминируют в конструкции как с точки зрения здравого смысла, так и топологически, во фрактальном смысле ими можно пренебречь. Так как  $D > D_T$ , дерево представляет собой фрактальное множество, в котором величина  $D$  служит мерой ветвления. Таким образом, нам открывается еще одна грань фрактальной размерности в добавление к ее способности выступать в качестве меры иррегулярности и фрагментации. Когда мы перейдем в главе 17 к ненитевидным деревьям, мы обнаружим, что гладкая поверхность с достаточным количеством острых локализованных «выступов» может оказаться чем-то «большим», чем стандартная поверхность.

**Субфрактальные деревья.** В случае  $0 < D < 1$  линейная мера (совокупная длина) всего дерева конечна и положительна, так что его фрактальная размерность неизбежно равна 1. Следовательно,  $D = D_T$ , т. е. такое дерево *не* является фрактальным.

Тем не менее, если подобрать единицы измерения таким образом, чтобы длина ствола составила  $1 - 2r$ , то ветви (рассматриваемые как открытые интервалы) можно будет разместить вдоль пустот линейной канторовой пыли  $C$ , которая занимает интервал  $[0, 1]$  и характеризуется теми же значениями  $N = 2$  и  $r$ , что и множество концов ветвей. Аналогичным образом, на множестве  $C$  можно разместить и сами концы

ветвей. Получается, что интервал  $[0, 1]$  целиком заполняется отображениями точек нашего дерева. Не отображаются только те точки, на которых держатся ветви. Эти точки образуют счетное остаточное множество.

Вспомним о замечании, сделанном нами по поводу чертовой лестницы на рис. 125 — ее форма необычна, но фракталом она не является. Если важность этих форм будет возрастать и далее, им может понадобиться особое и тщательно выбранное название. Пока же остановимся на *субфракталах*.

В качестве последнего эксперимента заменим прямолинейные ветви фрактальными кривыми с размерностью  $D^* > 1$ . Когда  $D < D^*$ , фрактальные свойства дерева определяются ветвями, а все дерево целиком представляет собой фрактал с размерностью  $D^*$ . В случае же  $D > D^*$  наше дерево будет фракталом с размерностью  $D$ .

## НЕОДНОРОДНЫЕ ФРАКТАЛЫ

Думаю, настала пора вводить новое определение. Фрактал  $\mathcal{F}$  называется *однородным*, если все множества, полученные в результате пересечения  $\mathcal{F}$  с диском или шаром, центр которого принадлежит  $\mathcal{F}$ , имеют одинаковую топологическую ( $D_T$ ) и фрактальную ( $D > D_T$ ) размерности.

Очевидно, что кривые Коха, канторова пыль, разветвленные кривые и т. д. являются однородными фракталами. А остовы деревьев с  $D > 0$  из предыдущей главы следует отнести к фракталам неоднородным.

Вообще говоря, деревья могут считаться фракталами только отчасти: пересечение дерева и достаточно малого диска, центр которого принадлежит ветви, не является фракталом, но состоит из одного или нескольких интервалов.

## ФРАКТАЛЬНЫЕ КРОНЫ

До сих пор мы полагали, что деревья, изображенные на рис. 223, пусть едва-едва, но все же избегают самокасааний. На самом же деле, концы ветвей этих деревьев асимптотически касаются друг друга. В результате множество концов ветвей перестает быть пылью с  $D_T = 0$  и становится кривой с  $D_T = 1$  без малейшего изменения фрактальной размерности. Для описания этого нового класса фрактальных кривых я предлагаю термин *расширенные фрактальные кроны*. Заметим, что длина тени такой кроны возрастает с увеличением  $D$ .

Кривую, ограничивающую открытую область снаружи получающейся в результате фигуры, назовем просто «фрактальной кроной». Благодаря отсутствию «складок», присущих расширенной кроне, размер-

ность этой кривой не дотягивает до  $D$  на величину, которая возрастает с увеличением  $D$ .

Поскольку для деревьев жизненно важен солнечный свет, ветви, заканчивающиеся в складках расширенной фрактальной кроны, скорее всего, засохнут. Садовник может либо позволить каким-то ветвям вырасти, а затем засохнуть из-за отсутствия света, либо составить более сложную программу, которая запретит расти именно этим ветвям. Я предпочел бы более простую программу.

Когда  $D < 1$ , слияние пыли с размерностью  $D$  в кривую невозможно. Если попытаться добиться самокасания посредством уменьшения угла  $\theta$  между ветвями, то цель будет достигнута лишь тогда, когда угол станет равным 0 и дерево стянется в интервал. Если же пойти другим путем и зафиксировать длину тени дерева, а самокасания добиваться посредством вытягивания ветвей вверх, то цель не будет достигнута никогда: в пределе из дерева получится комбинация линейной канторовой пыли  $C$  и свисающих из каждой точки  $C$  полупрямых.

## ДЕРЕВЬЯ БЕЗ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНОВ

Многообразие фрактальных деревьев не сводится к тем формам, которые мы рассмотрели в предыдущих разделах. Вспомним, например, конструкцию, описанную на с. 202. А теперь возьмем в качестве кохова генератора крест, ветви которого имеют следующие длины:  $r_v$  (верхняя),  $r_n$  (нижняя),  $r_b$  (боковые), причем выполняется равенство  $r_v^2 + r_n^2 + 2r_b^2 < 1$ . Каждая ветвь получившегося фрактального дерева, какой бы малой она ни была, в изобилии окружена подветвями. А если исключить корневую точку, то такие деревья масштабно-инвариантны без остатка.

## ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ: РЕАКТИВНЫЕ СТРУИ

Фейнман [149] пишет, что благодаря фрактальным деревьям он смог представить себе и смоделировать «струи», образующиеся при столкновениях частиц очень высоких энергий. Эту идею исследовал Дж. Венециано, о чем он сообщает в отчетах CERN.



### Рис. 223. ФРАКТАЛЬНЫЕ ЗОНТИЧНЫЕ ДЕРЕВЬЯ И ФРАКТАЛЬНЫЕ КРОНЫ

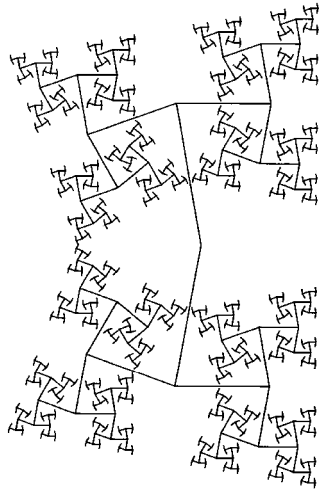
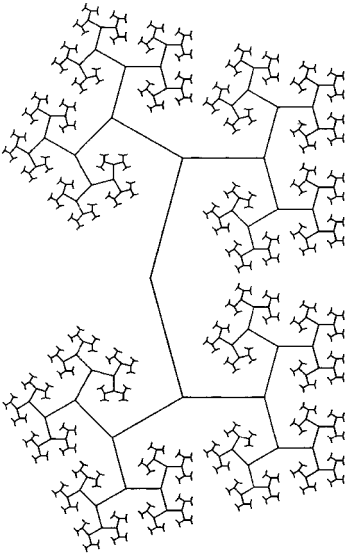
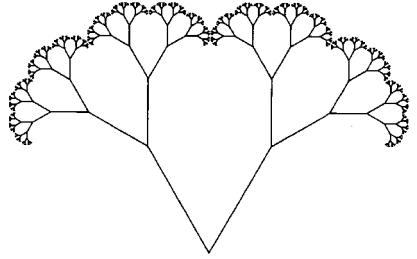
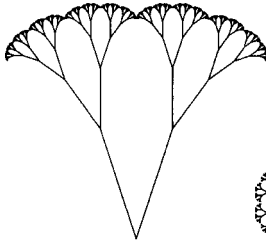
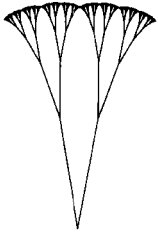
Каждое дерево на этом рисунке имеет бесконечно тонкий ствол и неизменный угол  $\theta$  между ветвями. Размерность  $D$  варьируется между 1 и 2, причем для каждого  $D$  угол  $\theta$  принимает наименьшее возможное без самокасаний значение.

При  $D$ , чуть большем 1 (вверху слева), результат похож на веник. При увеличении  $D$  ветви раскрываются, вследствие чего «крона» расширяется и образует складки, укрытые от солнечного света. При взгляде на такую конструкцию вспоминаются цветы некоторых разновидностей вида *Brassica oleracea* — таких, например, как цветная капуста (*B. o. botrytis*) и брокколи (*B. o. italica*). Интересно, насколько значительным может оказаться тот факт, что геометрические различия между цветной капустой и брокколи частично определяются фрактальной размерностью?

Фигура, получаемая при больших  $D$  (внизу слева), может напомнить французу о фортификационных сооружениях близ Вобана. Значения  $D = 2$  и  $\theta = \pi$  дают дерево, заполняющее плоскость. При дальнейшем увеличении угла  $\theta > \pi$  (внизу справа) приходится снова уменьшать размерность  $D$ , при этом всякое сходство с зонтиком пропадает, уступая место искривленному орнаменту, который странным образом ассоциируется с классическими древнеиндийскими скульптурами, изображающими танцующих людей.

На одной из наиболее известных иллюстраций в книге д'Арси Томпсона «Рост и форма» [568] показано отображение друг на друга черепов рыб различных видов путем непрерывных и гладких преобразований в евклидовом духе. Преобразования, способные отобразить друг на друга приведенные на нашем рисунке деревья, вдохновлены тем же источником, но весьма отличны по духу.





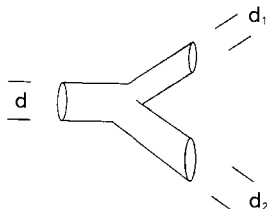
## 17 ◊ ДЕРЕВЬЯ И ДИАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ

В этой главе мы займемся изучением геометрического строения «деревьев», стволы которых обладают толщиной. Такая структура характерна для легких, кровеносной системы, реальных деревьев, речных бассейнов и т. д.

Эти природные объекты всем нам очень хорошо известны; более того, никакой другой объект не иллюстрирует столь же доступно идею фигуры, содержащей большое количество элементов различного линейного масштаба. К сожалению, деревья оказываются более сложными конструкциями, чем это может представиться на первый взгляд. Мы не рассматривали их раньше из-за одного простого обстоятельства, упомянутого в предыдущей главе: деревья не могут быть самоподобными. Самое большое, на что можно рассчитывать — это то, что самоподобие сохраняется на уровне концов ветвей; таким допущением мы и будем руководствоваться в этой главе. В дополнение к фрактальной размерности  $D$  множества концов ветвей, деревья характеризуются еще одним параметром, который называется диаметрическим показателем и обозначается буквой  $\Delta$ . Когда дерево самоподобно с остатком, как в главе 16, показатель  $\Delta$  совпадает с размерностью  $D$  множества концов ветвей. В противном случае  $\Delta$  и  $D$  оказываются независимыми друг от друга характеристиками, и перед нами предстает образчик феномена, называемого биологами «аллометрией». Нам встретятся случаи как с  $\Delta = D$ , так и с  $\Delta < D$ .

### ДИАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ $\Delta$

Леонардо да Винчи пишет в своих «Заметках» (заметка №394): «Со-вокушная толщина всех ветвей дерева на любой высоте равна толщине ствола (ниже их)». Формальное выражение выглядит следующим образом: диаметры ветвей настоящего дерева до и после разветвления ( $d$ ,  $d_1$  и  $d_2$ )





удовлетворяют соотношению

$$d^\Delta = d_1^\Delta + d_2^\Delta,$$

где  $\Delta = 2$ . Смысл этого выражения таков: если принимать во внимание толщину ветвей, настоящие деревья *не* являются самоподобными деревьями с почти заполняющей пространство корой. В самом деле, самоподобие требует выполнения равенства  $\Delta = D$ , а размерность  $D$  почти заполняющей пространство структуры должна быть близка к  $E = 3$ .

Иными словами, во всех случаях, когда выполняется вышеприведенное соотношение, величина  $\Delta$  представляет собой новый параметр в дополнение к размерности  $D$ ; мы будем называть этот новый параметр *диаметрическим показателем*. Его рассматривали очень многие люди — в большинстве случаев независимо друг от друга — в этом можно убедиться, взглянув хотя бы на список литературы в [568]. В этой главе показано, что для бронхов  $\Delta \sim 3$ . Показатель  $\Delta$  дерева артерий равен приблизительно 2,7, а для настоящих деревьев он близок к значению, указанному Леонардо,  $\Delta = 2$ . Ширина рек также регулируется показателем  $\Delta = 2$ . Кроме того, мы рассмотрим здесь некоторые физические, физиологические и геометрические аспекты величины  $\Delta$ .

◁ **Парапараметрность.** Во «Фракталах» 1977 г. я называл показатель  $\Delta$  *парапараметрностью* (от греческого *παρα* «рядом, около»), но я больше не настаиваю на употреблении этого термина. Функции величины  $\Delta$  вообще весьма туманны: в одних случаях она является размерностью, в других — нет. Аналогичное поведение демонстрирует показатель в [29]; см. также главу 39. ►

## ДЕРЕВО БРОНХОВ В ЛЕГКИХ

Первый пример: деление воздушных трубок в легких человека во всех практических отношениях самоподобно, причем  $\Delta = D$ , а  $D \sim E = 3$ .

Внутреннюю структуру легкого вряд ли можно назвать хорошо знакомой широкому кругу людей, поэтому было бы поучительно вставить в этом месте фотографию реального легкого (такие фотографии можно найти, например, в [585] или в [84]), однако я установил для себя правило ограничиться в данном эссе моделями (и это, пожалуй, единственный случай, когда я сожалею об этом своем решении). Значит, придется обойтись словесным описанием. Представьте себе, что мы заполнили все бронхи и бронхиолы легкого жидкой пластмассой, а после того, как пластмасса затвердела, удалили ткани. В результате мы получим чрезвычайно разветвленное дерево, которое заполняет легкое с такой густотой, однородностью и непроницаемостью для взгляда, какой

не достигает ни одно настоящее дерево. Между двумя первыми разветвлениями, которые нас пока не касаются, и тремя последними, ведущими к альвеолам (о которых мы говорили в главе 12), имеется еще пятнадцать последовательных разветвлений, происходящих с поразительной правильностью.

По данным Вайбеля [585], отрезки бронхов в первом приближении подобны друг другу, и  $\Delta \sim 3$ . Воздушный поток представляет собой конкретную величину, разделяющуюся между разветвляющимися бронхами, и поскольку воздушный поток в трубе равен площади сечения трубы, умноженной на скорость движения воздуха, получается, что скорость изменяется пропорционально  $d^{\Delta-2}$ : при вхождении в более тонкие бронхи воздух замедляется.

Строгое равенство  $\Delta = 3$  весьма важно. Первая интерпретация основана на рассуждениях Мюррея [439], следующим образом представленных в [568] (с. 954 в издании 1942 г. или 129 в издании 1961 г.): «[Р]ост площади поверхности бронхов вскоре приводит к значительному увеличению трения и уменьшению скорости проходящего по ним [газа]; следовательно, ветви должны быть более вместительными, чем может показаться на первый взгляд. Вопрос заключается уже не во вместительности, а в сопротивлении бронхов; а ответ в общих чертах таков: условием наименьшего возможного сопротивления во всей системе целиком является неизменность отношения сопротивления к поперечному сечению на всех участках системы, как до, так и после разветвления. Суммарное поперечное сечение отходящих от ствола ветвей должно быть, таким образом, больше, чем сечение самого ствола, в соответствии с возрастающим сопротивлением. Приблизительный вывод, хорошо известный людям, изучающим гидродинамику [современный подход излагается в [224] и [606]], состоит в том, что сопротивление минимально, и система работает в оптимальном режиме» тогда, когда коэффициент ветвления по всей системе равен  $2^{1/3} \sim 1,26$ .

Следовательно, значение  $\Delta = 3$  является наилучшим из всех значений, каких можно достичь как целенаправленным конструированием, так и селективной эволюцией. Разумеется, критерий оптимальности по Мюррею исключительно *локален*, и конструктор никаким способом не сможет заранее узнать, можно ли будет оптимально соединить локально оптимальные элементы.

## ЗАПОЛНЕНИЕ БРОНХАМИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Я предлагаю в качестве альтернативы совершенно отличные от предыдущих фрактальные соображения для объяснения  $\Delta = 3$ : они основаны на *не зависящих от нашей воли* геометрических ограничениях на

процесс внутриутробного роста легких и на их окончательную форму. Очевидное преимущество такого подхода состоит в том, что он не требует введения в генетический код коэффициента ветвления  $2^{1/\Delta} \sim 2^{1/3}$  (на чем, по всей видимости, настаивает подход Мюррея).

Мы будем опираться на тот фундаментальный факт, что внутриутробный рост легкого начинается с почки, из которой вырастает трубка, на которой, в свою очередь, образуются две новых почки, каждая из которых ведет себя вышеописанным образом. Помимо всего прочего, такой рост самоподобен (а ствол легкого образует остаток!). Для того, чтобы объяснить самоподобную структуру легкого, *нет никакой необходимости* доказывать, что она лучше всех остальных, нужно лишь показать, что она проще: представьте, насколько короче становится программа, управляющая ростом чего бы то ни было, если каждый последующий этап повторяет предыдущий в уменьшенном масштабе, или даже в том же масштабе, но после того, как результат предыдущего этапа дорастет до определенного размера. Если ситуация именно такова, то результат роста полностью определяется отношением поперечника ветвей к их длине и диаметрическим показателем. Кроме того, необходимо еще правило, указывающее, когда следует остановить рост.

Далее, в зависимости от значения  $\Delta$  (величину отношения поперечника ветвей к их длине будем полагать постоянной), процесс роста, регулируемый вышеописанными правилами, приводит к одному из следующих трех результатов: а) после некоторого конечного числа этапов ветви заполняют весь доступный для роста объем; б) ветвям удается заполнить только некоторую часть доступного пространства; в) доступное для роста пространство в точности соответствует необходимому для данного процесса. Когда мы хотим получить в пределе заполняющую пространство структуру, нет необходимости встраивать в программу роста какие-либо подробные инструкции, поскольку конкуренция за свободное пространство почти не оставляет места для неопределенности. Двумерная реализация такого процесса представлена на рис. 236 и 237, где мы можем видеть, что по мере уменьшения отношения поперечника ветвей к их длине до нуля коэффициент ветвления заполняющей плоскость кривой стремится к  $2^{1/2}$ , что дает  $\Delta = E = 2$ . Аналогичным образом коэффициент ветвления заполняющей пространство кривой, соответствующий бесконечно тонким ветвям, равен  $2^{1/3}$ , что дает  $\Delta = E = 3$ .

Так как показатель  $\Delta = 3$  соответствует предельному случаю бесконечно тонких трубок, его нельзя реализовать в действительности. А жаль, потому что «кора» дерева, построенного из бесконечно тонких разветвлений, продолжающихся до нуля, совершенно заполняет пространство. Этому последнему свойству мы могли бы дать телеологическую интерпретацию ничуть не хуже интерпретации Мюррея: такая структура наилучшим образом отвечает целям химического обмена между возду-

хом и кровью, поскольку предоставляет для этого обмена наибольшую поверхность.

Однако реальные бронхи не являются бесконечно тонкими, поэтому мы, в лучшем случае, можем рассчитывать лишь на значение показателей  $D$  и  $\Delta$ , чуть меньшее 3, что вполне согласуется с опытными данными. Это значение подразумевает одинаковую степень несовершенства во всех точках ветвления — однако такой результат может быть получен и как побочное следствие самоподобия с остатком и не нуждается в особом рассмотрении.

**Размерность.** Ветви нашего дерева образуют стандартное множество: его размерность и в топологическом, и во фрактальном смысле равна  $E$ . Если оболочка каждой ветви является гладкой, то размерность всей оболочки равна показателю  $\Delta$ .

## АЛЬВЕОЛЫ — ВНУТРЕННИЙ ПОРОГ

Как обычно, процесс интерполяции не достигает бесконечно тонких бронхов, прерываясь при некотором пороге. Это происходит после пятнадцатого разветвления, а сам порог имеет ступенчатую структуру, которую я нахожу геометрически безупречной.

Основное замечание таково: хотя бесконечное самоподобное разветвление заполнило бы в конце концов все доступное пространство, процесс идет достаточно медленно, так что после первых пятнадцати этапов разветвления оказывается заполненной только малая часть объема легкого. Для того, чтобы заполнить оставшееся пространство за малое число этапов, следует сделать трубы значительно толще, чем предполагает самоподобная экстраполяция. В самом деле, из слов Вайбеля ([585], с. 123–124) можно заключить, что на этапах после пятнадцатого диаметр трубок больше не уменьшается (т.е. показатель  $\Delta$  перестает быть определенным). Длина трубок также становится больше, чем можно было ожидать, исходя из соображений подобия, причем предельный коэффициент равен 2. На рис. 237 видно, что самоподобные ветви прорастают примерно на половину ближайшего доступного пустого пространства и, следовательно, коэффициент 2 выглядит в высшей степени логично. Кроме того, последнее обстоятельство еще раз показывает, что программа роста легких обусловлена исключительно свойствами пространства и не нуждается в каком-либо дополнительном кодировании.

## СНОВА О ГЕОМЕТРИИ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

Вернемся к кульминационному моменту главы 15, где я заявил, что *фрактальные чудовища Лебега–Осгуда составляют самую сущность*

нашей плоти. Допустим, что область ветвления  $\mathcal{A}$  (артерии) занимает примерно 3% объема области  $\mathcal{B}$  (тело), и что область  $\mathcal{A}$  подходит бесконечно близко к каждой точке области  $\mathcal{B}$ . Я утверждаю, что толщина ветвей области  $\mathcal{A}$  должна уменьшаться быстрее, чем это происходит в самоподобных деревьях. Теперь, когда мы установили, что в некоторых случаях скорость уменьшения толщины характеризуется показателем  $\Delta$ , мы вполне можем поинтересоваться, определен ли этот показатель для артерий.

Представьте себе, он и в самом деле определен в широком поддиапазоне от 8-го до 30-го разветвления, которые происходят между сердцем и капиллярами; более того, об этом факте известно уже почти столетие. Р. Тома [567], а затем Р. Гроут [178] подвели итоги своих экспериментальных исследований и пришли к значению  $\Delta = 2,7$ . Их оценка была исчерпывающим образом подтверждена Сувой и Такахаси [546].

## НАСТОЯЩИЕ ДЕРЕВЬЯ

Налюбовавшись объектами, к которым термин *дерево* применим только фигурально, мы возвращаемся к тем деревьям, которые изучает ботаника. «Нормальными» в данном случае представляются значения  $D = 3$  и  $\Delta = 2$ , обусловленные аналитическими соображениями. Разумеется, они вряд ли универсальны: при столь поразительном разнообразии ботанических форм наверняка найдутся отклонения, подчас даже более интересные, чем «норма». Равенство  $\Delta = 2$  имеет любопытное следствие: если поставить рядом почти самоподобное дерево бронхов и дерево-растение, то ветви последнего покажутся чрезвычайно редкими. Сквозь точную модель легкого ничего нельзя разглядеть, тогда как лишенная листы крона дерева свободно просматривается во всех направлениях.

Причина того, что  $D$  и  $\Delta$  принимают целочисленные значения, соответствующие евклидовым размерностям объемных тел и поверхностей, заключается, по мнению д<sup>р</sup> Арси Томпсона, в том, что «рост дерева управляется простыми физическими законами, которые и определяют величину относительных изменений в объеме и площади». Более конкретное объяснение находим в работе [191]: «Задачу об энергетическом обмене в дереве можно упростить, представив дерево как систему, в которой необходимо оросить наибольшую возможную площадь при наименьшем производимом объеме, обеспечив одновременный отвод поглощенной энергии». Поскольку объемы и площади несоизмеримы между собой в рамках евклидовой геометрии, геометрическая задача об архитектуре деревьев является, по сути своей, фрактальной. Фрактальный характер этой задачи становится еще более очевидным в тех случаях, когда ни  $D$ , ни  $\Delta$  не являются целыми числами.

## ЗНАЧЕНИЯ $D$ И $\Delta$ НАСТОЯЩИХ ДЕРЕВЬЕВ

**Значение  $D = 3$ .** Читателю хорошо известно, что наибольшая возможная площадь поверхности листьев дерева может быть достигнута в том случае, если они образуют поверхность, заполняющую пространство. В качестве приближенной модели можно взять куст, листья или иголки которого располагаются очень близко к любой точке внутри определенного ограниченного объема (за исключением, пожалуй, мертвого остова, который нам не виден). Для пропускания же внутрь солнечного света и воздуха вполне достаточно очень небольшой разницы  $3 - D$ .

**Зонтики.** Тем не менее, различные ограничения, налагаемые на архитектуру дерева, могут помешать реализации равенства  $D = 3$ . Единственной стандартной альтернативой является стандартная же поверхность с размерностью  $D = 2$ : например, поверхность сферического «зонтика», скрывающая под собой сердцевину, состоящую из ветвей без листьев. Вот почему Хорн [223], ограничивающийся стандартной геометрией, допускает как  $D = 3$ , так и  $D = 2$ . Как бы то ни было, я не вижу явных преимуществ в структуре с  $D = 2$ ; более того, чтобы концы ветвей образовали в итоге сферический зонтик, рост этих самых ветвей должен следовать весьма причудливым правилам.

С другой стороны, взяв на вооружение фрактальную геометрию, «зодчий деревьев» получает гораздо большую творческую свободу. Во-первых, «многократно зубчатые» поверхности крон многих больших деревьев можно представить в виде масштабно-инвариантных фракталов с размерностью  $D$  между 2 и 3, причем разным значениям  $D$  будут соответствовать различные формы. На ум снова приходят цветная капуста и брокколи, но о них мы поговорим чуть позже, так как они представляют собой несколько иной случай. Можно вспомнить и о ползучих растениях, скудный лиственный покров которых образует поверхность с размерностью меньше 2 (а еще подумайте о том, что деревья бонсаи, которым так старательно придается «гармоничная» форма, также фрактальны,  $D < 3$ ).

**Значение  $\Delta = 2$ .** Правило Леонардо да Винчи, процитированное в начале этой главы, не годится для легких ( $\Delta = 3$ ) и артерий ( $\Delta = 2, 7$ ), однако анатомия растений отличается от анатомии человека. Значение  $\Delta = 2$  основывается на представлении о дереве как о совокупности неветвящихся труб фиксированного диаметра, соединяющих корни с листьями и занимающих неизменную долю поперечного сечения каждой ветви. Циммерман говорит, что японцы называют такое представление «трубчатой моделью».

**Измерение  $\Delta$ .** Эмпирические свидетельства оказываются на удивление скудными и косвенными. Мюррей ([439], процитировано также в [568]), установил опытным путем, что вес ветви пропорционален

ее диаметру, возведенному в степень  $M$ , где  $M \sim 2,5$ , хотя я бы сказал, что обнаруженное им  $M$  было несколько больше. Он утверждает также, что  $M = \Delta$ , однако мой анализ дает иное соотношение:  $M = 2 + \Delta/D$ . При  $D = 3$  значение Леонардо  $\Delta = 2$  соответствовало бы  $M \sim 2,66$ , тогда как  $M \sim 2,5$  дает всего лишь  $\Delta = 1,5$ . Некоторое время назад профессор Макмагон любезно передал мне данные относительно трех «деревьев Макмагона», использованные при написании статьи [423], и я, таким образом, получил возможность лично проанализировать эти данные. Обозначим  $d_1/d$  через  $x$ , а  $d_2/d$  через  $y$  и отыщем такой показатель  $\Delta$ , чтобы значения  $X = x^\Delta$  и  $Y = y^\Delta$  принадлежали прямой  $X + Y = 1$ . К сожалению, разброс опытных данных чрезвычайно велик при любом  $\Delta$ , и оценка величины  $\Delta$  с неизбежностью оказывается недостоверной. Тем не менее, этот результат не опровергает значения  $\Delta = 2$ , лишь предполагает чуть меньшее  $\Delta$ . В настоящий момент мы, пожалуй, можем благополучно заключить, что показатель  $\Delta = 2$  является достаточно разумным приближением, не забывая о том, что древесная архитектура придерживается консервативных принципов, поэтому дочерние ветви оказываются несколько тоньше, чем это, строго говоря, необходимо.

**Следствия равенств  $D = 3$  и  $\Delta = 2$ .** Следствие первое: площадь листьев на ветви пропорциональна как занимаемому ветвью объему, так и поперечному сечению ветви. Этот вывод был сделан Хубером в 1928 г. и, действительно, подтверждается эмпирически.

Следствие второе: отношение квадрата высоты дерева к кубу диаметра ствола постоянно для любого вида деревьев и равно отношению куба линейной меры объема впитываемой ветвью жидкости к квадрату диаметра ветви. Можно также ожидать, что у деревьев разных видов величина этого отношения различается незначительно. Заметим, что сила, прилагаемая ветром к лишенному листьев дереву (или к дереву с листьями) приблизительно пропорциональна площади поверхности ветвей (или, соответственно, ветвей и листьев), а также пропорциональна кубу высоты дерева в данной модели. Соппротивление же ствола ветру пропорционально квадрату его диаметра. Следовательно, можно предположить, что отношение этих величин представляет собой коэффициент прочности дерева.

В зонтичном дереве с  $\Delta = 2$  и  $D = 2$  отношение квадрата высоты дерева к кубу диаметра его ствола постоянно, равно как постоянно и более общее отношение (высота дерева) <sup>$D$</sup> /(диаметр ствола) <sup>$\Delta$</sup> .

**Отступление о костях задних ног.** Отношение между высотой и диаметром, характеризующее настоящие деревья с  $D = 3$  и  $\Delta = 2$ , справедливо также и для скелетов животных, только буквой  $d$  здесь обозначается диаметр главной опорной кости.

## УПРУГИЙ СКЕЙЛИНГ ПО ГРИНХИЛЛУ

Легочные и сосудистые деревья поддерживаются снаружи; большинство растений поддерживают себя сами. Гринхилл (цитирую по [568], издание 1961 г.) вводит на этом этапе понятие упругости (в противоположность геометрическому подобию). Идея статического упругого подобия заключается в том, что общая высота дерева не должна превышать некоторого фиксированного процента от критической высоты прогиба под действием собственного веса однородного цилиндра с таким же диаметром основания. Это условие дает в точности те же результаты, что и фракталы с  $D = 3$  и  $\Delta = 2$ . То есть «трубчатое» дерево с заполняющими пространство листьями прогибаться не будет.

Макмагон и Кронауэр [423] развили идею Гринхилла, введя понятие *динамического* упругого подобия, и получили все тот же результат.

### РАСТЕНИЯ С $D = \Delta < 3$

Ствол некоторых растений служит не только в качестве опоры для веса и трубы для перекачки соков, но и в качестве хранилища для питательных веществ. В таких случаях — и даже когда сосудистая система растения соответствует «трубчатой модели» — показатель  $\Delta$  не обязательно должен быть равен 2.

На рис. 235 изображено дерево, концы веток которого образуют нестандартный «зонтик» с размерностью  $D < 3$  и  $\Delta = D$  (на рисунке, разумеется, представлен плоский вариант, соответствующие показатели равны  $D-1$  и  $\Delta-1$ ). Хорошо видно, что геометрическая цветная капуста имеет характерные пустые включения — совсем как настоящая цветная капуста, выросшая на грядке. Простое совпадение? Природе нет нужды загромождать генетический код характеристиками, предопределяемыми геометрией.

### ЕЩЕ О ГЕОМЕТРИИ МОЗГА

Обсуждая в главе 12 поверхность мозга, мы не принимали во внимание сеть аксонов, соединяющих различные его части. В случае мозжечка аксоны соединяют его поверхность с внешним веществом, и мы получаем в результате поверхность серого вещества, которая обволакивает дерево, состоящее из белого вещества. Я пересмотрел рассуждения главы 12 с учетом этого дерева и нашел, что полученные при этом поправочные члены для соотношения между площадью и объемом позволяют достичь лучшего согласия с экспериментальными данными. Однако это слишком длинная история, и вряд ли стоит пересказывать ее здесь.

**Ветвление нейронов.** Клетки Пуркинью в мозжечке млекопитающего имеют почти плоскую форму, а их дендриты образуют заполняющий плоскость лабиринт. По мере перехода от млекопитающих к голу-



блям, крокодилам, лягушкам и рыбам плотность заполнения уменьшается [314]. Было бы замечательно, если бы это уменьшение соответствовало уменьшению размерности  $D$ ; однако это не так, и предположение о фрактальной природе нейронов пока остается лишь предположением.

**Закон Ролла.** У. Ролл [486] отмечает, что нейронные деревья с постоянным значением  $d^\Delta$ , где  $\Delta = 1, 5$ , электрически эквивалентны цилиндрам и, следовательно, весьма удобны для изучения. За подробностями рекомендую обратиться к [238].

## КАКОВА ШИРИНА РЕКИ МИССУРИ?

Вернемся к рекам. Несмотря на концептуальную значимость моей «пеанианской» модели (см. главу 7), она может рассматриваться лишь как первое приближение. Эта модель, в частности, предполагает, что ширина реки обращается в нуль, тогда как реальные реки всегда имеют положительную ширину.

Необходимо найти ответ на очень важный эмпирический вопрос — сохраняется ли неизменным диаметрический показатель  $\Delta$  на протяжении всех разветвлений реки? Если показатель  $\Delta$  определен, возникает другой вопрос: положительна разность  $2 - \Delta$  или равна нулю? Я не знаю прямого способа ответить на эти вопросы, однако известно, что объем стока речной воды ( $Q$ ) остается при разветвлениях постоянным, следовательно, вполне может заменить величину  $d^\Delta$ . Мэддок (см. [297]) обнаружил, что  $d \sim Q^{1/2}$ , отсюда  $\Delta = 2$ . Кроме того, глубина реки пропорциональна  $Q^{0,4}$ , а скорость течения пропорциональна  $Q^{0,1}$ . И сумма показателей не обманывает наших ожиданий:  $0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$ .

Еще в 30-е г. Дж. Лейси заметил, что равенство  $\Delta = 2$  верно и для системы устойчивых ирригационных каналов в Индии, которая ставит перед специалистами по гидравлике вполне определенные задачи. Значит, можно надеяться на появление какого-нибудь гидромеханического объяснения, которое станет для рек тем же, чем стало объяснение Мюррея для легких.

Равенство  $\Delta = 2$  имеет еще одно интересное следствие: если изобразить реки на карте в виде лент, правильно передав их относительную ширину, то, исходя из формы дерева рек, угадать масштаб карты невозможно. (Угадать масштаб невозможно и на карте речных излучин, но это уже совсем другая история.)

Те, кто полагает, будто Леонардо знал все обо всем на свете, несомненно, увидят показатель  $\Delta = 2$  в продолжении цитаты, которая открывала эту главу: «Совокупная ширина всех ветвей (потока) воды на любой стадии его течения равна ширине основного потока (при условии, что скорости течения всех потоков одинаковы)».



## Рис. 235. ПЛОСКИЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ЦВЕТОВ

Возьмем любое из зонтичных деревьев на рис. 223 с  $\theta < \pi$  и заменим каждый прямолинейный отрезок равнобедренным треугольником, в котором указанный отрезок займет место одной из сторон, при этом углы у концов отрезков будут равны  $\theta/2$  (корневой конец) и  $\pi - \theta$ . Поскольку угол  $\theta$  имеет наименьшее, позволяющее избежать самопересечений дерева, значение, наши утолщенные треугольные стебли также не пересекаются, но заполняют внутреннюю область «зонтика». Чтобы сделать рисунки более наглядными, треугольники на одном из них были слегка подрезаны с одной стороны.

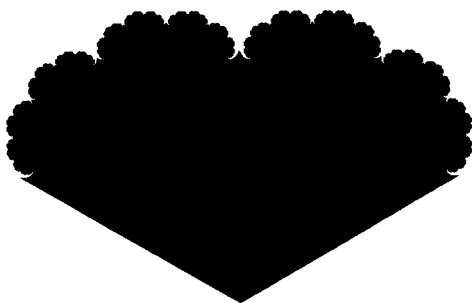
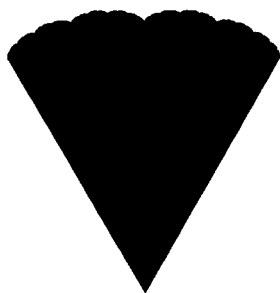
Заметим, что ветви быстро истончаются по мере того, как значение размерности  $D$  приближается к 1 или к 2 (в пространственной кривой, соответственно, к 2 или к 3). Соответствуют ли наблюдаемые в действительности значения  $D$  наибольшей возможной толщине ветвей? ■

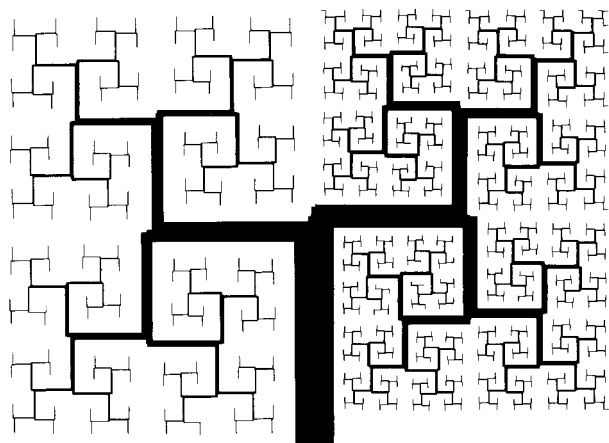
---

## Рис. 236 и 237. ЗАПОЛНЯЮЩИЕ ПРОСТРАНСТВО РЕКУРСИВНЫЕ БРОНХИ

**Рис. 237.** При рекурсии Коха все прямолинейные интервалы любого конечного приближения порождают в следующем приближении ломаные, состоящие из более коротких отрезков. Во многих случаях бывает полезно обобщить эту процедуру, позволив определенным интервалам оставаться «бесплодными», т. е. неизменными на последующих этапах построения.

В данном случае такая обобщенная процедура использована для выращивания «дерева». Начинаем со ствола с бесплодными стенками и плодоносной «почкой» на конце. Почка порождает две «ветви», в которых плодоносными являются опять только «почки» на концах. И так далее до бесконечности. Для того, чтобы дерево заполнило без пустот и самопересечений приблизительно прямоугольную область плоскости, рост его намеренно асимметричен. Однако асимптотических самокасаний мы избегать не стремились; и в самом деле, всякая точка, принадлежащая линии «коры», может быть получена как предел окончания какой-либо ветви.



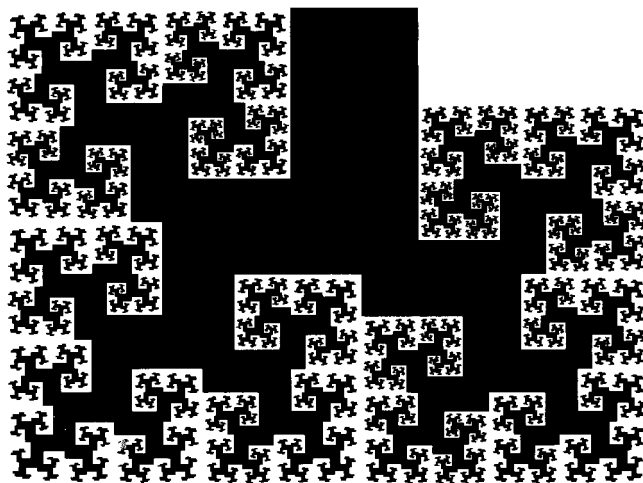
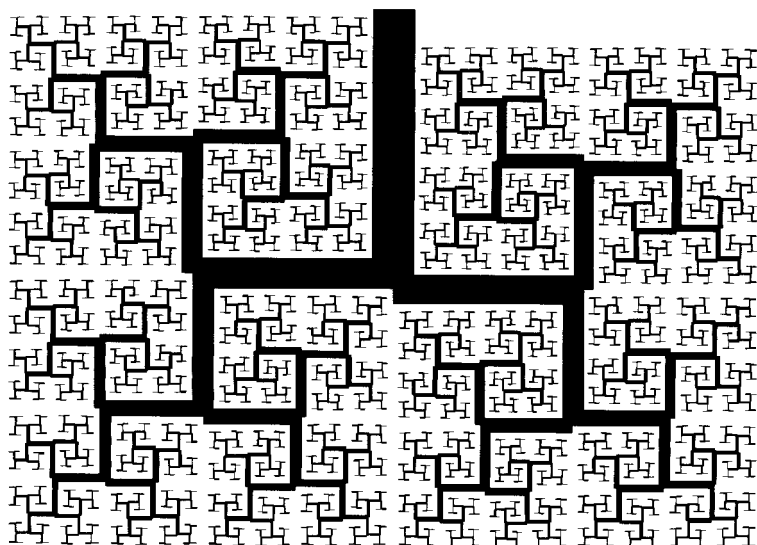


«Поддеревья», построенные из двух первых ветвей, подобны целому дереву, но каждое со своим коэффициентом подобия (обозначим их через  $r_1$  и  $r_2$ ). Все дерево самоподобным не является, так как наряду с поддеревьями оно включает в себя и ствол. С другой стороны, множество асимптотических концов ветвей самоподобно. Согласно пояснению к рис. 87 и 88, размерностью подобия называется размерность  $D$ , удовлетворяющая равенству  $r_1^D + r_2^D = 1$ . В верхней фигуре на рис. 237 концы ветвей почти заполняют плоскость, и значение разности  $2 - D$  мало; в нижней фигуре  $D$  значительно меньше 2.

Кстати, при постоянном отношении диаметра к длине коразмерность  $3 - D$  соответствующей пространственной структуры оказывается меньше, чем коразмерность  $2 - D$  ее плоского варианта.

**Рис. 236.** Эта сложная фигура представляет собой результат кохова построения дерева, в котором на каждом этапе генератор изменяется так, чтобы отношение толщины к длине постепенно уменьшалось до 0. В левой части рисунка это отношение уменьшается быстрее, чем в правой. Как следствие, множество концов ветвей перестает быть самоподобным, однако все же достигает размерности  $D = 2$ . Вот вам еще один способ достижения цели, поставленной в главе 15.





## VI ◊ САМООТБРАЖАЮЩИЕСЯ ФРАКТАЛЫ

---

### 18 ◊ САМОИНВЕРСНЫЕ ФРАКТАЛЫ, АПОЛЛОНИЕВЫ СЕТИ И МЫЛО

Большая часть настоящего эссе посвящена фракталам, которые либо полностью инвариантны при преобразованиях подобия, либо, по меньшей мере, «почти» инвариантны. В результате у читателя может сложиться впечатление, что понятие фрактала неразрывно связано с самоподобием. *Это решительно не так*, однако поскольку мы только начинаем знакомиться с фрактальной геометрией, мы должны прежде всего рассмотреть своего рода фрактальные аналоги прямых линий евклидовой геометрии. . . мы можем называть их «линейными фракталами».

В главах 18 и 19 мы сделаем следующий шаг. В них вкратце описываются свойства фракталов, которые представляют собой соответственно наименьшие множества, инвариантные при геометрической инверсии, и границы наибольших ограниченных множеств, инвариантных при возведении в квадрат.

Оба этих семейства фундаментально отличаются от самоподобных фракталов. При должным образом выбранных преобразованиях масштабируемые фракталы остаются инвариантными, однако для их построения необходимо указать форму генератора и установить некоторые другие правила. С другой стороны, одного того, что фрактал «генерируется» каким-либо нелинейным преобразованием, часто бывает достаточно для определения, т. е. генерации, его формы. Кроме того, многие нелинейные фракталы ограничены, т. е. имеют заранее заданный конечный внешний порог  $\Omega < \infty$ . Те, кого по каким-либо причинам не устраивала неограниченность  $\Omega$ , будут, несомненно, обрадованы этим обстоятельством.

Первые самоинверсные фракталы были представлены на суд публики в 80-х гг. XIX в. Анри Пуанкаре и Феликсом Клейном вскоре после того, как Вейерштрасс построил непрерывную, но недифференцируемую функцию — примерно в одно время с множествами Кантора и задолго до кривых Пеано и Коха и их масштабно-инвариантных

родственников. Ирония заключается в том, что самоподобные фракталы нашли себе надежное место под солнцем в качестве материала для всевозможных контрпримеров и математических игр, в то время как самоинверсные фракталы образовали узкоспециальный раздел теории автоморфных функций. Теорией этой некоторое время никто не занимался, затем она возродилась, но в весьма абстрактной форме. Одна из причин того, что самоинверсные фракталы оказались полузабыты, состоит в том, что их действительная форма оставалась неисследованной вплоть до настоящей главы, в которой вашему вниманию будет предложен новый эффективный способ их построения.

В последнем разделе главы мы рассмотрим одну физическую проблему, главным героем которой оказывается простейший самоинверсный фрактал.

## БИОЛОГИЧЕСКАЯ ФОРМА И «ПРОСТОТА»

Как мы вскоре увидим, многие нелинейные фракталы имеют «органический внешний вид», поэтому данное отступление посвящено биологической теме. Биологические формы часто чрезвычайно сложны, и может показаться, что программы, отвечающие за выращивание таких форм, должны быть очень громоздкими. Особенно парадоксальными представляются случаи, когда внешняя сложность не служит, на первый взгляд, никакой разумной цели (а так случается довольно часто среди относительно простых живых существ) — почему бы Природе не стереть эти громоздкие программы из генетического кода и не освободить место для чего-нибудь действительно полезного?

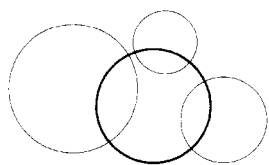
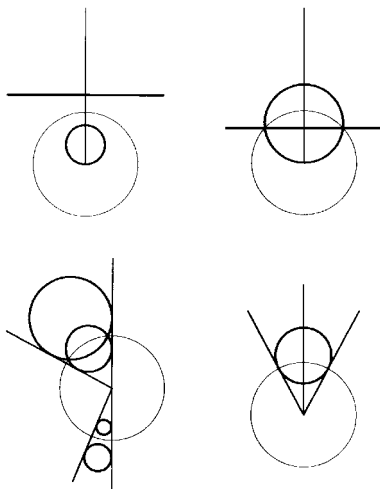
Однако структура упомянутых сложных форм очень часто включает в себя многочисленные повторы. Вспомните, как в конце главы 6 мы говорили о том, что кривую Коха *нельзя* считать ни иррегулярной, ни чрезмерно сложной, поскольку она порождается простым и систематическим правилом. Все дело в том, что правило применяется снова и снова, последовательными циклами. В главе 17 эти же соображения распространены на кодирование структуры легких.

В главах 18 и 19 мы намерены пойти гораздо дальше и обнаружить, что одни фракталы, построенные согласно нелинейным правилам, напоминают то насекомых, то головоногих, тогда как другие похожи на растения. Парадокс исчезает, уступая место невероятно тяжелому труду воплощения идей в реальность.

## СТАНДАРТНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНВЕРСИЯ

Следующей по сложности геометрической фигурой после прямой является в евклидовой геометрии окружность, причем окружность оста-

ется окружностью не только при преобразовании подобия, но и при преобразовании обратными радиусами, т. е. инверсии. Многие ученые последний раз слышали об инверсии еще в школьные годы, поэтому, на мой взгляд, не лишним будет повторить основные положения. Возьмем окружность  $C$  радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ ; инверсия по отношению к окружности  $C$  преобразует некоторую точку  $P$  в точку  $P'$ , такую, что  $P$  и  $P'$  лежат на одном луче с началом в точке  $O$ , причем длины отрезков  $|OP|$  и  $|OP'|$  удовлетворяют равенству  $|OP| \times |OP'| = R^2$ . Окружности, содержащие точку  $O$ , инвертируются в прямые, содержащие точки  $O$ , и наоборот (см. рисунок). Окружности, не содержащие точку  $O$ , инвертируются в окружности (рисунок внизу справа). Окружности, ортогональные  $C$ , и прямые, проходящие через точку  $O$ , остаются инвариантными при инверсии относительно  $C$  (рисунок внизу слева).



Рассмотрим теперь совокупность трех окружностей:  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Обычно — например, когда открытые ограниченные круги, границами которых являются окружности  $C_m$ , не пересекаются — существует окружность  $\Gamma$ , ортогональная каждой из окружностей  $C_m$ . Если окружность  $\Gamma$  существует, она совместно самоинверсна относительно  $C_m$ .

Эти краткие сведения практически исчерпывают то, что стандартная геометрия способна нам поведать о самоинверсных множествах. Остальные самоинверсные множества фрактальны, и большинство из них можно назвать какими угодно, но никак не гладкими.



**Генератор. Самоинверсные множества.** Как обычно, мы начинаем с *генератора*, который в данном случае состоит из некоторого (какого угодно) числа  $M$  окружностей  $C_m$ . Преобразования, представляющие собой последовательность инверсий относительно этих окружностей, составляют то, что алгебраисты назвали бы группой, порождаемой этими инверсиями; обозначим ее буквой  $\mathcal{G}$ . Для обозначения самоинверсного множества имеется и формальный термин: «множество, инвариантное под действием операций группы  $\mathcal{G}$ ».

**Затравки и кланы.** Возьмем любое множество  $S$  (назовем его *затравкой*) и добавим к нему преобразования множества  $S$  под действием всех операций группы  $\mathcal{G}$ . Результат, который мы назовем здесь *кланом*  $S$ , является самоинверсным. Хотя, конечно, смотреть тут особо не на что. Например, если множество  $S$  представляет собой расширенную плоскость  $\mathbb{R}^*$  (т.е. плоскость  $\mathbb{R}$  плюс точка в бесконечности), то клан  $S$  абсолютно идентичен множеству  $\mathbb{R}^* = S$ .

**Хаотические инверсные группы.** Кроме того, может случиться так, что при некоторой заданной группе  $\mathcal{G}$ , основанной на инверсиях, клан каждой области  $S$  покрывает всю плоскость целиком. В этом случае самоинверсное множество также должно представлять собой всю плоскость целиком. По причинам, которые прояснятся в главе 20, я предлагаю называть такие группы *хаотическими*. Нехаотическими группами мы обязаны Пуанкаре, однако они носят имя Клейна: дело в том, что Пуанкаре однажды ошибочно приписал какую-то из предыдущих работ Клейна Л. Фуксу; Клейн выразил протест, и Пуанкаре в знак примирения пообещал, что назовет свое следующее великое открытие именем Клейна — и ведь назвал!

Придерживаясь пока нехаотических групп, обсудим три самоинверсных множества, отобранных еще Пуанкаре, затем еще одно множество неясного происхождения и, наконец, пятое, важность которого я обнаружил самостоятельно.

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОЗАИКА ИЛИ ТАЙЛИНГ

Не многим из поклонников творчества Морица Эшера известно, что этот знаменитый рисовальщик частенько черпал вдохновение непосредственно из трудов «неизвестных» математиков и физиков (см. [89]). Вся его работа часто состояла в простом добавлении украшений к самоинверсным мозаикам, известным Пуанкаре и представленным на многочисленных иллюстрациях в [154].

Эти множества (обозначим их через  $\mathcal{I}$ ) получаются посредством объединения кланов самих окружностей  $C_m$ .

◁ Так как группа  $\mathcal{G}$  нехаотична, дополнением объединенных кланов окружностей  $C_m$  является совокупность круговых многоугольников, называемых «открытыми плитками». Любую открытую плитку (или ее

замыкание) можно трансформировать в любую другую открытую (или замкнутую) плитку посредством последовательности инверсий, принадлежащих группе  $\mathcal{G}$ . Иными словами, клан любой замкнутой плитки есть  $\mathbb{R}^*$ . Что более важно, клан любой открытой плитки есть дополнение множества  $\mathcal{I}$ . А  $\mathcal{I}$  является, так сказать «раствором», на который укладываются эти плитки. Плоскость  $\mathbb{R}^*$  самоинверсна. Множество  $\mathcal{I}$  и его дополнение также самоинверсны и образуют «гиперболическое разбиение» или «мозаику» на плоскости  $\mathbb{R}^*$ . (Английское слово *tessellation*, «мозаика», происходит от латинского *tessera* «квадрат», которое, в свою очередь, восходит к греческому *τεσσαρες* «четыре», однако плитки вовсе не обязательно должны быть четырехугольными — подойдет любое число, большее 2.) А на рисунках Эшера каждая плитка украшена вдобавок причудливой картинкой. ►

## ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ИНВЕРСНОЙ ГРУППЫ

Самым интересным самоинверсным множеством является самое маленькое. Оно называется предельным множеством (и обозначается буквой  $\mathcal{L}$ ), поскольку является также множеством предельных точек преобразований любой исходной точки под действием операций группы  $\mathcal{G}$ . Оно принадлежит клану любой заправки  $\mathcal{S}$ . Проясним формальное определение: множество  $\mathcal{L}$  состоит из таких предельных точек, которые не могут быть получены конечным числом инверсий. На интуитивном уровне это множество можно представить как область скопления бесконечно малых потомков.

Множество  $\mathcal{L}$  можно свести к точке или окружности, однако в общем случае оно является фрагментированным и/или/ иррегулярным фрактальным множеством.

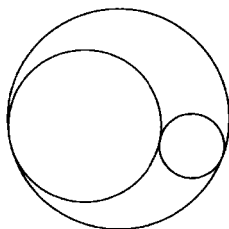
◄ Множество  $\mathcal{L}$  стоит в мозаике особняком, как «множество бесконечно малых плиток». Оно играет по отношению к конечным элементам мозаики такую же роль, какую играют концы ветвей (см. главу 16) по отношению к самим ветвям. Однако здесь ситуация проще: подобно  $\mathcal{L}$  мозаика  $\mathcal{I}$  представляет собой самоинверсное множество *без остатка*. ►

## АПОЛЛОНИЕВЫ СЕТИ И САЛФЕТКИ

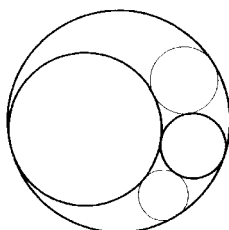
Множество  $\mathcal{L}$  называется *аполлониевым*, если оно состоит из бесконечного количества окружностей вместе с их предельными точками. В данном случае его фрактальность является исключительно следствием фрагментации. Этот прецедент был изучен и осмыслен (хотя и в несколько многословной манере) на раннем этапе истории предмета.

Сначала мы построим основной пример, а затем покажем его самоинверсность. Аполлоний Пергский — это древнегреческий математик,

живший в III в. до нашей эры. Он был представителем александрийской школы и верным последователем Евклида и известен, помимо прочего, тем, что составил алгоритм построения пяти окружностей, касательных к трем заданным окружностям. В том случае, когда заданные окружности взаимно касательны, число аполлониевых кругов равно двум. Как мы вскоре убедимся, вполне можно предположить, не потеряв при этом в общности, что две из заданных окружностей являются внешними по отношению друг к другу, но содержатся внутри третьей.

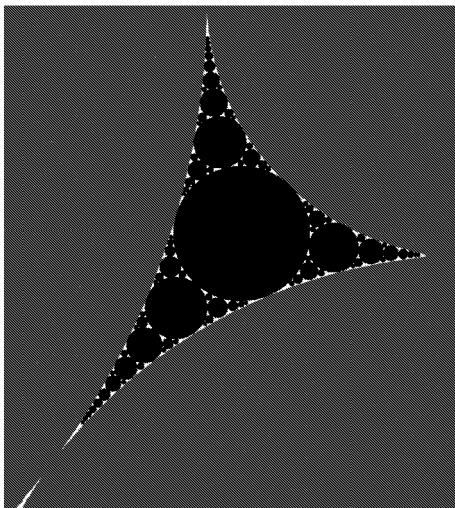


Эти три окружности определяют два круговых треугольника, углы которых равны  $0^\circ$ . А аполлониевы окружности — это наибольшие окружности, какие можно вписать в эти треугольники.



Законченное аполлониново построение включает в себя пять окружностей, три заданных и две аполлониевых, которые вместе определяют шесть круговых треугольников. Повторяя вышеописанную процедуру, впишем в каждый треугольник наибольшую возможную окружность. Результат бесконечного повторения такой процедуры называется *аполлониевой упаковкой*. А если добавить к этой бесконечной совокупности окружностей ее предельные точки, то получится множество, которое я назвал *аполлониевой сетью*. Область сети, заключенную внутри кругового треугольника (как показано на рисунке) будем называть *аполлониевой салфеткой*.

Если одну из аполлониевых окружностей первого поколения заменить на любую из заданных внутренних окружностей, предельное множество никак не изменится. ◁ Если указанной аполлониевой окружностью заменить внешнюю заданную окружность, то построение начинается с трех заданных окружностей, внешних по отношению друг к другу, и одна из аполлониевых окружностей первого этапа окажется наименьшей окружностью, описанной вокруг трех заданных. По-

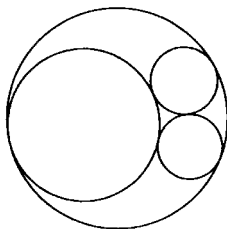


сле такого нетипичного этапа построение продолжается так же, как описано выше, подтверждая то, что наш рисунок и в самом деле соответствует наиболее общему случаю.  $\blacktriangleright$

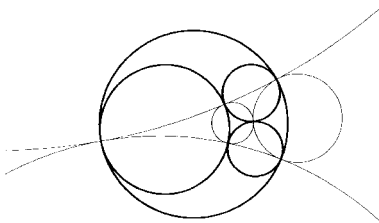
**Упаковка Лейбница.** Аполлониева упаковка похожа на конструкцию, которую я называю круговой *упаковкой Лейбница*, так как, насколько мне известно, впервые она была описана в письме Лейбница к де Броссу: «Представьте себе окружность, а затем впишите в нее еще три окружности наибольшего возможного радиуса, конгруэнтные друг другу: повторите аналогичную операцию с каждой из этих окружностей и с каждым промежутком между ними. А теперь вообразите, что этот процесс продолжен до бесконечности. . . »

## АПОЛЛОНИЕВЫ СЕТИ САМОИНВЕРСНЫ

Вернемся к началу построения аполлониевой сети: трем касательным окружностям. Добавим сюда *любую* из соответствующих аполлониевых окружностей и назовем получившиеся четыре окружности  $\Gamma$ -окружностями. Все четыре показаны на нижеследующем рисунке жирными линиями.



Существует четыре комбинации из трех  $\Gamma$ -окружностей (мы будем называть их *триплетами*), и каждой из них соответствует окружность, ортогональная каждой окружности триплета. Возьмем эти новые окружности в качестве генератора и обозначим через  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  (на рисунке ниже они показаны тонкими линиями). А  $\Gamma$ -окружность, ортогональную окружностям  $C_i, C_j$  и  $C_k$ , обозначим как  $\Gamma_{ijk}$ .



Разделавшись с нудным развешиванием ярлыков, получаем заслуженную награду. Даже самое поверхностное рассмотрение показывает, что наименьшее (замкнутое) множество, самоинверсное по отношению к четырем порождающим окружностям  $C_m$ , представляет собой аполлониеву сеть, построенную на четырех  $\Gamma$ -окружностях. Любопытно, что об этом наблюдении никто явным образом не сообщает, хотя оно должно быть известно довольно широко.

При более тщательном изучении мы увидим, что каждая окружность в сети преобразуется в одну из  $\Gamma$ -окружностей, проходя через *уникальную* последовательность инверсий относительно окружностей  $C$ . Таким образом, принадлежащие аполлониевой сети окружности можно рассортировать на четыре клана, причем клан, нисходящий от окружности  $\Gamma_{ijk}$ , мы будем обозначать как  $\mathcal{G}_{\Gamma_{ijk}}$ .

## ВЯЗАНИЕ СЕТЕЙ ИЗ ОДНОЙ НИТИ

Аполлониева салфетка и салфетка Серпинского (рис. 205) имеют одно важное общее свойство: дополнение салфетки Серпинского представляет собой объединение треугольников ( $\sigma$ -треугольник), а дополнение аполлониевой сети или салфетки есть объединение дисков ( $\sigma$ -диск).

Однако нам также известно, что салфетка Серпинского допускает альтернативное кохово построение, в котором конечные приближения являются терагонами (ломаными линиями) без самокасаний, а двойные точки появляются только в пределе. Это означает, что салфетку Серпинского можно построить, не отрывая карандаша от бумаги; через некоторые точки линия пройдет дважды, но она никогда не пройдет дважды по одному отрезку прямой.

Выражаясь метафорически, салфетку Серпинского можно связать из одной-единственной нити!

То же верно и для аполлониевой сети.

## НЕСАМОПОДОБНЫЕ КАСКАДЫ И ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТИ

Круговые треугольники аполлониевой упаковки не подобны друг другу, следовательно, аполлониев каскад не самоподобен, а аполлониева сеть не является масштабно-инвариантным множеством. Сейчас следовало бы обратиться к определению Хаусдорфа–Безиковича для размерности  $D$  (как показателя, определяющего меру), которое применимо к любому множеству, однако получение  $D$  таким способом оказывается удивительно сложным делом. На данный момент наилучшим результа-

том (см. работы Бойда [50, 51]) является следующий:

$$1,300197 < D < 1,314534,$$

хотя его же последние (еще не опубликованные) численные эксперименты дают  $D \sim 1,3058$ .

В любом случае, поскольку  $D$  есть дробное число, а  $D_T = 1$ , аполлониевы салфетка и сеть являются фрактальными кривыми. В данном контексте величина  $D$  представляет собой меру фрагментации. Если, например, «удалить» диски, радиус которых меньше  $\varepsilon$ , то периметр оставшихся промежутков будет пропорционален  $\varepsilon^{1-D}$ , а площадь — пропорциональна  $\varepsilon^{2-D}$ .

## МНОЖЕСТВО $\mathcal{L}$ В НЕФУКСОВЫХ ЦЕПЯХ ПУАНКАРЕ

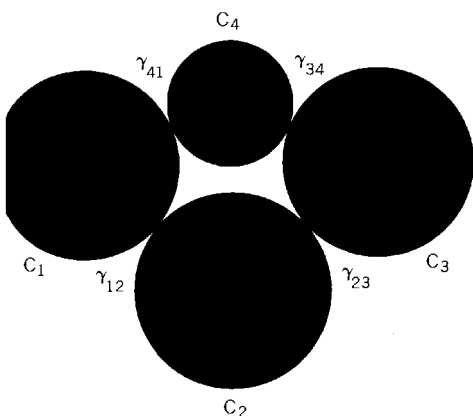
Самоинверсные фракталы, получаемые при инверсиях относительно не столь особых конфигураций порождающих окружностей  $C_m$ , оказываются более сложными, чем любая аполлониева сеть. Чуть позже я познакомлю вас со своей собственной рабочей конструкцией, которая в большинстве случаев вполне удовлетворительно характеризует множество  $\mathcal{L}$ . Она является большим шагом вперед по сравнению с предыдущим, предложенным Пуанкаре и Клейном, методом, который весьма громоздок и очень медленно сходится.

Однако старый метод также сохраняет свою значимость, поэтому я предлагаю рассмотреть его на примере особого случая. Пусть окружности  $C_m$  образуют конфигурацию, которую можно назвать *цепью Пуанкаре*; эта конфигурация представляет собой совокупность  $M$  окружностей  $C_m$ , расположенных по кругу и соответственно пронумерованных, так что окружность  $C_m$  касательна к  $C_{m-1}$  и  $C_{m+1}$  (по модулю  $M$ ) и не пересекает никаких других окружностей цепи. В этом случае множество  $\mathcal{L}$  представляет собой *кривую*, которая разделяет плоскость на две области — внешнюю и внутреннюю. (Воздавая должное Камилло Жордану, который первым обнаружил неочевидность того, что плоскость можно таким образом разделить одной-единственной петлей, такие петли называются с тех пор кривыми Жордана.)

В случае, когда все окружности  $C_m$  ортогональны одной окружности  $\Gamma$ , множество  $\mathcal{L}$  совпадает с  $\Gamma$ . Этот случай, называемый *фуксовым*, в настоящей главе не рассматривается.

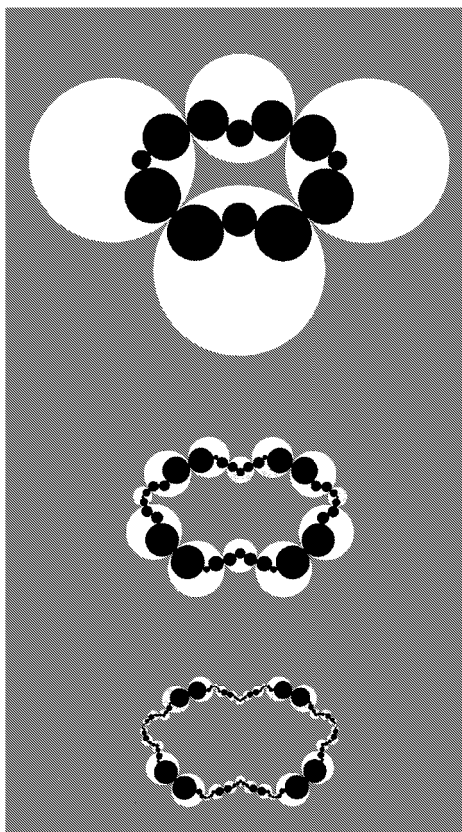
**Построение Пуанкаре для множества  $\mathcal{L}$ .** Ниже приводится полное описание общепринятого построения множества  $\mathcal{L}$  и моего альтернативного варианта для случая особой цепи с  $M = 4$ , показанной на следующем рисунке.

Для получения  $\mathcal{L}$  Пуанкаре и Клейн (см. [154]) поэтапно заменяют исходную цепь цепями, составляемыми из все возрастающего числа все



уменьшающихся звеньев. На первом этапе каждое звено  $C_i$  заменяется инверсиями остальных звеньев  $C_m$  относительно  $C_i$ ; таким образом, получается, в общей сложности,  $M(M-1) = 12$  меньших звеньев. Они показаны на рисунке справа сверху на фоне негативного изображения исходных звеньев. И так далее — на каждом этапе мы берем полученную на предыдущем этапе цепь и инвертируем ее относительно каждого из исходных звеньев  $C_m$ . На рисунке черным цветом показано несколько последовательных этапов построения, причем каждый из них наложен на результат предыдущего этапа, показанный белым цветом на сером фоне. В конце концов цепь истончается в нить, т. е. в  $\mathcal{L}$ .

К сожалению, некоторые звенья и после достаточно большого количества этапов остаются довольно крупными, и даже сильно продвинутое аппроксимации предельной цепи дают довольно слабое представление о множестве  $\mathcal{L}$ . Это неприятное свойство прекрасно иллюстрирует рисунок 255.



## ПОНЯТИЕ О ФРАКТАЛЬНОЙ ОСКУЛЯЦИИ

Мой способ построения множества  $\mathcal{L}$  основан на новом для нас понятии фрактальной оскуляции, которое расширяет рамки ее очевидного воплощения в аполлониевом случае.

**Стандартная оскуляция.** Это понятие непосредственно связано с концепцией кривизны. Первым приближением стандартной кривой в окрестности регулярной точки  $P$  является касательная прямая. Вторым приближением является окружность, касательная к которой в этой точке совпадает с упомянутой прямой, а кривизна — с кривизной кривой. Такая окружность называется *оскулирующей*.

Для различения окружностей, касательных к данной кривой в точке  $P$ , очень удобно использовать параметр (обозначим его буквой  $u$ ), который представляет собой инверсию интервала (произвольно ориентированного), соединяющего точку  $P$  с центром окружности. Обозначим индекс оскулирующей окружности через  $u_0$ . Если  $u < u_0$ , то небольшой участок кривой с центром в точке  $P$  целиком лежит с одной стороны касательной окружности, если же  $u > u_0$ , то — с другой.

Величина  $u_0$  есть то, что физики называют *критическим значением*, а математики — *разрезом*. Кроме того, значение  $|u_0|$  определяет локальную «кривизну».

**Глобальная фрактальная оскуляция.** В случае аполлониевой сети попытка определить оскуляцию через кривизну лишена смысла. Однако в любой точке сети, где касательны две принадлежащие упаковке окружности, они очевидно «охватывают» остаток множества  $\mathcal{L}$ , заключенный между ними. Возникает искушение назвать их *обе* окружности *оскулирующими*.

Для того, чтобы распространить это понятие на неаполлониевы множества  $\mathcal{L}$ , выберем точку, в которой  $\mathcal{L}$  имеет касательную, и возьмем в качестве отправной точки определение обыкновенной оскуляции, основанное на понятии критичности (или разреза). Новизна же заключается в том, что при  $-\infty < u < +\infty$  мы заменим одно критическое значение  $u_0$  двумя различными значениями,  $u'$  и  $u'' > u'$ , которые определим следующим образом: при любом  $u < u'$  множество  $\mathcal{L}$  целиком лежит с одной стороны нашей окружности, при любом  $u > u''$  — с другой, а при  $u' < u < u''$  части  $\mathcal{L}$  находятся и с той, и с другой стороны окружности. Что же касается окружностей с индексами, равными  $u'$  и  $u''$ , я предлагаю их *обе* считать *фрактально оскулирующими*.

Любая окружность ограничивает два открытых диска (один из них содержит центр этой окружности, другой — точку в бесконечности). Открытые диски, ограниченные оскулирующими окружностями и не принадлежащие множеству  $\mathcal{L}$ , мы будем называть оскулирующими дисками.

Случается и так, что одна или обе оскулирующие окружности вырождаются в точку.

**Локальное и глобальное.** Возвращаясь к стандартной оскуляции, заметим, что эта концепция является локальной, так как ее определение никак не зависит от формы кривой на каком-либо удалении от точки  $P$ . Иными словами, кривая, касательная к ней и оскулирующая



окружность могут иметь сколько угодно точек пересечения кроме  $P$ . Напротив, приведенное выше определение фрактальной оскуляции глобально, хотя это различие и не принципиально. Фрактальную оскуляцию можно определить и локально, причем с соответствующим расщеплением «кривизны» на два числа. Как бы то ни было, в нашей теперешней задаче глобальная и локальная оскуляции совпадают.

**Оскулирующие треугольники.**  $\triangleleft$  С аналогом глобальной фрактальной оскуляции мы, если помните, уже встречались. Для того, чтобы определить внутреннюю область нашей старой знакомой снежинки Коха (кривой  $\mathcal{K}$ ) как  $\sigma$ -треугольник, достаточно увеличивать треугольники, выкладываемые на каждом следующем этапе построения фигуры, изображенной на рис. 70, настолько, насколько это возможно без пересечения их со снежинкой.  $\blacktriangleright$

## $\sigma$ -ДИСКИ, ОСКУЛИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВО $\mathcal{L}$

Оскулирующие диски и  $\sigma$ -диски являются ключевыми фигурами в моем новом, свободном от перечисленных на с. 247 недостатков, способе построения множества  $\mathcal{L}$ . Этот способ демонстрируется в полном виде впервые (хотя о нем уже упоминалось в 1980 г. в «Математическом календаре»<sup>1</sup>). Суть его в том, что следует инвертировать не сами окружности  $C_m$ , а некоторые из окружностей  $\Gamma_{ijk}$ , которые (согласно определению на с. 244) ортогональны триплетам  $C_i$ ,  $C_j$  и  $C_k$ . Здесь мы опять полагаем, что не все окружности  $\Gamma_{ijk}$  совпадают с одиночной окружностью  $\Gamma$ .

**Ограничение  $M = 4$ .** Если ограничить число исходных окружностей  $M$  четырьмя, то мы сможем быть уверены в том, что для любого триплета  $i, j, k$  один из двух открытых дисков, ограниченных окружностью  $\Gamma_{ijk}$  (т.е. либо внутренний, либо наружный), не содержит ни одной из точек  $\gamma_{mn}$ , определенных на с. 247. Обозначим этот свободный от точек  $\gamma$  диск через  $\Delta_{ijk}$ .

Основой моего способа построения  $\mathcal{L}$  послужили следующие наблюдения: все свободные от  $\gamma$  диски  $\Delta_{ijk}$  оскулируют  $\mathcal{L}$ ; таким же свойством обладают их инверсии и повторные инверсии относительно окружностей  $C_m$ , а кланы, построенные с применением дисков  $\Delta_{ijk}$  в качестве затравок, заполняют всю плоскость за исключением кривой  $\mathcal{L}$ .

На рис. 253 мы воспользуемся той же цепью Пуанкаре, какую вы уже видели на с. 247, но изобразим ее в более крупном масштабе. Как и в большинстве случаев, первый этап построения обрисовывает кривую  $\mathcal{L}$  довольно точно. Последующие этапы весьма «эффективно» добавляют все более мелкие детали, и после нескольких этапов мы уже вполне

<sup>1</sup>The 1981 Springer Mathematical Calendar. — Прим. перев.

можем мысленно интерполировать кривую  $\mathcal{L}$ , не отвлекаясь на ошибки, от которых, к сожалению, не свободен подход Пуанкаре.

## ОБОБЩЕНИЯ

**Цепи из пяти и более звеньев.** В случае, когда число исходных звеньев в цепи Пуанкаре превышает четыре, мой новый способ построения множества  $\mathcal{L}$  включает в себя дополнительный шаг: сначала следует разделить окружности  $\Gamma$  на две группы. Дело в том, что некоторые из окружностей  $\Gamma$  в этом случае таковы, что *каждый* из ограниченных ими открытых дисков содержит, по меньшей мере, одну точку  $\gamma_{mn}$ , в результате чего диск  $\Delta_{ijk}$  оказывается не определен. Такие окружности  $\Gamma$  не оскулируют кривую  $\mathcal{L}$ , а пересекают ее. Однако для построения кривой они нам не нужны.

Остальные окружности  $\Gamma_{ijk}$  определяют оскулирующие диски  $\Delta_{ijk}$ , которые, в свою очередь, также делятся на два класса. При добавлении к диску  $\Delta_{ijk}$  первого класса его кланов мы получим внутреннюю область кривой  $\mathcal{L}$ ; проделав же такую операцию с диском, принадлежащим ко второму классу, получим внешнюю область  $\mathcal{L}$ .

Это верно для многих (но не для всех) случаев, когда окружности  $C_m$  не образуют цепь Пуанкаре.

**Перекрывающиеся и/или/ разорванные цепи.** В случае, когда окружности  $C_m$  и  $C_n$  имеют две точки пересечения  $\gamma'_{mn}$  и  $\gamma''_{mn}$ , эти точки совместно заменяют точку  $\gamma$ . Если же окружности  $C_m$  и  $C_n$  не имеют ни одной точки пересечения,  $\gamma$  заменяется двумя взаимно инверсными точками  $\gamma'_{mn}$  и  $\gamma''_{mn}$ . Критерий идентификации  $\Delta_{ijk}$  становится при этом довольно громоздким, однако основная идея остается неизменной.

**Разветвленные самоинверсные фракталы.** Кривая  $\mathcal{L}$  может соединять в себе характерные особенности как смятой петли (кривой Жордана), так и аполлониевой сети, в результате чего мы получаем фрактально разветвленную кривую, близкую к тем, что мы рассматривали в главе 14, но часто гораздо более причудливого вида (см., например, рис. С7).

**Самоинверсные пыли.** Множество  $\mathcal{L}$  может также оказаться фрактальной пылью.

## АПОЛЛОНИЕВА МОДЕЛЬ СМЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В этом разделе мы ознакомимся с ролью, которую понятия аполлониевой упаковки и фрактальной размерности играют в описании класса

веществ, известных под названием «жидкие кристаллы». В процессе этого ознакомления нам предстоит обратиться к одной из наиболее активных областей современной физики — теории *критических точек*. Примером критической точки может служить «точка» на диаграмме температура-давление, описывающая физические условия, при которых в пределах одной физической системы могут сосуществовать в равновесии твердая, жидкая и газообразная фазы. Аналитические характеристики физической системы в окрестности критической точки масштабно-инвариантны, следовательно, подчиняются степенным законам с некими конкретными критическими показателями (см. главу 36). Многие из этих показателей оказываются фрактальными размерностями, и вот перед вами первый пример.

Поскольку жидкие кристаллы не так хорошо известны широкой публике, как того хотелось бы, я начну с их описания, для чего обратюсь к статье Брэга [52]. Эти прекрасные и таинственные субстанции подвижны, как жидкости, однако с оптической точки зрения ведут себя подобно кристаллам. Их длинные цепеобразные молекулы имеют довольно сложную структуру. Некоторые жидкокристаллические фазы называются *смектическими* (от греч. *σμηγμα*, что означает «мыло»), так как они моделируют мылообразные органические системы. Молекулы смектического жидкого кристалла расположены в слое вертикально и параллельно друг другу, как колосья на поле, при этом толщина слоя равна длине молекулы. В результате получаются очень гибкие и прочные слои или листы, которые, будучи деформированными, стремятся вернуть себе прежнюю форму. При низких температурах слои располагаются один на другом, точно листы в книге, образуя при этом твердый кристалл. Однако при повышении температуры становится возможным легко сдвигать слои относительно друг друга. Каждый слой представляет собой двумерную жидкость.

Особый интерес представляют фокальные конические структуры. Жидкокристаллический блок разделяется на два набора пирамид, причем основания половины из них располагаются на одной из двух противоположных граней, а вершины — на другой. Жидкокристаллические слои внутри каждой пирамиды оказываются свернутыми и образуют множество очень заостренных конусов. Все конусы имеют общую вершину и приблизительно перпендикулярны плоскости основания пирамиды. В результате основанием каждого конуса является диск, ограниченный окружностью. Минимальный радиус  $\varepsilon$  такой окружности равен толщине слоя жидкого кристалла. Когда конусы заключены внутри пространственной области — в данном случае, пирамиды с квадратным основанием, — диски, образующие основания конусов, распределяются по основанию этой области (пирамиды). Для получения равномерного распределения следует начать с размещения на основании диска наибольшего радиуса. Затем поместим диски наибольшего возможного

радиуса в каждый из остающихся углов и так далее. Если бы было возможно продолжать такое размещение до бесконечности, мы получили бы в точности аполлониеву упаковку.

Физические свойства такой модели мыла зависят от общих площади и периметра пустых промежутков, которые связаны с фрактальной размерностью  $D$ , своего рода фотографического «негатива», т. е. салфетки, сквозь отверстия которой не проходят молекулы мыла. Физические подробности можно найти в работе [32]. ■

### Рис. 253. САМОИНВЕРСНЫЙ ФРАКТАЛ (ПОСТРОЕНИЕ МАНДЕЛЬБРОТА)

Этот рисунок — иллюстрация к с. 249.

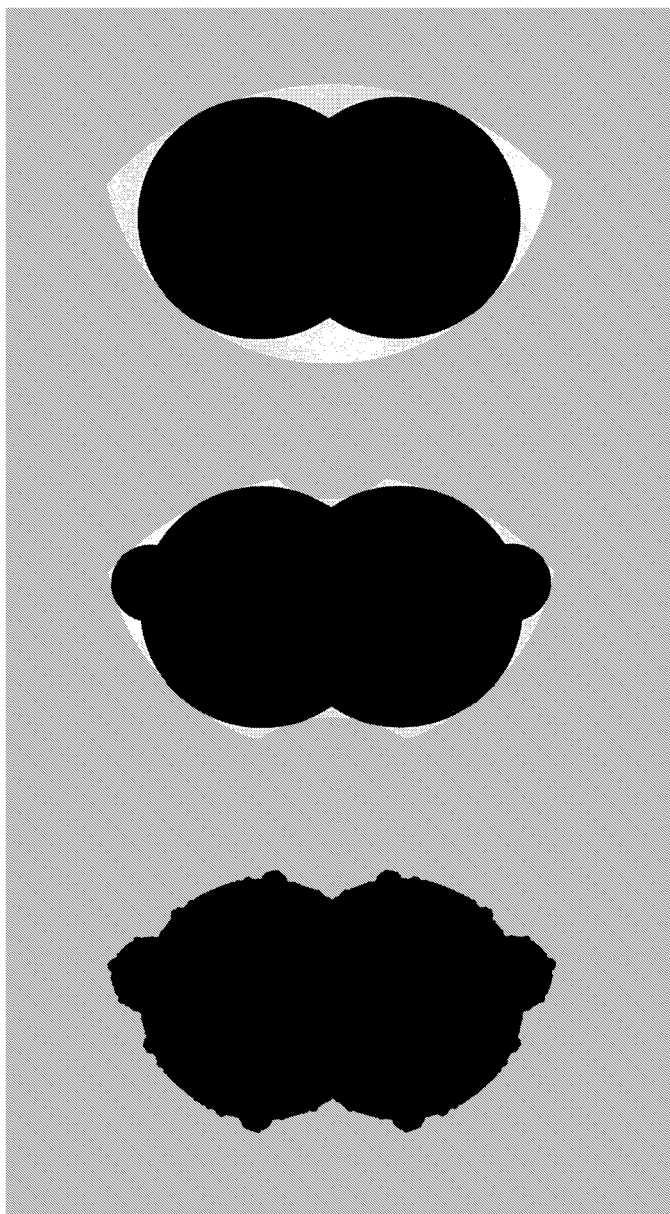
**Верхняя фигура.** В цепях Пуанкаре с  $M = 4$  по крайней мере один из дисков  $\Delta_{ijk}$  (назовем его  $\Delta_{123}$ ) всегда не ограничен и пересекается с диском  $\Delta_{341}$ . (На данном рисунке диск  $\Delta_{341}$  также не ограничен, однако в других случаях это не так.) Объединение дисков  $\Delta_{123}$  и  $\Delta_{341}$  (показанное на рисунке серым цветом) дает первое приближение области, внешней к кривой  $\mathcal{L}$ . Оно аналогично приближению области, внешней к кривой Коха  $\mathcal{K}$ , с помощью правильного выпуклого шестиугольника (см. рис. 71).

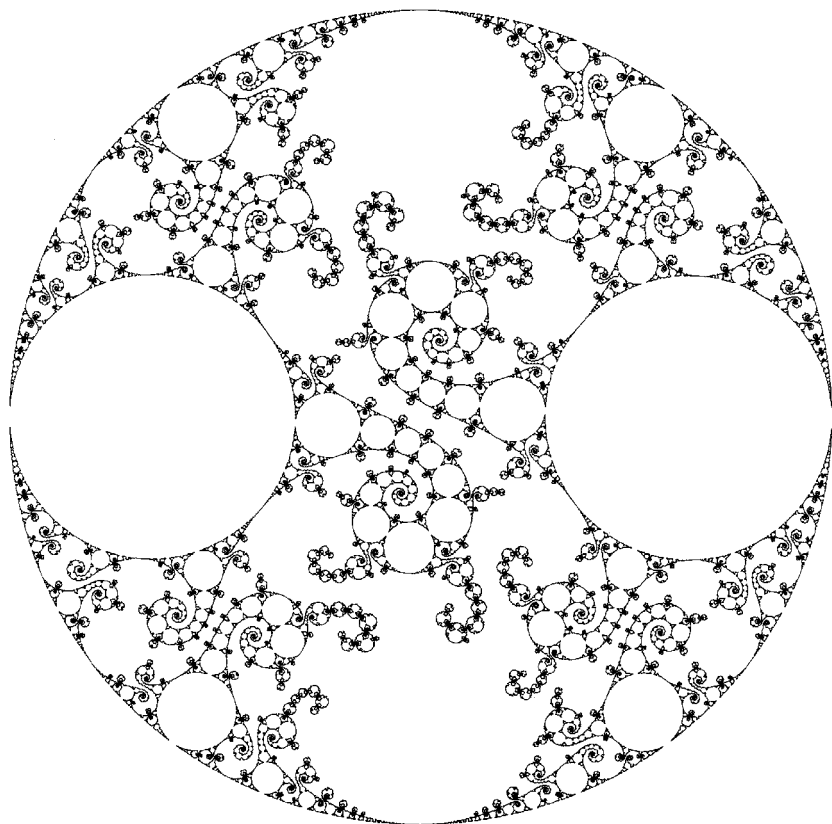
Диски  $\Delta_{234}$  и  $\Delta_{412}$  также пересекаются, и их объединение (показанное на рисунке черным цветом) дает первое приближение внутренней области  $\mathcal{L}$ . Оно аналогично приближению внутренней области кривой  $\mathcal{K}$  с помощью двух треугольников, образующих правильную шестиконечную звезду (см. рис. 71).

**Средняя фигура.** Второе приближение области, внешней к кривой  $\mathcal{L}$ , достигается добавлением к дискам  $\Delta_{123}$  и  $\Delta_{341}$  их инверсий относительно окружностей  $C_4$  и  $C_2$ , соответственно. Результат (серая область) аналогичен второму приближению области, внешней к кривой  $\mathcal{K}$ , на рис. 71.

Соответствующее второе приближение внутренней области  $\mathcal{L}$  достигается добавлением к дискам  $\Delta_{234}$  и  $\Delta_{412}$  их инверсий относительно окружностей  $C_1$  и  $C_3$ , соответственно. Результат (черная область) аналогичен второму приближению внутренней области кривой  $\mathcal{K}$  на рис. 71.

**Нижняя фигура.** Внешняя область  $\mathcal{L}$  (серый цвет) является объединением кланов  $\Delta_{123}$  и  $\Delta_{341}$ . Внутренняя же (черный цвет) — объединением кланов  $\Delta_{234}$  и  $\Delta_{412}$ . Тонкая структура внутренней области  $\mathcal{L}$  показана на рис. 255 внизу (при построении использованы разные цепи Пуанкаре). Черная и серая открытые области вместе покрывают всю плоскость (за вычетом кривой  $\mathcal{L}$ ). ■





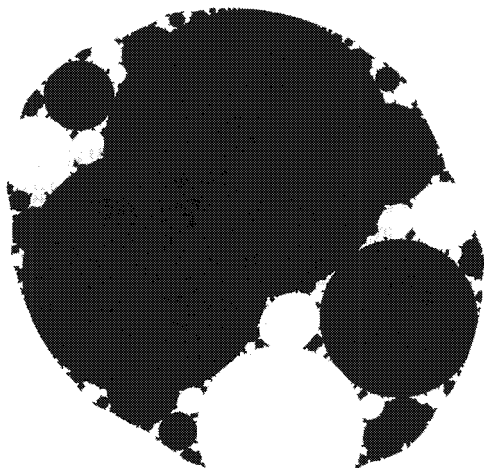
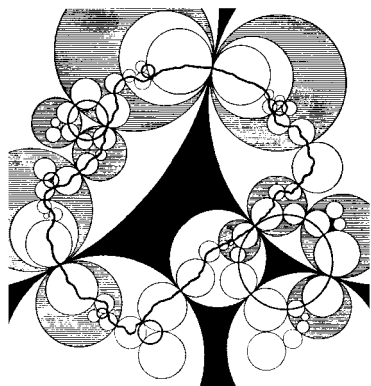
**Рис. 254. САМОГОМОГРАФИЧЕСКИЙ ФРАКТАЛ  
(ВБЛИЗИ ПРЕДЕЛА ПЕАНО)**

Группы, основанные на инверсиях, интересуют математиков прежде всего потому, что они связаны с определенными группами гомографий. Гомография (называемая также гомографией Мебиуса или дробно-линейным преобразованием) отображает  $z$ -плоскость по закону  $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ , где  $ad - bc = 1$ . В наиболее общем виде эта гомография может быть представлена как результат инверсии, симметрии относительно линии (что есть вырожденная инверсия) и вращения. Вот почему при отсутствии вращения исследователь гомографий может почерпнуть много интересного из изучения групп, основанных на инверсиях. Очевидно, однако, что введение вращений открывает новые богатые возможности.

На рисунке изображен пример предельного множества  $\mathcal{L}$  для группы гомографий. Построил его Дэвид Мамфорд (в ходе исследований,

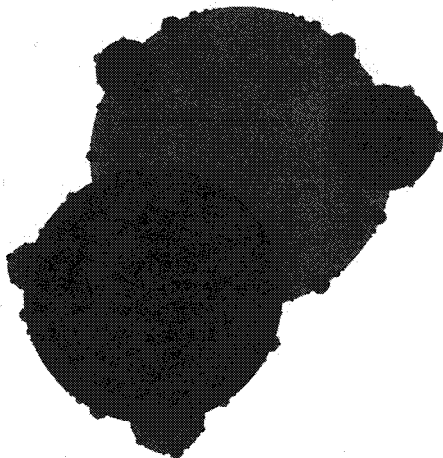
стимулом для которых послужили новые результаты, о которых говорится в данной главе), а затем любезно разрешил опубликовать свое построение в этой книге. Фигура эта почти заполняет плоскость и демонстрирует поразительные аналогии (и равно поразительные различия) с почти заполняющей плоскость кривой, изображенной на рис. 270.

Фрактальная природа предельного множества группы гомографий в широком диапазоне условий была доказана Т. Акадзой, А. Ф. Бирдоном, Р. Боуэном, С. Дж. Паттерсоном и Д. Салливенем. См. [545]. ■



**Рис. 255. ЗНАМЕНИТЫЙ  
САМОИНВЕРСНЫЙ  
ФРАКТАЛ,  
ИСПРАВЛЕННЫЙ  
ВАРИАНТ  
(ПОСТРОЕНИЕ  
МАНДЕЛЬБРОТА)**

Рисунок сверху слева воспроизводит рис. 156 из книги Фрикке и Клейна [154], который призван изображать самоинверсный (в моей терминологии) фрактал, генератор которого состоит из пяти окружностей, ограничивающих центральную область (она показана черным цветом). Этот рисунок весьма часто появляется в математической литературе.



Действительной формой этого фрактала является контур фигуры, изображенной вверху справа; фигура эта построена с помощью моего метода оскулирующих  $\sigma$ -дисков. Расхождение, конечно, ужасное. Фрикке знал, что кривая  $\mathcal{L}$  должна содержать окружности, и велел иллюстратору включить их в рисунок. Обо всем остальном он не знал и, очевидно, даже не подозревал, насколько иррегулярной фигуры ему следует ожидать.

В действительности кривая  $\mathcal{L}$  включает в себя границу  $\mathcal{L}^*$  фигуры, построенной справа внизу с использованием моего алгоритма. Эта граница  $\mathcal{L}^*$  представляет собой самоинверсный фрактал, соответствующий четырем из тех порождающих окружностей, что образуют цепь Пуанкаре. Ясно видно, что преобразования  $\mathcal{L}^*$  при иных инверсиях принадлежат  $\mathcal{L}$ . Этот рисунок подробно рассмотрен в работе [400].

■



## 19 ◊ КАНТОРОВА ПЫЛЬ И ПЫЛЬ ФАТУ. САМОКВАДРИРУЕМЫЕ ДРАКОНЫ

В этой главе мы рассмотрим два семейства очень простых нелинейных преобразований (или отображений) и исследуем несколько таких фрактальных множеств, которые при этих преобразованиях остаются инвариантными и для которых они могут служить генераторами.

Во-первых, дробно-линейное преобразование вещественной линии поможет нам лучше понять нашу старую знакомую — канторову пыль. Эти замечания, конечно, можно было вставить в главу 8, однако мне кажется, что они будут лучше восприняты на данном этапе.

Они, в частности, помогают оценить результаты вещественных и комплексных квадратичных преобразований вида  $x \rightarrow f^*(x) = x^2 - \mu$ , где  $x$  и  $\mu$  вещественны, и  $z \rightarrow f^*(z) = z^2 - \mu$ , где  $z = x + iy$  и  $\mu$  — комплексные числа.

Элементарный случай  $\mu = 0$  довольно скучен с геометрической точки зрения, однако другие значения  $\mu$  ведут к потрясающим фрактальным красотам, многие из которых были впервые продемонстрированы в статье [398].

Удобнее всего получать упомянутые инвариантные формы с помощью итераций (т. е. многократных применений) одного из вышеуказанных преобразований. Исходные значения мы будем обозначать через  $x_0$  или  $z_0$ , а результаты  $k$ -й итерации функции  $f^*$  — через  $x_k$  или  $z_k$ .

Хронологически изучение итераций можно разделить на три этапа. Первый, связанный с комплексной переменной  $z$ , прошел под знаменами Пьера Фату (1878–1929) и Гастона Жюлиа (1893–1978). Их публикации являются шедеврами классического комплексного анализа, ими восхищаются математики, однако на их фундаменте чрезвычайно сложно что-нибудь построить. В своей работе, о которой данная глава дает лишь весьма сжатое представление, я стараюсь придать большую наглядность их основным открытиям, объединяя анализ с физикой и подробными иллюстрациями, в результате чего обнаруживается великое множество неизвестных ранее фактов.

Последовавшее за этими открытиями возрождение помогло установить тесную связь свойств итераций с теорией фракталов. Из того факта, что находки Фату и Жюлиа оказались *недостаточно* проработаны для того, чтобы стать *основой* теории фракталов, мы можем сделать вывод, что даже классический анализ нуждается иногда в наглядности и

интуитивной понятности, причем компьютерное моделирование может оказать ему в этом смысле серьезную помощь.

Следующий, промежуточный, этап включает в себя исследования Мирбергом итераций вещественных квадратичных отображений  $\mathbb{R}$  (см., например, [440]), а также труды Штейна и Улама [538] и Бролина [55].

На текущем этапе исследователи, по большей части, игнорируют прошлое и сосредоточивают свои усилия на отображениях интервала  $[0, 1]$  в себя (за подробностями рекомендую обратиться к обзорам [180], [209], [83], [144] и [219]). В последнем разделе главы рассматривается показатель  $\delta$  по [179] и [142]: доказывается, что существование  $\delta$  следует из более явного свойства итераций в комплексной плоскости (т. е. их фрактальности).

## ВОЗМОЖНОСТЬ ПОЛУЧЕНИЯ КАНТОРОВОЙ ПЫЛИ ПОСРЕДСТВОМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Из главы 8 нам известно, что троичная канторова пыль  $C$  инвариантна при преобразованиях подобия, если коэффициент подобия имеет вид  $3^{-k}$ . Это самоподобие является, безусловно, очень важным свойством, однако его *недостаточно* для определения  $C$ . Напротив, мы можем *полностью* определить множество  $C$  как наибольшее ограниченное множество, инвариантное при следующем нелинейном преобразовании («перевёрнутое  $V$ »):

$$x \rightarrow f(x) = \{1/2 - |x - 1/2|\}/r, \quad \text{где } r = 1/3.$$

Точнее, мы многократно повторяем это самоотображение вещественной оси, при этом исходное значение  $x_0$  «размазано» по оси  $x$ , а окончательные значения сводятся к точке  $x = -\infty$  и канторовой пыли  $C$ . Неподвижные точки  $x = 0$  и  $x = 3/4$  принадлежат  $C$ .

**Набросок доказательства инвариантности множества  $C$ .** Поскольку  $f(x) = 3x$  при  $x < 0$ , итерации всех точек  $x_0 < 0$  сходятся к  $-\infty$  прямо, т. е. всегда справедливо неравенство  $x_n < 0$ . Для точек  $x_0 > 1$  прямой сходимости предшествует один предварительный этап, так как  $x_k < 0$  для всех  $k \geq 1$ . Для точек в пустой области  $1/3 < x_0 < 2/3$  предварительных этапов будет два, так как  $x_1 > 0$ , но  $x_k < 0$  для всех  $k \geq 2$ . Для точек в пустых областях  $1/9 < x_0 < 2/9$  или  $7/9 < x_0 < 8/9$  предварительных этапов будет уже три. В более общем виде это выглядит так: если интервал ограничен пустой областью, которая отправляется в бесконечность после  $k$  предварительных этапов, то средняя треть (открытая) этого интервала отправится прямо в  $-\infty$  после  $(k + 1)$ -го этапа. Однако *ни одна* точка множества  $C$  не уходит в  $-\infty$ .

## КОНЕЧНОСТЬ ВНЕШНЕГО ПОРОГА

Для того, чтобы распространить эти выводы на обобщенную канторову пыль с  $N = 2$  и  $r$  в интервале от 0 до  $1/2$ , достаточно вставить желаемое значение  $r$  в выражение  $f(x) = \{1/2 - |x - 1/2|\}/r$ . Если вы хотите получить какую-либо другую пыль, вам нужно лишь проследить, чтобы график функции  $f(x)$  имел соответствующую зигзагообразную форму.

Однако аналогичного метода для экстраполяции канторовой пыли на всю вещественную ось не существует. Это — частное проявление одного очень общего свойства: нелинейная функция  $f(x)$ , как правило, *заключает в себе* некоторый конечный внешний предел  $\Omega$ . Для линейных же преобразований (подобий и аффинностей), как нам хорошо известно, характерен порог  $\Omega = \infty$ ; при возникновении необходимости в конечном пороге его приходится вводить искусственно.

## АНАТОМИЯ КАНТОРОВОЙ ПЫЛИ

Из главы 7 нам известно, что множество  $\mathcal{C}$  является очень «разреженным», и все же поведение итераций  $f(x)$  приводит к лучшему пониманию тонких различий между его точками.

Вряд ли кто при первом знакомстве с канторовым множеством смог избежать искушения предположить, что оно в конечном итоге сходится к конечным точкам открытых пустых областей. Тем не менее, такое предположение весьма далеко от истины, поскольку множество  $\mathcal{C}$  содержит, по определению, все пределы последовательностей конечных точек пустот.

Этот факт *не* считается интуитивно очевидным. Я (равно как и мои соратники и единомышленники) вполне понял бы, если бы наш многострадальный старый знакомец Ганс Хан внес эти предельные точки в свой список концепций, существование которых может оправдать лишь холодная логика. Однако из настоящего обсуждения мы с вами вынесем *интуитивное* доказательство того, что упомянутые предельные точки обладают сильными и отличными от других индивидуальностями.

Например, точка  $x = 3/4$ , которую функция  $f(x)$  оставляет неизменной, не принадлежит ни какому-либо из интервалов средней трети, ни границе какого-либо из этих интервалов. Итерации точек вида  $x = (1/4)/3^k$  сходятся к точке  $x = 3/4$ . Кроме того, существует бесконечное множество предельных циклов, каждый из которых состоит из конечного числа точек. Множество  $\mathcal{C}$  содержит также точки, преобразования которых бесконечно перемещаются вокруг него самого.

## ГЕНЕРАТОР КВАДРАТОВ

Производящая функция  $f(x)$  преобразования «перевернутое V», используемая в предыдущих разделах, была выбрана из-за того, что она дает знакомый нам результат. Однако полученная с ее помощью канторова пыль выглядит несколько надуманной. Заменяем ее функцией

$$x \rightarrow f(x) = \lambda x(1-x),$$

неожиданное богатство свойств которой было впервые замечено Фату [139]. Сдвинув точку начала координат, изменив масштаб оси  $x$  и положив  $\mu = \lambda^2/4 - \lambda/2$ , можно записать эту функцию в следующем виде:

$$x \rightarrow f^*(x) = x^2 - \mu.$$

Исходя из соображений удобства, мы будем использовать то  $f(x)$ , то  $f^*(x)$ .

Мне представляется уместным назвать функцию  $f(x)$  (или  $f^*(x)$ ) *генератором квадратов*. Возведение в квадрат является, безусловно, алгебраической операцией, однако здесь оно получает геометрическую интерпретацию, поэтому множества, которые оно оставляет инвариантными, можно называть *самоквадрируемыми*. Строго говоря, возведение в квадрат заменяет точку абсциссы с координатой  $x$  точкой абсциссы с координатой  $x^2$ . Таким образом, самоквадрируемых точек на оси всего три:  $x = \infty$ ,  $x = 0$  и  $x = 1$ . Может показаться, что добавление  $-\mu$  едва ли способно что-либо в этом изменить, однако на самом деле оно открывает множество самых неожиданных возможностей, рассмотрением которых мы и займемся ниже.

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ САМОКВАДРИРУЕМЫЕ ПЫЛЕВИДНЫЕ МНОЖЕСТВА ФАТУ

Произведя на свет всем хорошо знакомый конечный продукт (а именно — канторову пыль), V-преобразование значительно облегчило нам задачу по изложению сути удивительного, однако никогда не пользовавшегося широкой известностью открытия Пьера Фату. Допустив, что число  $\lambda$  вещественно и удовлетворяет неравенству  $\lambda > 4$ , Фату [139] исследует наибольшее из ограниченных множеств на  $\mathbb{R}$ , остающихся инвариантными при преобразовании  $f(x)$ . Это множество, которое я называю *вещественной пылью Фату*, можно считать близким родственником канторовой пыли. Дальнейших объяснений оно не требует; что касается портрета, то он представлен на рис. 273.

В комплексной плоскости при вышеуказанных значениях  $\lambda$  наибольшим ограниченным самоквадрируемым множеством остается вещественная пыль Фату.

## САМОКВАДРИРУЕМЫЕ КРИВЫЕ ЖЮЛИА НА ПЛОСКОСТИ [398]

Положив  $\mu = 0$ , получаем простейшую самоквадрируемую кривую — окружность  $|z| = 1$ . При преобразовании  $z \rightarrow z^2$  кольцо, *однократно* опоясывающее окружность, растягивается в кольцо, опоясывающее эту же окружность *дважды*, причем «пряжка» при  $z = 1$  остается неподвижной. Соответствующая наибольшая ограниченная самоквадрируемая область — диск  $|z| < 1$ .

Однако введение вещественного  $\mu \neq 0$  (см. рис. 264 и 266) или любого комплексного  $\mu$  (рис. 271 и 270) открывает настоящий ящик Пандоры, доверху набитый бесчисленными возможностями, имя которым *фрактальные кривые Жюлиа*. Они радуют глаз в той же степени, в какой дают пищу для ума.

**Сепаратор  $\mathcal{S}$ .** Топология наибольшего ограниченного самоквадрируемого множества зависит от того, где расположена точка  $\mu$  по отношению к открытой мною разветвленной кривой  $\mathcal{S}$ , которую я теперь называю *сепаратором*<sup>1</sup>. Сепаратор — это связная граница черной фигуры на рис. 268 (внизу); иначе говоря, это некая «предельная лемниската», т. е. предел при  $n \rightarrow \infty$  алгебраических кривых, называемых лемнискатами и определяемых выражением  $|f_n^*(0)| = R$ , где  $R$  есть некоторое большое число. Структура кривой  $\mathcal{S}$  показана на рис. 269.

**Атомы.** Открытая область внутри  $\mathcal{S}$  разбивается на бесчисленное множество максимально связных множеств, которые я предлагаю называть «атомами». Границы двух атомов либо совсем не пересекаются, либо имеют одну общую точку (назовем ее «связью»), которая принадлежит  $\mathcal{S}$ .

**Топологическая размерность.** Когда точка  $\mu$  лежит вне области, ограниченной кривой  $\mathcal{S}$ , наибольшим ограниченным самоквадрируемым множеством является пыль (пыль Фату). Если же  $\mu$  находится внутри  $\mathcal{S}$  или является связью, то таким наибольшим множеством будет область, ограниченная некоторой самоквадрируемой кривой. Из принадлежащих  $\mathcal{S}$  точек  $\mu$  по крайней мере несколько дают древовидную кривую.

**Самоквадрируемые фракталы.** Если верить слухам, то фрактальность вышеупомянутых пылей и кривых при  $\mu \neq 0$  была полностью доказана Деннисом Салливаном и для некоторых других случаев, и я ничуть не сомневаюсь, что такое доказательство осуществимо для всех случаев без исключения.

<sup>1</sup>В настоящее время общепринят термин *фрактал* (или *множество*) *Мандельброта*. — Прим. ред.

Форма самоквадрируемой пыли или кривой изменяется непрерывно вместе с  $\mu$ ; следовательно, размерность  $D$  должна быть гладкой функцией от  $\mu$ .

**Ветвление.** Когда  $\lambda$  находится внутри одного из открытых пустых дисков, изображенных на рис. 269 (вверху), самоквадрируемая кривая будет простой замкнутой кривой (петлей без ветвления), как на рис. 264 и 266.

Когда  $\lambda$  принадлежит окружностям  $|\lambda| = 1$  или  $|\lambda - 2| = 1$  или лежит в окружающей их открытой связной области, самоквадрируемая кривая имеет вид разветвленной сети с тремями, ограниченными фрактальными петлями, как драконы на рис. 270.

Когда же  $\lambda$  лежит внутри молекул-островов, которые, как мы вскоре покажем, являются областями нестремления к точке  $(1, 0)$ , самоквадрируемая кривая представляет собой либо  $\sigma$ -петлю, либо  $\sigma$ -дракона, как на рис. 271 (внизу). Новой петли  $\sigma$  не вводит.

## $\mu$ -АТОМЫ И $\mu$ -МОЛЕКУЛЫ

При дальнейшем исследовании параметрического отображения нам будет удобнее пользоваться параметром  $\mu$ .  $\mu$ -атом может иметь сердцевидную форму — в этом случае он является «затравкой», с которой связывается бесконечное множество атомов овальной формы (как непосредственно, так и через атомы-посредники). Совокупность взаимно связанных атомов и связей между ними образует «молекулу». Точка заострения затравки связью не бывает никогда.

Каждому атому сопоставлено некоторое целое число  $w$ , его «период». Когда точка  $\mu$  лежит внутри атома периода  $w$ , итерации  $f_n^*(z)$  уходят в бесконечность или образуют устойчивый предельный цикл, состоящий из  $w$  точек. Внутри атома периода  $w$  справедливо неравенство  $|f_w^{*'}(z_\mu)| < 1$ , где  $z_\mu$  — любая точка предельного цикла, соответствующего данному  $\mu$ . На границе атома  $|f_w^{*'}(z_\mu)| = 1$ , причем равенство  $f_w^{*'}(z_\mu) = 1$  описывает точку заострения, или «корневую» точку. Каждый атом содержит точку (назовем ее «ядром»), в которой выполняются равенства  $f_w^{*'}(z_\mu) = 0$  и  $f_w^*(0) = 0$ .

О ядрах, расположенных на вещественной оси, впервые сообщил Мирберг в 1962 г. [440]; после этого они всплыли лишь в 1973 г. (см. [430]). Соответствующие отображения часто называют «сверхустойчивыми» (см. [83]).

Если рассматривать равенство  $f_w^*(0) = 0$  как алгебраическое уравнение относительно  $\mu$ , то его порядок равен  $2^{w-1}$ . Следовательно, может существовать не более  $2^{w-1}$  атомов периода  $w$ ; в действительности их меньше, за исключением случая  $w = 1$ . При  $w = 2$  уравнение  $f_2^*(0) = 0$

имеет два корня, однако один из них уже является ядром «предыдущего» атома периода 1. В более общем виде все корни уравнения  $f_m^*(0) = 0$  являются также корнями уравнения  $f_{km}^*(0) = 0$ , где  $k$  — целое число, большее 1. Заметим далее, что каждая рациональная граничная точка, расположенная на границе атома периода  $w$  и удовлетворяющая условию  $f_w^{*'}(z_\mu) = \exp(2\pi im/n)$ , где  $m/n$  — неприводимое рациональное число, меньшее 1, включает в себе «принимаящую связь», готовую присоединить атом периода  $nw$ . Как следствие, некоторые новые атомы соединяются с существующими принимающими связями. Однако в этот процесс оказываются вовлечены не все новые атомы, и оставшимся не остается ничего иного, как послужить затравкой для новых молекул. Таким образом, число молекул бесконечно.

Когда значение  $\mu$  непрерывно изменяется внутри молекулы, каждое направленное наружу прохождение связи ведет к бифуркации:  $w$  умножается на  $n$ . Пример: увеличение вещественного  $\mu$  приводит к мирбергову удвоению периода. Инверсия бифуркации, которую я рассматриваю в [398] и называю *слиянием*, должна прекратиться по достижении периода затравки молекулы. Молекула-континент является областью слияния в  $c = 1$ , а каждая молекула-остров является областью слияния в  $c > 1$ . Форма дракона или субдракона регулируется значениями  $f_w^{*'}(z_\mu)$  и  $w/c$ .

## СЕПАРАТОР КАК ФРАКТАЛЬНАЯ КРИВАЯ; ПОКАЗАТЕЛЬ ФЕЙГЕНБАУМА $\delta$ КАК СЛЕДСТВИЕ

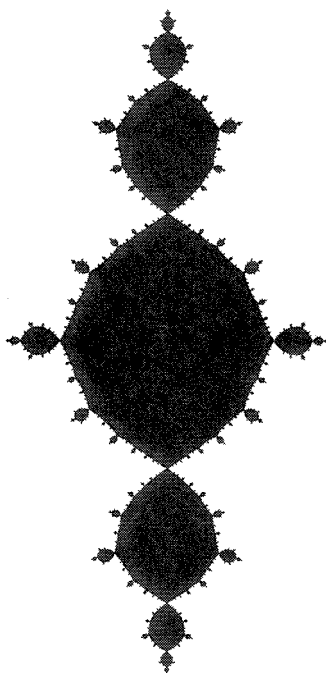
Я предполагаю, < исходя из «перенормировочных» соображений ►, что чем дальше находятся атомы от затравки своей молекулы, тем более *идентичными* становятся их формы.

Следствие: граница каждой молекулы локально самоподобна. Так как она не является гладкой в малом масштабе, мы можем считать ее фрактальной кривой.

Это локальное самоподобие позволяет обобщить одно свойство бифуркации Мирберга, о котором сообщают Гроссман и Томэ [179], а также Фейгенбаум [142]. Длины отрезков, отсекаемых все уменьшающимися отрезками на вещественной оси  $\lambda$  и  $\mu$ , образуют убывающую геометрическую прогрессию с коэффициентом  $\delta = 4,66920\dots$  (см. [83]). Первоначально считалось, что существование коэффициента  $\delta$  обусловлено особенностями аналитического метода. Рассмотренный в новом свете показатель  $\delta$  оказывается связан с более широким свойством фрактального скейлинга.

Каждая бифуркация из  $m > 2$  ветвей вводит дополнительный базисный коэффициент.





**Рис. 264. САМОКВАДРИРУЕМЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ПРИ ВЕЩЕСТВЕННОМ ЗНАЧЕНИИ  $\lambda$**

Фигуры на рисунках 264–273 публикуются впервые (за некоторыми исключениями, использованными мною в [398]).

Слева представлены наибольшие ограниченные самоквадрируемые области при различных значениях  $\lambda$  (а именно, 1, 0; 1, 5; 2, 0; 2, 5 и 3, 0). Черная фигура в центре охватывает интервал  $[0, 1]$ .

$\lambda = 1$ : **двустворчатая раковина.**

$\lambda = 3$ : **дракон Сан-Марко.** Своего рода безудержная математическая экстраполяция очертаний венецианской базилики на фоне неба вместе с ее отражением в затопленной пьянице: я окрестил эту кривую *драконом Сан-Марко*.

Справа помещена кривая при  $\lambda = 3, 3260680$ . Это значение  $\lambda$  является ядерным (согласно определению на с. 262) и соответствует периоду  $w = 2$ . Кривая развернута на  $90^\circ$ , иначе она не входила в отведенные для иллюстрации рамки.





## Рис. 266. ОБОБЩЕНИЕ САМОКВАДРИРУЕМЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ КРИВЫХ ПРИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ $\lambda$

Изображенная на рисунке «драпировка» была построена в памяти компьютера с помощью процесса, который сводится к отсечению от исходного куба всех точек, итерации которых при отображении  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$  уходят в бесконечность. Параметр  $\lambda$  — вещественное число, изменяющееся в интервале от 1 до 4. Ось  $\lambda$  расположена вертикально, а координаты  $x$  и  $y$  образуют комплексное число  $z = x + iy$ .

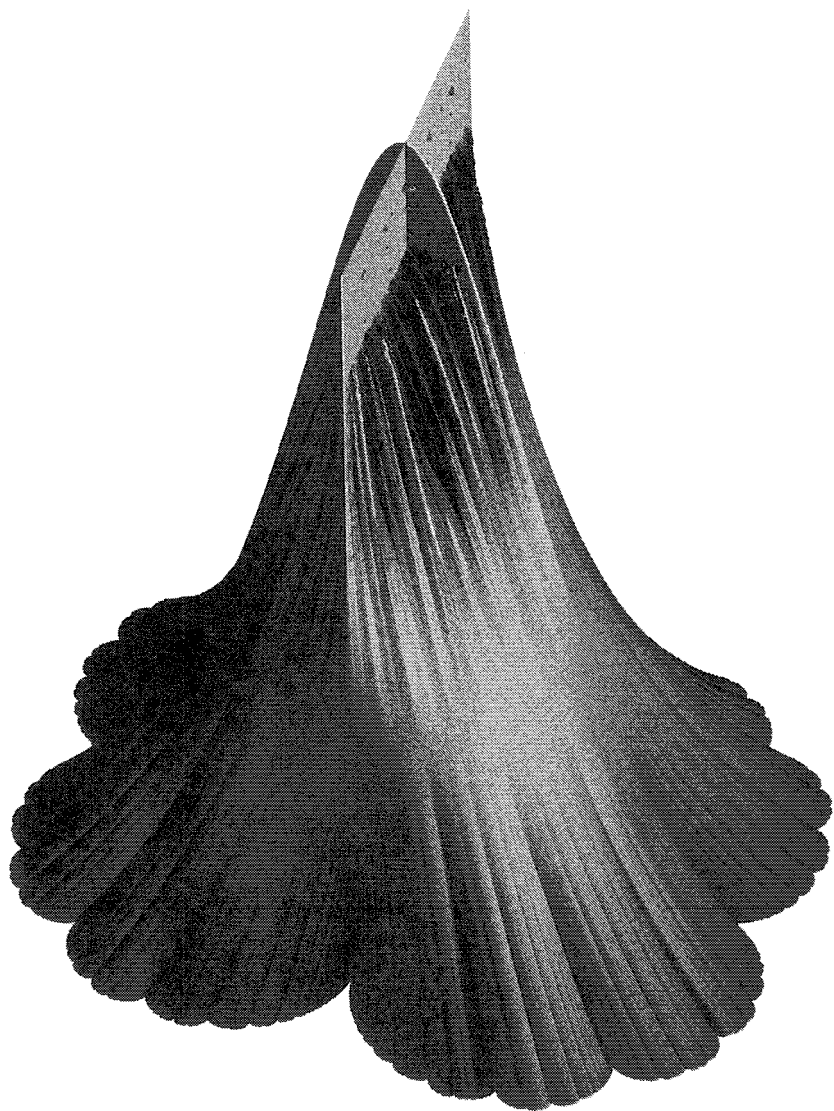
Любое горизонтальное сечение представляет собой наибольшую ограниченную самоквадрируемую область с соответствующим значением параметра  $\mu$ .

При особом значении  $\lambda = 2$  границей сечения является окружность; будем считать ее «поясом» нашей задрапированной фигуры.

При всех остальных значениях  $\lambda$  границами сечений являются фрактальные кривые, включая и те, что изображены на рис. 264. Можно различить замечательные «складки», расположение которых изменяется в зависимости от  $\lambda$ ; ниже пояса они «вдавлены» *внутрь*, а выше пояса выступают *наружу*.

Особый интерес представляют наросты на стене, с которой свисает драпировка. К сожалению, данная иллюстрация не может показать сложную структуру верхней части модели во всей ее красе. А). Для каждого значения  $\lambda$  драпировка включает в себя (в качестве своего рода «опоры») фрактальное дерево, составленное из итерированных прообразов точек  $x$ -интервала  $[0, 1]$ . При всех малых и некоторых больших значениях  $\lambda < 3$  ветви этого дерева обладают по всей своей длине некоторой толщиной. Однако при других больших значениях  $\lambda$  от дерева остается лишь голый остов, полностью лишенный толщины. На рисунке мы можем видеть ветви вдоль прямых  $x = 1/2$  или  $y = 0$ , остальные же при данном графическом процессе неизбежно оказываются потерянными. Б). Некоторые горизонтальные участки стены за драпировкой полностью покрыты крохотными «холмами» или «складками», однако мы можем увидеть лишь немногие, самые выдающиеся из них. Эти холмы и складки относятся к «молекулам-островам» (см. рис. 268 и 269), пересекающим вещественную ось. С учетом замечаний А) и Б) теория Мирберга–Фейгенбаума предстает в более общем виде.





**Рис. 268 и 269. СЕПАРАТОРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$   
И  $z \rightarrow z^2 - \mu$**

**Рис. 268 (внизу).  $\mu$ -отображение.** Значения  $\mu$  внутри замкнутой черной области, ограниченной фрактальной кривой, таковы, что итерации точки  $z_0 = 0$  при отображении  $z \rightarrow z^2 - \mu$  не уходят в бесконечность. Большая точка заострения соответствует точке  $\mu = -1/4$ , а самая правая точка — точке  $\mu = 2$ .

**Рис. 269 (вверху).  $\lambda$ -отображение.** Значения  $\lambda$  внутри замкнутой черной области и внутри пустого диска удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} \lambda > 1$  и таковы, что итерации точки  $z_0 = 1/2$  при отображении  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$  не уходят в бесконечность. Полное  $\lambda$ -отображение симметрично относительно прямой  $\operatorname{Re} \lambda = 1$ .

**Диск  $|\lambda - 2| \leq 1$  и диск  $|\lambda| \leq 1$  без точки  $\lambda = 0$ .** Значения  $\lambda$  внутри этих областей таковы, что итерации точки  $z_0 = 1/2$  сходятся к некоторой ограниченной предельной точке.

**Корона и отростки.** Снаружи пустых дисков  $\lambda$ -отображение образует «корону». Она разбивается на «отростки», «корнями» которых являются «принимающие связи», определяемые как точки вида  $\lambda = \exp(2\pi i m/n)$  и  $\lambda = 2 - \exp(2\pi i m/n)$ , где  $m/n$  — неприводимое рациональное число, меньшее 1.

**Рис. 268 (вверху).** На рисунке показана часть инверсии  $\lambda$ -отображения относительно точки  $\lambda = 1$ . Если внимательно рассмотреть на  $\lambda$ -отображении отростки, корни которых имеют вид  $\lambda = \exp(2\pi i/n)$ , может сложиться впечатление, что «соответствующие точки» лежат на окружностях. Рисунок подтверждает истинность этого впечатления. Правильность других кажущихся окружностей подтверждается с помощью других инверсий.

**Молекулы-острова.** Многие «пятна», возникающие при вышеописанных отображениях, представляют собой истинные «молекулы-острова», о которых впервые сообщается в [398]. Форма такой молекулы идентична форме всего  $\mu$ -отображения целиком, если не учитывать нелинейного искажения.

**Сепаратор, основания и деревья.** Граница заполненной черной области при  $\lambda$ - и  $\mu$ -отображениях является связной кривой; так как эту кривую обнаружил я, моим долгом было дать ей имя — я назвал ее *сепаратором*  $S$ . Множество внутри ограниченной этой кривой области разбивается на открытые *атомы* (см. текст). Обозначив период атома через  $w$ , определим его *основание* как кривую, на которой значение  $f_w^{*'}(z_\mu)$  вещественно.

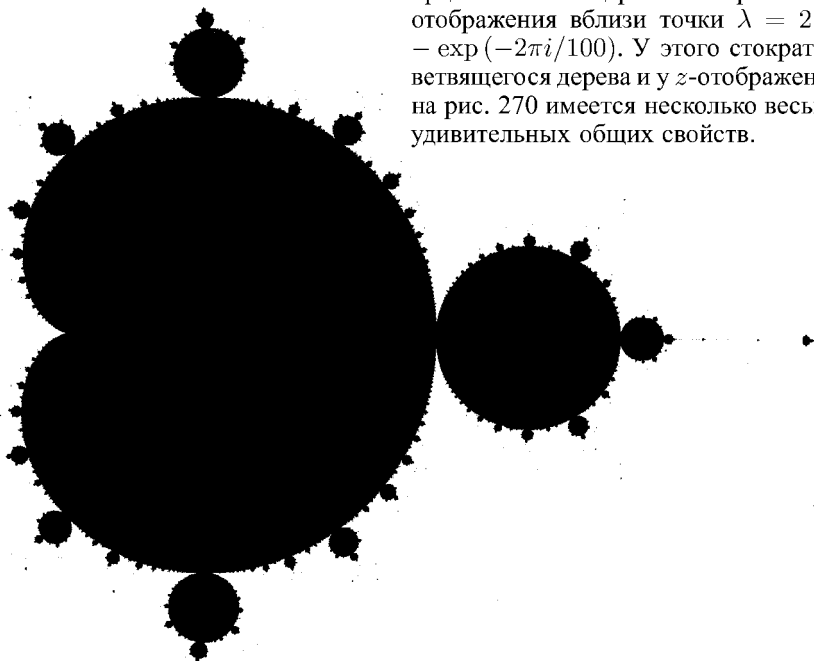
Основания, лежащие на вещественной оси, известны в теории самоотображений как интервал  $[0, 1]$ , а их замыкание — как интервал  $[-2, 4]$ .

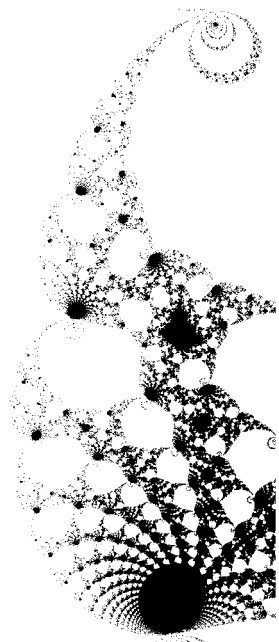
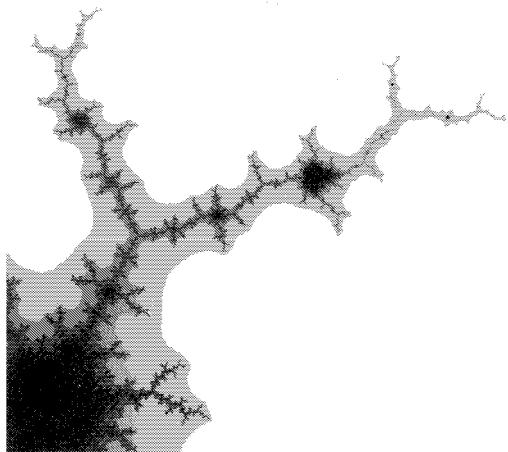
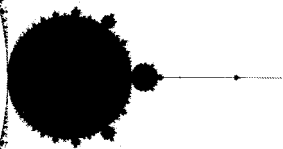
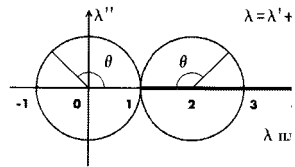
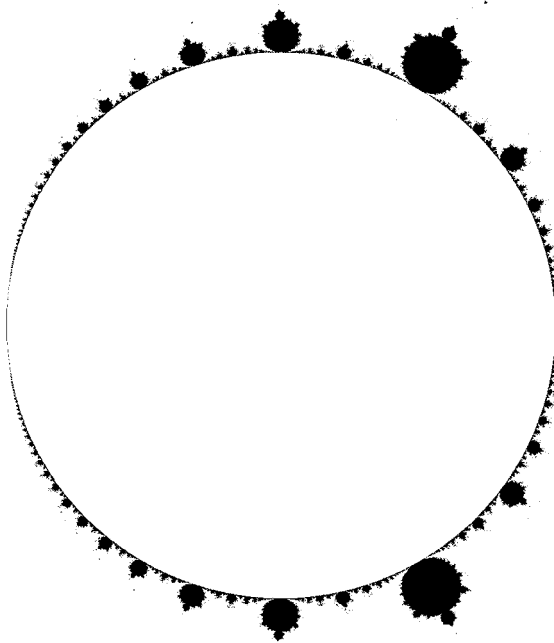


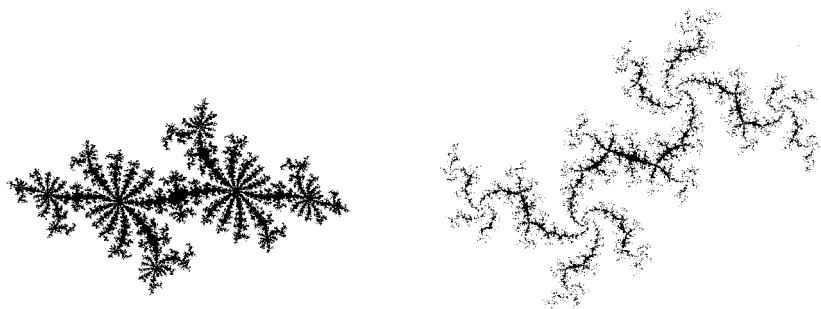
Словом, я обнаружил, что замыкание других атомных оснований разбивается на совокупность деревьев, каждое из которых укореняется на принимающей связи. В каждой точке такого дерева мы имеем несколько степеней ветвления — степень ветвления для концов ветвей плюс порядки бифуркации, ведущей к корню дерева. Кроме того, когда корень дерева приходится на атом-остров, сюда следует добавить порядки бифуркации, ведущей от дисков  $|\lambda - 2| \leq 1$  и  $|\lambda| \leq 1$  к этому атому.

**Рис. 269 (внизу слева).** Здесь представлена подробная картина  $\lambda$ -отображения вблизи точки  $\lambda = 2 - \exp(-2\pi i/3)$ . Множество внутри  $S$  представляет собой предел областей вида  $|f_n(1/2)| < R$ , границами которых являются алгебраические кривые, называемые лемнискатами. Показано несколько таких областей, совмещенных друг с другом. При больших  $n$  области, равно как и само  $\lambda$ -отображение, выглядят несвязными; в действительности, они связны, но вне сетки, использованной при вычислениях.

**Рис. 269 (внизу справа).** Здесь представлена подробная картина  $\lambda$ -отображения вблизи точки  $\lambda = 2 - \exp(-2\pi i/100)$ . У этого стократно ветвящегося дерева и у  $z$ -отображения на рис. 270 имеется несколько весьма удивительных общих свойств. ■



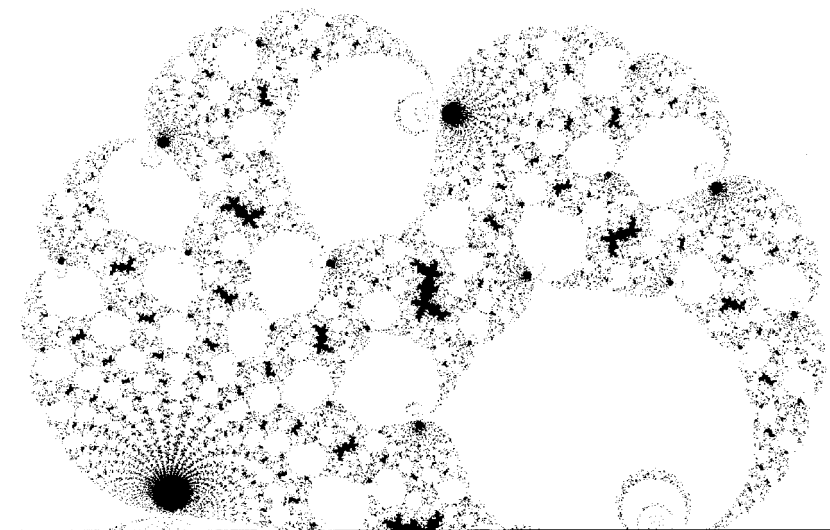


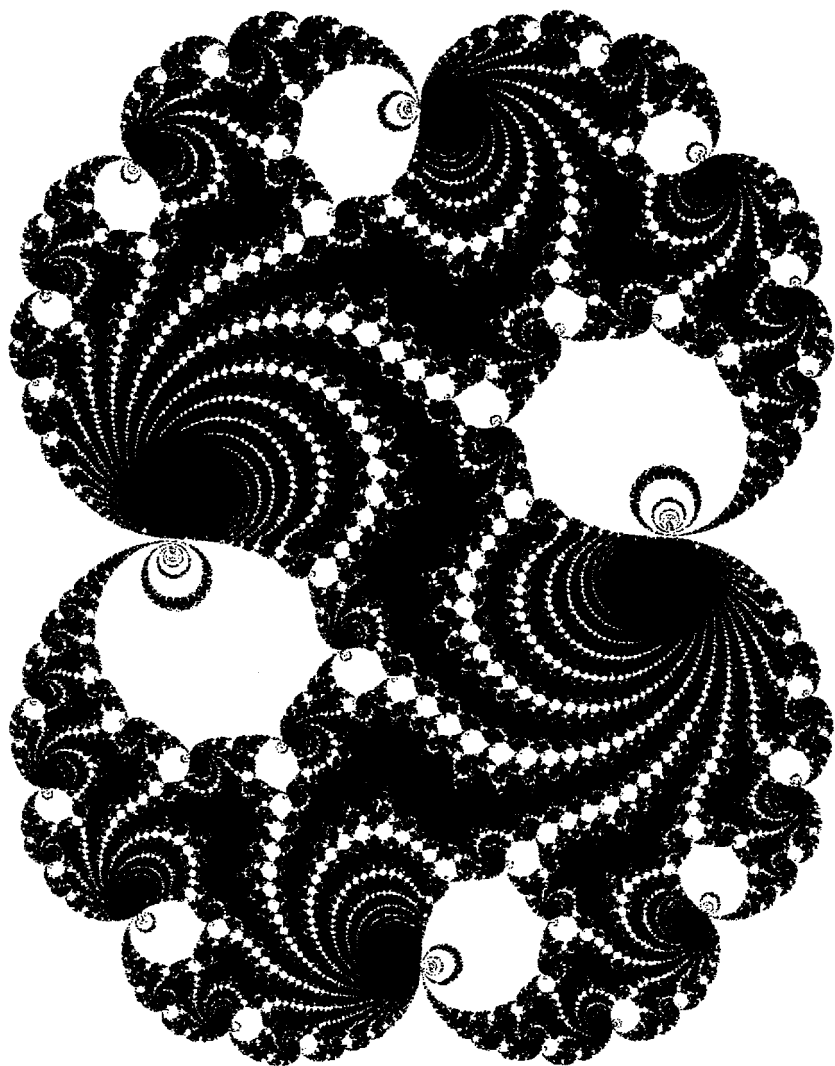


**Рис. 271 и 270. САМОКВАДРИРУЕМЫЕ ДРАКОНЫ;  
ПРИБЛИЖЕНИЕ К «ПРЕДЕЛУ ПЕАНО»**

Каждая самоквадрируемая кривая привлекательна по-своему. Я, например, нахожу самыми привлекательными «драконов», изображенных на этих рисунках и на рис. С5.

**Драконья линька.** Дракон, возводящий сам себя в квадрат, представляет собой совершенно бесподобное зрелище! Чудовищная «лिनька» отделяет бесчисленные складки от кожи на брюхе и спине дракона. Затем она растягивает шкуру на брюхе и спине так, что ее длина — которая, разумеется, и без того бесконечна — увеличивается вдвое! Затем шкура вновь складывается вдоль спины и брюха. И наконец, на последнем этапе, все складки аккуратно водворяются на новые места.





**Фрактальная геральдика.** Не следует путать самоквадрируемых драконов с самоподобным драконом от Хартера и Хейтуэя (рис. 101 и 102). Читателю предоставляется прекрасная возможность развлечься, отыскивая немногие сходные черты и многочисленные различия.

**Последовательные бифуркации.** Наилучшие самоквадрируемые драконы получаются, когда точка  $\lambda$  располагается в отростке (см. рис. 269), который соответствует значению  $\theta/2\pi = m/n$ , где  $m$  и  $n$  — малые целые числа. При бифуркации заданного порядка  $n$  вокруг каждой точки сочленения появляется  $n$  драконьих голов — или хвостов, если хотите. Вторая бифуркация порядка  $m'/n'$  разбивает каждую из этих областей на  $n'$  «сосискообразных» связей и еще более утончает их.

Чтобы получить умеренно упитанного дракона — ни чрезмерно тучного, ни слишком костлявого, — следует поместить точку  $\lambda$  внутри отростка на некотором расстоянии от его корня. Красиво перекрученные драконы получаются, когда точка  $\lambda$  лежит около одного из двух суботростков, соответствующих порядку бифуркации от 4 до 10: один из суботростков дает изгиб влево, другой — вправо.

**Рис. 271 (вверху справа). «Истощенный дракон».** Дракон, испытавший на себе бесконечное число бифуркаций, теряет всю свою плоть и ссыхается в скелетообразную разветвленную кривую.

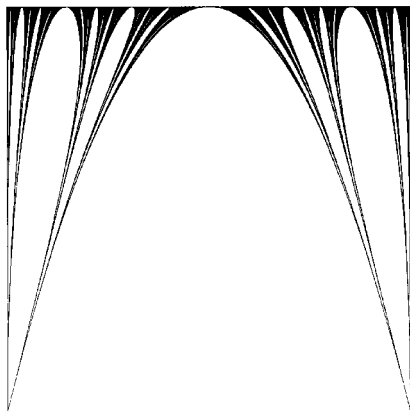
Если множество не расходится в бесконечность, его топологическая размерность равна 0 (для пылевидных множеств Фату), 1 (для недоедающих драконов) и 2 (для всех остальных драконов).

**Рис. 271 (внизу).  $\sigma$ -дракон.** Это множество связно, точка  $\lambda$  лежит на большом «прибрежном острове» с рис. 269 (внизу).

**Рис. 270. Особый предел  $\lambda = 1$ . Драконы Пеано.** Выберем точку  $\lambda$  на острове, расположенном недалеко от связи при  $\theta = 2\pi/n$ . При  $n \rightarrow \infty$  величина  $\theta \rightarrow 0$ ; следовательно,  $\lambda$  стремится к 1. Форма соответствующего дракона неизбежно должна устремиться к форме двустворчатой раковины (образующей основание задранированной фигуры на рис. 266). Однако между  $n = \infty$  и  $n$  очень большим, но конечным, имеется все же качественное различие.

По мере того, как  $n \rightarrow \infty$ , растет число конечностей дракона, его шкура сминается, а ее размерность при этом возрастает. Вся конструкция представляется таким «драконом-отшельником», пытающимся забиться внутрь двустворчатой раковины  $\lambda = 1$  и способным заполнить всю ее внутреннюю область без остатка, т. е. размерность дракона стремится к  $D = 2$ . Что же получается? Самоквадрируемая кривая Пеано? Безусловно; однако, как нам известно из главы 7, кривые Пеано вовсе не являются кривыми. Так происходит и здесь: по достижении размерности  $D = 2$  наш дракон прекращает свое существование в виде кривой и перевоплощается в область плоскости. ■





**Рис. 273. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ САМОКВАДРИРУЕМЫЕ ПЫЛЕВИДНЫЕ МНОЖЕСТВА ФАТУ НА ИНТЕРВАЛЕ  $[0, 1]$**

Работа Фату [139] представляет собой истинный шедевр в рамках того странного литературного жанра, который называется «заметки в «Отчетах» Парижской Академии наук». Задача пишущего в этом жанре часто сводится к тому, чтобы раскрыть по возможности меньше, но при этом создать впечатление, что автор учел все, что только можно было учесть.

Среди прочих восхитительных откровений, которые лучше всего понимаешь только после тщательного самостоятельного изучения, Фату отмечает следующее: когда число  $\lambda$  вещественно и либо  $\lambda > 4$ , либо  $\lambda < -2$ , наибольшее ограниченное множество, остающееся инвариантным при преобразовании  $x \rightarrow f(x) = \lambda x(1-x)$ , представляет собой пыль, заключенную в интервале  $[0, 1]$ . На рисунке показана форма этой пыли при  $\lambda > 4$ . По вертикальной оси откладывается величина  $-4/\lambda$  в интервале от  $-1$  до  $0$ . Черные интервалы отмечают концевые точки трем порядка от 1 до 5. Концевые точки  $x_1$  и  $x_2$  средней тремы являются решениями уравнения  $\lambda x(1-x) = 1$ ; на рисунке они образуют параболу. Тремы второго порядка оканчиваются в точках  $x_{1,1}$ ,  $x_{1,2}$ ,  $x_{2,1}$  и  $x_{2,2}$  — таких, что  $\lambda x_{m,n}(1-x_{m,n}) = x_{m,n}$ , и так далее.

Мне думается, что эта замечательная связь между пылевидными множествами, подобными канторовым, и одной из элементарнейших функций заслуживает самой широкой известности, не ограниченной узким кругом специалистов. ■

## 20 ◊ ФРАКТАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ И ФРАКТАЛЬНЫЕ («ХАОТИЧЕСКИЕ») ЭВОЛЮЦИИ

Эта глава имеет своей целью познакомить читателя с одной теорией, которая развивалась вне всякой связи с фрактальными множествами и все же оказалась буквально пронизана ими. Чаще всего ее называют «теорией странных аттракторов и хаотической (или стохастической) эволюции», однако в тексте главы вы, я надеюсь, найдете причины, побудившие меня дать этой теории новое имя (см. заголовок).

Для того, чтобы попасть в настоящее эссе, упомянутой теории достаточно было всего лишь быть так или иначе связанной с фракталами; я же считаю оправданным посвятить ей целую главу. Первое оправдание (практическое): эта теория почти не требует какого бы то ни было особого представления, так как большую часть ее основных положений можно рассматривать просто как новую интерпретацию выводов, полученных нами в главах 18 и 19.

Во-вторых, теория фрактальных аттракторов помогает — путем противопоставления — прояснить некоторые особенности фрактальной геометрии природы. В самом деле, моя работа связана, в основном, с формами, присутствующими в реальном пространстве, с формами, которые можно увидеть, пусть даже и в микроскоп; теория аттракторов же имеет дело исключительно с эволюцией во времени расположения неких точек в невидимом и абстрактном репрезентативном пространстве.

Особенно силен этот контраст оказывается в контексте турбулентности: перемежаемость турбулентности — моя первая большая тема (работу над ней я начал в 1964 г.), где я использовал ранние формы фрактальных методик и (вполне независимо от них) теорию странных аттракторов, которая вполне всерьез сочетается с изучением турбулентности в работе [505]. До сих пор эти два подхода еще не пересеклись, но ждать осталось недолго.

Тем, кто интересуется социологией науки, несомненно покажется занимательным следующий факт: в то время как мои прецедентные исследования, связывающие математических чудовищ с *реальными* физическими структурами, встречаются с ощутимым сопротивлением, чудовищные формы *абстрактных* аттракторов воспринимаются с завидной невозмутимостью.

Третий довод в пользу необходимости разговора о фрактальных аттракторах связан с тем, что соответствующие эволюции выглядят «хаотическими» или «стохастическими». Как станет ясно из глав 21 и 22, многие ученые сомневаются в уместности применения случайного в науке; теперь же появляется надежда на оправдание случайности с помощью фрактальных аттракторов.

И наконец, те читатели, кто несколько глав (или пару эссе) назад согласился с моим утверждением о том, что многие из природных проявлений могут быть описаны только с помощью неких множеств, считавшихся ранее патологическими, возможно, с нетерпением ожидают перехода от «как» к «почему». Думаю, приведенные ранее описания и демонстрации дают представление о том, как легко в некоторых случаях оказывается подсластить упомянутые в предыдущих главах геометрические пилюли, чтобы их легче было проглотить. Я же хочу привить читателю вкус именно к фракталам — независимо от того, насколько горьким кажется этот вкус большинству зрелых ученых. Кроме того, я искренне убежден (и еще вернусь к этому в главе 42), что псевдообъяснение посредством подслащивания просто-напросто неинтересно. Таким образом, важность объяснения, судя по всему, сильно преувеличена, и мы будем прибегать к нему лишь в тех случаях, когда имеющееся объяснение действительно интересно — как, например, в главе 11. Вдобавок ко всему, я подозреваю, что когда фрактальные аттракторы лягут в основу фрактальной геометрии видимых естественных форм, появится много новых более детальных и убедительных, объяснений.

Так как преобразования с аттракторами *нелинейны*, наблюдаемые фракталы, скорее всего, окажутся *не* самоподобными. Это замечательно: мне кажется, что использование фрактального аналога прямой для описания феноменов, управляемых *нелинейными* уравнениями, выглядит несколько парадоксально. Масштабно-инвариантные фракталы, хорошо объясняющие естественные феномены, могут выступать лишь как локальные приближения нелинейных фракталов.

## ПОНЯТИЕ АТТРАКТОРА

Настоящая глава опирается, по большей части, на одно давнее и весьма основательно позабытое наблюдение Анри Пуанкаре: «орбиты» нелинейных динамических систем имеют свойство притягиваться к странным множествам, которые я определяю как нелинейные фракталы.

Рассмотрим для начала простейший аттрактор — точку. «Орбита», определяемая движением маленького шарика после помещения его в воронку, начинается с некоторой спиралевидной траектории, точная форма которой зависит от исходных положения и скорости шарика, однако в

конце концов сходится к горловине воронки; если диаметр шарика превышает диаметр отверстия воронки, то он там и останется. Для нашего шарика начало горловины воронки является устойчивой точкой равновесия, или устойчивой неподвижной точкой. В рамках достаточно удобной альтернативной описательной терминологии (которую, естественно, не следует интерпретировать с антропоцентрических позиций) горловину воронки можно назвать *притягивающей точкой*, или *аттрактором*.

В физической системе устойчивыми и притягивающими могут быть также окружность или эллипс. Например, мы все полагаем (и даже пламенно надеемся — хотя никто из нас не проживет достаточно долго для того, чтобы это имело хоть какое-то значение), что солнечная система устойчива, подразумевая, что если орбите Земли и суждено претерпеть какие-либо возмущения, то она в конце концов «притянется» назад на свою теперешнюю колею.

В более общем виде, динамическую систему принято определять следующим образом: состояние системы в момент времени  $t$  представляется точкой  $\sigma(t)$  на прямой, в плоскости, либо в некотором более многомерном евклидовом «фазовом пространстве»  $\mathbb{R}^E$ , а ее эволюция между моментами  $t$  и  $t + \Delta t$  определяется правилами, в которые величина  $t$  явным образом не входит. Любую точку в фазовом пространстве можно принять за начальное состояние  $\sigma(0)$  при  $t = 0$ , а за ней последует орбита, определяемая функцией  $\sigma(t)$  для всех  $t > 0$ .

Основное различие между такими системами заключается в геометрическом распределении значений  $\sigma(t)$  при больших значениях  $t$ . Принято говорить, что динамическая система имеет *аттрактор*, если существует некое правильное подмножество  $\mathcal{A}$  фазового пространства  $\mathbb{R}^E$ , обладающее следующим свойством: при почти любой начальной точке  $\sigma(0)$  и достаточно большом  $t$  точка  $\sigma(t)$  оказывается в малой окрестности какой-либо точки, принадлежащей  $\mathcal{A}$ .

## ПОНЯТИЕ РЕПЕЛЛЕРА

Мы можем также поместить наш шарик в положение неустойчивого равновесия — например, на кончике карандаша. Если начальное положение не совпадает в точности с точкой равновесия, то шарик словно отталкивается прочь и достигает состояния устойчивого равновесия где-то в другом месте.

Множество всех положений неустойчивого равновесия (вместе с их предельными точками) называется *отталкивающим множеством*, или *репеллером*.

Во многих случаях аттракторы и репеллеры меняются местами при смене знаков в уравнениях. Имея дело с силой тяжести, достаточно изменить направление ее действия. Рассмотрим, например, в основном

горизонтальную поверхность с прогибами в обоих направлениях. Предположим, что сила тяжести направлена вниз, поместим шарик на верхней стороне поверхности и обозначим притягивающий прогиб буквой  $A$ , а отталкивающий — буквой  $R$ . Если теперь поместить шарик на нижней стороне поверхности и предположить, что сила тяжести направлена вверх, то прогибы  $A$  и  $R$  поменяются местами. В этой главе такие обмены играют центральную роль.

## ФРАКТАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ. «ХАОС»

Большая часть элементарной механики имеет дело с динамическими системами, аттракторами которых являются точки, почти окружности и другие фигуры евклидовой геометрии. Однако в действительности такие фигуры представляют собой редкие исключения, и поведение большинства динамических систем несравнимо более сложно: их аттракторы и репеллеры имеют явную тенденцию к фрактальности. В нескольких следующих разделах описываются примеры систем с дискретным временем,  $\Delta t = 1$ .

**Аттрактор-пыль. Коэффициент Фейгенбаума  $\alpha$ .** Простейший пример можно получить с помощью возведения в квадрат (см. главу 19). В качестве вступления рассмотрим еще одно представление канторовой пыли  $C$ :  $N = 2$ ,  $r < 1/2$ , охватываемый интервал  $[-r/(1-r), r/(1-r)]$ . Такое множество  $C$  является пределом множества  $C_n$ , определяемого как множество точек вида  $\pm r \pm r^2 \pm \dots \pm r^n$ . При  $n \rightarrow n+1$ , каждая точка множества  $C_n$  разделяется на две, а множество  $C$  представляет собой результат бесконечного количества таких бифуркаций.

Согласно П. Грассбергеру (источник — препринт статьи), аттрактор  $A_\lambda$  отображения  $x \rightarrow \lambda x(1-x)$  при вещественных  $\lambda$  аналогичен множеству  $C_n$ , но с двумя различными коэффициентами подобия, одним из которых является коэффициент Фейгенбаума  $1/\alpha \sim 0,3995\dots$  (см. [144]). После бесконечного количества бифуркаций этот аттрактор превращается во фрактальную пыль  $A$  с размерностью  $D \sim 0,538$ .

**«Хаос».** Ни одна точка множества  $A$  за конечный промежуток времени не посещается дважды. Многие авторы описывают эволюции на фрактальных аттракторах как «хаотические».

◁ **Самоаффинные деревья.** Расположив множество  $A_\lambda$  в плоскости  $(x, \lambda)$ , получим дерево. Поскольку  $\delta \sim 4,6692 \neq \alpha$ , это дерево асимптотически самоаффинно с остатком. ►

**Комментарий.** В идеале теории следовало бы сосредоточиться на интересных по своей сути и реалистичных (но простых) динамических системах, аттракторами которых являются подробно изученные фрактальные множества. Имеющаяся же литература по странным аттракторам — пусть даже она чрезвычайно значима — весьма далека от этого

идеала. Рассматриваемые в ней фракталы, как правило, недостаточно хорошо изучены, очень немногие из них действительно интересны, а большинство никак нельзя считать решениями сколь бы то ни было мотивированных задач.

Поэтому я был вынужден самостоятельно изобретать «динамические системы», которые бы поставили новые вопросы — для того, чтобы получить на них давно известные и удобные ответы. Я придумывал задачи таким образом, чтобы их решениями стали знакомые фракталы. Больше всего меня удивляет то, что эти системы оказались еще и интересными.

## САМОИНВЕРСНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Согласно главе 18, множества  $\mathcal{L}$  в цепях Пуанкаре являются как наименьшими самоинверсными, так и предельными множествами. Переформулируем последнее свойство: при произвольно выбранной начальной точке  $P_0$  ее преобразования под действием последовательности инверсий подходят произвольно близко к каждой точке множества  $\mathcal{L}$ . Предположим теперь, что эта последовательность инверсий выбирается посредством отдельного процесса, независимого от настоящего и предыдущего положений точки  $P$ . При довольно широком разбросе начальных условий всегда можно ожидать (и часто эти ожидания оправдываются), что результирующие последовательности положений  $P$  будут притягиваться множеством  $\mathcal{L}$ . Таким образом, огромное количество публикаций по группам, порождаемым инверсиями, можно интерпретировать в терминах динамических систем.

## ОБРАЩЕНИЕ «ВРЕМЕНИ»

Дальнейшие поиски систем с интересными фрактальными аттракторами привели меня к системам, аттракторы которых геометрически стандартны, а вот репеллеры оказываются весьма занятными. Эти два множества легко можно поменять местами, тем самым пустив время вспять, при условии, что операции динамической системы допускают существование обратных операций (орбиты не сливаются и не пересекаются), так что, зная положение точки  $\sigma(t)$ , можно определить все  $\sigma(t')$  при  $t' < t$ . Однако данные конкретные системы, которые мы хотим обратить во времени, представляют собой особый случай. Их орбиты похожи на реки: в направлении вниз по склону их путь однозначно определен, вверх же по склону — каждая развилка требует особого решения.

Попытаемся, например, обратить V-преобразование  $f(x)$ , с помощью которого мы получили канторову пыль в главе 19. При  $x > 1,5$  определены две различные обратные функции, и можно, пожалуй, условиться преобразовывать все  $x > 1,5$  в  $x = 1/2$ . Аналогичным образом, две различные обратные функции имеет отображение  $x \rightarrow \lambda x(1-x)$ .

В обоих случаях осмысленная инверсия предполагает выбор между двумя функциями. В других примерах возможных вариантов больше. Напомню: нам нужно, чтобы выбор между ними осуществлялся посредством отдельного процесса. Эти соображения приводят нас к обобщенным динамическим системам, которые и будут описаны в следующем разделе.

## РАЗЛОЖИМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ [398]

Потребуем, чтобы одна из координат состояния  $\sigma(t)$  (назовем ее *определяющим индексом* и обозначим через  $\sigma^\dagger(t)$ ) эволюционировала независимо от состояния остальных  $E - 1$  координат (обозначим это состояние через  $\sigma^*(t)$ ), при условии, что преобразование из состояния  $\sigma^*(t)$  в состояние  $\sigma^*(t+1)$  будет определяться как состоянием  $\sigma^*(t)$ , так и индексом  $\sigma^\dagger(t)$ . В тех примерах, которые я изучил наиболее подробно, конкретное преобразование  $\sigma^*(t) \rightarrow \sigma^*(t+1)$  выбирается из конечного набора, включающего в себя  $G$  различных возможностей  $\mathcal{I}_g$ , причем выбирается в соответствии со значением некоторой целочисленной функции  $g(t) = \gamma[\sigma^\dagger(t)]$ . Иными словами, я рассматривал динамику произведения  $\sigma^*$ -пространства на некоторое конечное индексное множество.

Вообще говоря, в примерах, стимулировавших это обобщение, последовательность  $g(t)$  либо действительно случайна, либо ведет себя так, словно является случайной. К рассмотрению случайности мы с вами приступим только в следующей главе, однако я не думаю, что это обстоятельство может нам помешать. Гораздо серьезнее другое: динамические системы представляют собой воплощенный образчик полностью детерминированного поведения, и поэтому просто не вправе допускать какую бы то ни было случайность! Мы, однако, можем ввести воздействие случайности, не постулируя ее явно — нам нужно лишь присвоить функции  $g(t)$  значение какого-нибудь в достаточной степени перемешивающего эргодического процесса. Возьмем, например, иррациональное число  $\beta$  и сопоставим функции  $g(t)$  целую часть числа  $\sigma^\dagger(t) = \beta^t \sigma^\dagger(0)$ . Здесь стоило бы сделать еще несколько заявлений, принципиально не сложных, но весьма громоздких, так что я, пожалуй, от этого воздержусь.

## РОЛЬ «СТРАННЫХ» АТТРАКТОРОВ

Сторонники «странных» аттракторов выдвигают в свою защиту следующие два соображения. А). Поскольку динамические системы со стандартными аттракторами не в состоянии объяснить турбулентность, то, может быть, ее удастся объяснить с помощью систем с аттракторами, *топологически* более «странными». (Это напоминает мое собственное

рассуждение (см. главу 11) — высказанное, кстати, совершенно независимо от приведенного — о том, что если дифференциальное уравнение не имеет стандартных особенностей, следует попытаться с особенностями фрактальными.) Б). Аттракторы до смешного простых систем — таких, как  $z \rightarrow \lambda z (1 - z)$  при вещественных  $\lambda$  и  $z$  в интервале  $[0, 1]$  — действительно странный и во многих отношениях характерный для более сложных и более реалистичных систем. Таким образом, топологически странные аттракторы, вне всяких сомнений, являются, скорее, правилом, нежели исключением.

## «ФРАКТАЛЬНЫЕ» ИЛИ «СТРАННЫЕ»?

**Все известные «странные» аттракторы представляют собой фрактальные множества.** Для многих «странных» аттракторов существуют оценки размерности  $D$ . Во всех случаях  $D > D_T$ . Следовательно, эти аттракторы суть не что иное, как фрактальные множества. Во многих случаях размерность  $D$  «странно-аттракторных» фракталов служит мерой не иррегулярности, а того, как накладываются друг на друга гладкие кривые или поверхности — своего рода фрагментации (см. главу 13).

С. Смейл представлял свой знаменитый аттрактор, называемый соленоидом, дважды. Оригинальное определение было чисто топологическим (размерность  $D$  при этом оставалась неопределенной), пересмотренный же вариант имеет метрический характер (см. [527], с. 57). Я, в свою очередь, предложил ввести в теорию странных аттракторов понятие размерности  $D$  и оценил в [392] значение  $D$  для этого пересмотренного варианта. Значение  $D = 2,06$  для аттрактора Зальцмана–Лоренца ( $v = 40$ ,  $\sigma = 16$  и  $b = 4$ ) было получено независимо от меня Я.Г. Синаем и М.Г. Веларде (источник — частная беседа). Это значение больше 2, но не намного, т. е. этот аттрактор определенно не является стандартной поверхностью, но близок к таковой. Мори и Фудзисака [437] подтверждают мое значение  $D$  для аттрактора Смейла и значение  $D$  для аттрактора Зальцмана–Лоренца. Они также нашли размерность  $D$  отображения Энона ( $a = 1,4$ ;  $b = 0,3$ ), которая оказалась равной 1,26. Ожидается появление многих других статей в том же духе.

**Обратное утверждение.** Являются ли все фрактальные аттракторы странными — вопрос семантики. Все больше авторов согласны со мной в том, что *аттрактор, как правило, можно считать странным, если он фрактален*. Мне такое отношение представляется вполне здравым, если учесть, что слово «странный» выступает как синоним слов «чудовищный», «патологический» и других подобных эпитетов, которыми некогда награждали отдельные фрактальные множества.



Однако прилагательному «странный» иногда придается некий особый терминологический смысл  $\triangleleft$  настолько, надо сказать, особый, что аттрактор Зальцмана–Лоренца характеризуется не просто как «странный», но как «странно-странный».  $\blacktriangleright$  В этом свете «странность» аттрактора связывается главным образом с нестандартными *топологическими* свойствами, в то время как нестандартные *фрактальные* свойства просто сопутствуют им в качестве «нагрузки». Замкнутая кривая с двойными точками не является в этом смысле «странной», какой бы смятой она ни была: это значит, что большинство из исследованных мною фрактальных аттракторов нельзя считать странными.

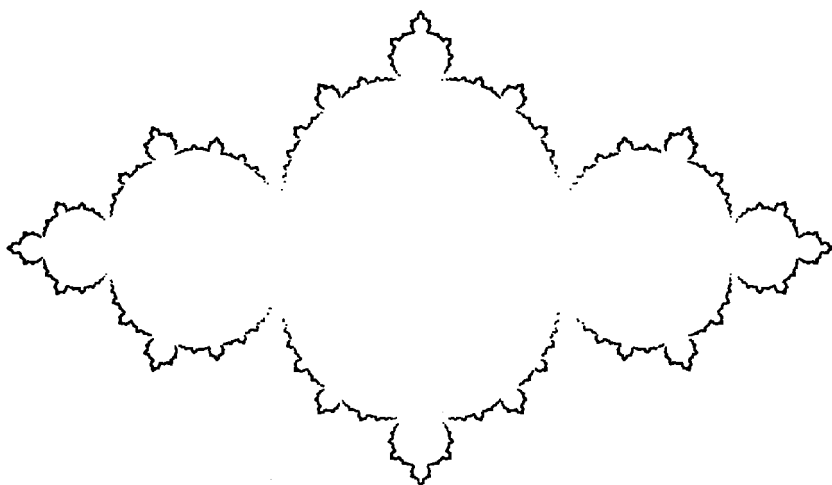
При таком определении термина «странный» рассуждения в предыдущем разделе теряют всякую привлекательность. Однако если модифицировать понятие странности с тем, чтобы оно из топологического стало фрактальным, то эту привлекательность можно вернуть. Вот почему я считаю, что победы в споре достойны те, кто определяет «странное» как «фрактальное». А поскольку они и в самом деле побеждают, я не вижу большого смысла в сохранении термина, необходимость в котором исчезла в тот момент, когда я показал, что фракталы не более странны, чем, скажем, горы или береговые линии. Кроме того, не стану скрывать: к термину «странный» я испытываю какую-то личную неприязнь. ■

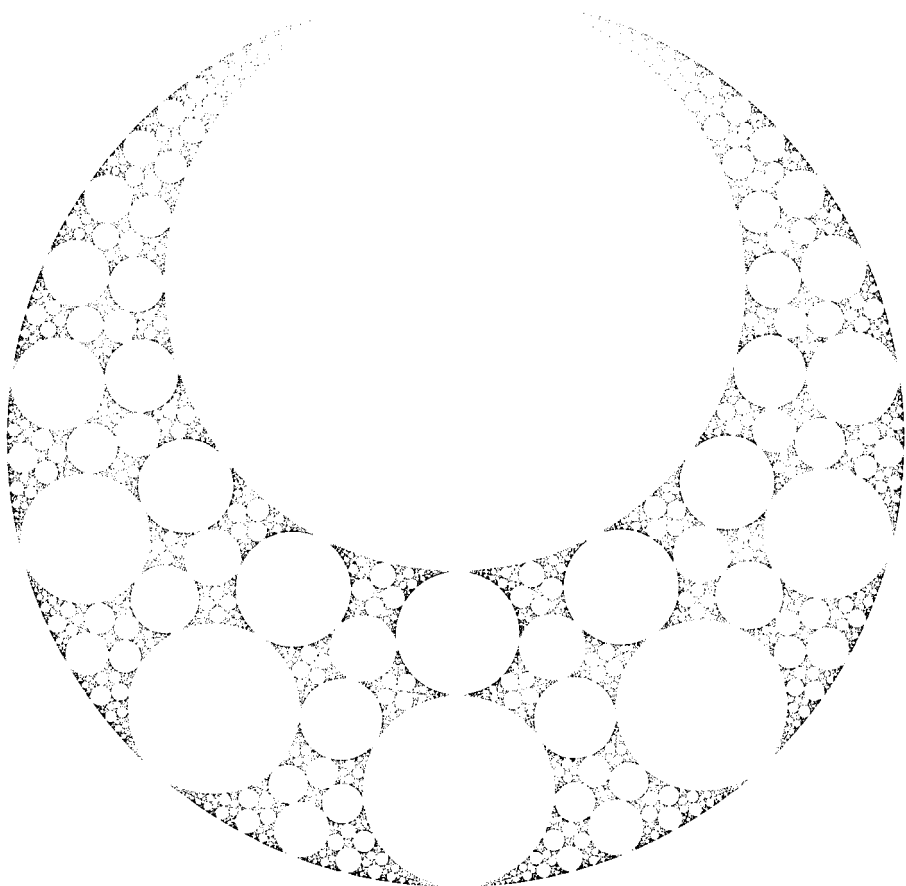
## Рис. 282 и 283. ПРИТЯЖЕНИЕ К ФРАКТАЛАМ

Приведенные здесь фигуры иллюстрируют длинные орбиты последовательных состояний двух разложимых динамических систем. *Нагрудник фараона* на рис. 283 представляет собой самоинверсное (см. главу 18) множество, основанное на четырех инверсиях, подобранных таким образом, чтобы предельное множество  $\mathcal{L}$  являлось совокупностью окружностей. *Дракон Сан-Марко* на рис. 282 — самоквадрируемое (см. главу 19) множество и основан на двух инверсиях отображения  $x \rightarrow 3x(1-x)$ .

Определяющий индекс в этих случаях выбирается из четырех (или, соответственно, двух) возможностей с помощью псевдослучайного алгоритма, примененного 64 000 раз. Несколько первых точек на рисунке опущены.

Области в окрестностях точек заострения и самопересечения заполняются чрезвычайно медленно.





## VII ◊ СЛУЧАЙНОСТЬ

---

### 21 ◊ СЛУЧАЙ КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ СОЗДАНИЯ МОДЕЛЕЙ

Хотя фундаментальные разделы фрактальной геометрии имеют дело исключительно с детерминированными конструкциями, истинный смысл и практическая значимость этих разделов остается неочевидной до тех пор, пока мы не исследуем случайные фракталы. И наоборот, изучение фракталов углубляет понимание природы случайности — по крайней мере, мне так кажется.

Первый довод в пользу введения случайности хорошо знаком любому ученому, и тем не менее он — наряду с прочими, менее общеизвестными замечаниями общего характера — заслуживает отдельного комментария в настоящей главе. В следующей главе нам откроются новые горизонты, и мы убедимся, что введение случайности обусловлено также причинами, специфичными для теории фракталов.

#### $\langle X \rangle$ ОЗНАЧАЕТ ОЖИДАНИЕ, А ВЕРОЯТНОСТЬ ОБОЗНАЧАЕТСЯ СОКРАЩЕНИЕМ $P_r$

Чуть ли не в каждой дисциплине принято свое собственное, отличное от других, обозначение для ожидаемого значения переменной  $X$ . Мы в настоящем эссе будем придерживаться обозначения, принятого у физиков,  $\langle X \rangle$ , преимущество которого заключается в собственных оригинальных скобках.

Пусть дана некая функция  $B(t)$  и ее приращение  $\Delta B(t) = B(t + \Delta t) - B(t)$ . Тогда величину  $\langle \Delta B(t) \rangle$  назовем *дельта-средним*, а величину  $\langle [\Delta B(t) - \langle \Delta B(t) \rangle]^2 \rangle$  — *дельта-дисперсией*.

## СТАНДАРТНАЯ РОЛЬ СЛУЧАЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

Вернемся к вопросу о протяженности побережья Британии. Как бы ни напоминала нам кривая Коха реальные географические карты, у нее есть один большой недостаток, с которым мы в почти неизменном виде сталкиваемся во всех ранних моделях реальных природных феноменов, рассмотренных в настоящем эссе. Ее элементы абсолютно идентичны между собой, а коэффициент самоподобия является частью масштаба и имеет вид  $b^{-k}$ , где  $b$  — целое число, т. е.  $1/3$ ,  $(1/3)^2$  и т. д.

Модель можно усовершенствовать, введя более сложные детерминированные алгоритмы. Такой подход, однако, не только слишком громоздок, но и обречен на неудачу, так как формирование любой береговой линии происходило в течение многих веков под влиянием многочисленных воздействий, которые, разумеется, никто не фиксировал и которые нельзя сейчас восстановить с какой бы то ни было степенью точности. Полное описание подобного процесса — совершенно безнадёжная задача, и такие мысли лучше сразу выбрасывать из головы.

Физики — например, специалисты в теории броуновского движения — знают, как выйти из этого затруднительного положения. Они призывают на помощь статистику. В геоморфологии же без статистики и вовсе не обойтись. В самом деле, на молекулярное движение законы механики оказывают непосредственное влияние, а вот на геоморфологические структуры они влияют через посредство многочисленных и малоизученных факторов. Следовательно, у геоморфолога гораздо быстрее, чем у физика, возникнет искушение забросить подальше надежды на точное описание окружающей действительности и воспользоваться статистическими методами. В других областях, которые мы с вами намерены исследовать, современный уровень знаний о локальных взаимодействиях находится где-то посередине между соответствующими уровнями в физике и геоморфологии.

## В ПОИСКАХ НУЖНОЙ СТЕПЕНИ СЛУЧАЙНОЙ ИРРЕГУЛЯРНОСТИ

Может ли случай быть причиной столь высокой степени иррегулярности, какую мы наблюдаем, скажем, в очертаниях береговых линий? Не только может, но и является; более того, во многих случаях степень случайной иррегулярности *превосходит* всякие разумные пределы. Словом, мы сильно недооцениваем силу случая. Физическая концепция случайности сформирована теориями, в которых случай играет существенную роль лишь на микроскопическом уровне, в то время как на макроскопическом уровне случай теряет всю свою значимость. У нас все будет не так: в масштабно-инвариантных случайных фракталах, о которых пой-

дет речь, важность случая одинаково велика на всех уровнях, включая и макроскопический.

## ПРАГМАТИЧЕСКИЙ ВЗГЛЯД НА СЛУЧАЙНОСТЬ

Взаимоотношения между статистической непредсказуемостью и детерминизмом ставят перед исследователем множество захватывающих вопросов, однако в рамках настоящего эссе мы о них говорить не будем. Вместо этого мы вспомним о первоначальном значении английского словосочетания «at random»<sup>1</sup>, восходящем к временам средневековья, когда упомянутое словосочетание пришло в английский язык из французского. Поговаривают, что фраза «*un cheval á randon*»<sup>2</sup> никак не связана ни с математической аксиоматикой, ни с лошадиной психологией, а означает всего лишь иррегулярное движение, направление которого всадник не в состоянии *предсказать*.

Таким образом, несмотря на то, что случайность продолжает вызывать в людях всевозможные квазиметафизические порывы, в данном эссе нас мало заботит (позаимствуем цитату из Эйнштейна), «играет ли Господь Бог с нами в кости». Теория вероятности — единственный доступный нам математический инструмент, с помощью которого мы можем составить хоть какую-нибудь карту непознанного и неуправляемого. К счастью, инструмент этот чрезвычайно мощен и удобен, хотя порой и норовист.

## ОТ РЕКУРСИВНОСТИ К СЛУЧАЙНОСТИ

Кроме того, теория вероятности отлично сочетается с рекурсивными методами, преобладающими в этом эссе. Иными словами, вторая половина эссе следует за первой без нарушения непрерывности. Мы и далее будем фокусировать наше внимание на прецедентах, обладающих следующей особенностью: и их математическое определение, и графический алгоритм допускают запись в виде некоторой «обрабатывающей программы», содержащей внутреннюю петлю, причем каждый проход этой петли добавляет новые детали к тому, что было получено при предыдущих проходах.

Знакомая нам петля, порождающая троичную кривую Коха, легко представима в виде такой обрабатывающей программы. Однако другие неслучайные фракталы требуют дополнительной «управляющей программы», значимость которой нам следует сейчас подчеркнуть. Ее функции неуклонно — хотя и весьма занятным образом — эволюционируют

<sup>1</sup>Случайным образом, наугад (англ.). — Прим. перев.

<sup>2</sup>Это словосочетание буквально переводится с французского как «лошадь на прогулке». — Прим. перев.

в сторону бóльшего обобщения. Первый этап этой эволюции: некоторые генераторы Коха (как нам известно из пояснения к рис. 79) можно применять в двух вариантах, прямом (S) или обратном (F), то есть их обрабатывающая программа нуждается в каком-нибудь контроллере, который будет сообщать ей перед началом каждой следующей петли, какой генератор применять — S или F. В общем же можно сказать, что различные управляющие последовательности порождают различные фракталы. Следовательно, при каждом последующем выборе величины  $M$  и соответствующей ей размерности  $D$  фрактальная петля с рис. 79 представляет собой в действительности не одну кривую, но бесконечное (счетное) семейство кривых — по одному семейству на каждую управляющую последовательность. Контроллер может либо считывать эту последовательность с какого-нибудь носителя, либо *интерпретировать* некоторую компактную инструкцию вида «чередовать S и F» или «применять на  $k$ -м этапе генератор S (или F), если  $k$ -й знак в десятичной записи числа  $\pi$  является четным (или нечетным)».

## СЛУЧАЙНОСТЬ / ПСЕВДОСЛУЧАЙНОСТЬ

Многие случайные фракталы строятся по точно такой же схеме: интерпретирующий контроллер + процессор. Этот факт часто оказывается неочевиден (иногда с целью создания впечатления большей сложности), однако в рассматриваемых нами прецедентах, определяемых явной рекурсией, он прямо-таки бросается в глаза.

Простейший контроллер называется «последовательность бросков симметричной монеты», однако я никогда его не использовал. Современное компьютерное изобилие предоставляет в наше распоряжение другой контроллер — «генератор случайных чисел». На его вход подается так называемая *затравка* — некоторое целое число с заданным количеством двоичных знаков  $M$ . (Значение  $M$  определяется спецификой используемого оборудования; если ввести меньше, чем  $M$  знаков, то вакантные места заполняются слева нулями.) На выходе контроллера мы получаем некую последовательность из нулей и единиц. При моделировании игры Бернулли каждый знак выступает в роли результата броска симметричной монеты. А игра, состоящая из 1 000 бросков монеты, представляет собой в действительности последовательность из 1 000 отдельных псевдослучайных знаков.

Можно, однако, предположить, что где-то существует большая книга из  $2^{1000}$  страниц, в которой записаны все возможные результаты игры из 1 000 бросков, причем каждый результат на отдельной странице. Таким образом, становится возможным указать любую конкретную игру, просто выбрав соответствующую страницу из этой книги. Параметром случайности в этом случае является номер страницы, т. е. затравка.

Вообще говоря, число на выходе контроллера часто разбивается на цепочки, состоящие из  $A$  целых чисел. Поставив перед каждой такой цепочкой десятичную запятую, получим набор дробей  $U$ , каждая из которых называется «случайной величиной, равномерно распределенной в интервале от 0 до 1».

На выходе генератора реального случайного множества получается не единичная функция или фигура, но этакий «большой портфель» из  $2^A$  страниц, каждая из которых посвящена отдельной фигуре. Номер страницы и здесь выступает в роли затравки.

Затравки одного вида, как и одинаковые семена, порождают схожие структуры. Разумеется, среди семян попадают и дефектные, прорастающие в весьма нетипичные растения, однако мы вполне можем ожидать, что подавляющее большинство растений, полученных из семян одного вида, окажутся похожими в главном, допуская при этом некоторые различия в деталях.

Генератор случайных чисел — поворотный момент в любом моделировании. До него выполняются одинаковые для всех случаев операции, связанные с наведением мостов между теорией чисел и теорией вероятности и никак не зависящие от конкретной программы. Эти операции представляют собой типичные образчики детерминированных преобразований, имитирующих случайность согласно предписаниям теории вероятности. После генерации случайных чисел следуют специфичные для каждого случая шаги, соответствующие целям и задачам данного конкретного моделирования.

Вполне естественным представляется переход от вышеописанных практических материй к полноценной рекурсивной вероятности. Главная перемена при этом заключается в замене дробей с конечным числом знаков вещественными числами. В роли затравок теперь выступают какие-то таинственные «элементарные события», которые в математике вероятности обозначаются буквой  $\omega$ .  $\triangleleft$  Для «интерпретации»  $\omega$  в виде бесконечной последовательности Пейли и Винер [461] предлагают использовать обратную канторову диагонализацию.  $\blacktriangleright$

## ТЩЕТНОЕ ВЗЫВАНИЕ К СЛУЧАЙНОСТИ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ

Из предыдущего раздела можно сделать вывод, что теория случайности *не так уж и сложна*. К сожалению, она и не так проста. Может даже закрасться мысль о том, что для построения модели береговых линий, свободной от недостатков, присущих кривой Коха, но сохраняющей ее достоинства, достаточно случайным образом деформировать различные участки кривой и изменить их размеры, а затем вновь сцепить их вместе в случайном порядке.



Подобное *взывание* к случайности позволительно разве что в предварительных исследованиях, каковым позволением мы вволю попользовались в некоторых ранних главах настоящего эссе. Это не порок, если, конечно, сам факт такого взывания ясно осознается автором и не скрывается от читателя. В некоторых случаях оно даже может быть реализовано при моделировании. В других же случаях одно лишь искусственное насаждение случайности есть не более чем пустой жест. Безусловно, описание правил, которые порождают приемлемые случайные кривые, представляет собой очень нелегкую задачу, так как геометрические множества всегда вложены в пространство. Одним лишь случайным изменением форм, размеров и порядка участков береговой линии можно добиться только получения бесполезного набора элементов, которые никакими стараниями не удастся увязать в цельную картину.

## НЕОГРАНИЧЕННАЯ И САМОГРАНИЧЕННАЯ СЛУЧАЙНОСТЬ

Итак, мы с вами обнаружили неформальный отличительный признак огромной практической значимости. Иногда наш контроллер, управляющий действиями процессора, волен запускать новые циклы, не утруждая себя проверкой результатов предыдущих циклов и не опасаясь при этом какого бы то ни было рассогласования. Можно сказать, что такие модели имеют дело с *неограниченной* формой случайности. В других моделях поздние этапы построения так или иначе ограничены результатами предыдущих этапов, и/или *случайность самоограничена геометрией пространства*.

Поясним это различие на примерах. Возьмем такую несложную задачу из комбинаторики, как построение на плоской решетке некоторого количества  $2n$ -угольников с возможностью самопересечений. Генерацию таких многоугольников вполне можно поручить модели с ничем не ограниченной случайностью. Однако береговые линии самопересекаться *не могут*, и подсчет количества полигональных аппроксимаций береговой линии представляет собой задачу с сильно самоограниченной случайностью — задачу, решение которой до сих пор успешно ускользает и от лучших умов.

Так как задачи, связанные с самоограниченной случайностью, весьма сложны, в настоящем эссе они почти не затронуты (исключение составляет глава 36).

## ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Неравномерная случайная величина  $X$  представляет собой всего лишь значение монотонной неубывающей функции  $x = F^{-1}(u)$ . Обратная функция  $U = F(x)$  называется вероятностью  $\text{Pr}(X < x)$ . (Что

касается разрывов в функциях  $F(x)$  и  $F^{-1}(u)$ , то они требуют очень тщательно продуманных формулировок.)

В главах 6, 13 и 14 мы использовали в рассуждениях выражение  $\text{Nr}(U > u) \propto u^{-D}$ . Его вероятностный аналог  $\text{Pr}(U > u) \propto u^{-D}$  называется гиперболическим распределением и фигурирует во многих последующих главах эссе. Свойство  $\text{Pr}(U > 0) = \infty$  весьма любопытно, но *ни в коем случае* не является поводом для паники. Оно оказывается столь же желательным и легкоусвояемым, как и свойство  $\text{Nr}(U > 0) = \infty$  в главе 13. Обращаться с ним все же следует осторожно, однако технические подробности нас в данный момент не занимают, поэтому мы их опустим.

## ТИПИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ $D$ И $D_T$ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ

Понятие размерности случайного множества несколько отличается от того, к какому мы привыкли. В нашем «большом портфеле», объединяющем некоторую совокупность случайных множеств, каждая страница соответствует какому-либо множеству и, следовательно, имеет собственные значения  $D$  и  $D_T$ , закрепленные именно за данным множеством. Эти значения меняются от одного образца (или страницы) к другому, но во всех рассматриваемых нами случаях их распределение остается простым.

Существует некоторое количество образцов с отклонениями («дефектных семян»), размерность  $D$  которых может принимать какие угодно значения, однако совокупная вероятность их проявления стремится к нулю. Все остальные множества характеризуются некоторым общим значением  $D$ , называемым «почти истинным значением».

Я полагаю, что вышесказанное верно и для  $D_T$ , и надеюсь, что эта тема привлечет внимание математиков.

Почти истинные значения являются во всех отношениях «типичными» для данной совокупности множеств. Например, ожидаемое значение  $D$  оказывается равным почти истинному.

С другой стороны, следует даже в мыслях избегать отождествления этого значения с размерностью некоего «среднего» для данной совокупности множеств. Давайте, к примеру, представим себе картину симметричного случайного блуждания и попробуем определить среднее блуждание. Если оно представляет собой процесс, при котором каждое последующее положение является средним от соответствующих положений всей совокупности блужданий, то такое среднее блуждание «нигде не блуждает»: точке так и не удастся покинуть свое исходное положение. Следовательно,  $D = 0$ ,  $\triangleleft$  тогда как нам известно (см. главу 25), что почти для всех случайных блужданий  $D = 2$   $\blacktriangleright$ . Единственным сред-

ним множеством, которое мы можем признать «безопасным» в смысле размерности, является множество, характеризуемое средним для всей совокупности значением  $D$ ; безопасность этого определения — в его цикличности.

Для оценки размерности  $D$  случайного фрактала стодится любой метод, применимый к случайным фракталам. Следует, однако, помнить о предупреждении, сделанном в главе 13: если часть фрактального множества, заключенная внутри шара радиуса  $R$  с центром внутри множества, стремится обладать мерой («массой»), удовлетворяющей соотношению  $M(R) \propto R^Q$ , то показатель  $Q$  не обязательно является размерностью.



## 22 ◊ УСЛОВНАЯ СТАЦИОНАРНОСТЬ И КОСМОГРАФИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

Пересказывая в предыдущей главе общеизвестные доводы в пользу случайности, я не делал каких-либо различий между стандартными и фрактальными моделями. В стандартные модели рандомизация привносит значительные улучшения, однако и неслучайные модели остаются во многих отношениях вполне приемлемыми. В этой главе я намерен показать, что в действительно рабочей фрактальной модели без случайности не обойтись.

### ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ СДВИГАХ. СИММЕТРИЯ

Для дальнейших рассуждений нам понадобится понятие *симметрии* в его древнем философском смысле. Под симметрией мы будем понимать не «зеркальную» симметрию относительно оси, а сочетание оригинального значения греческого слова *συμμετρία*, которое можно передать как «следствие соразмерности различных составных частей и целого» (см. [590]), и значения, принятого в современной физике, исходя из которого симметрия становится синонимом инвариантности.

Самым существенным недостатком неслучайных фракталов является их недостаточная симметричность. Первые же направленные в их сторону упреки, выраженные в терминологии самых различных наук, указывали на невозможность построить неслучайный фрактал, инвариантный при сдвигах (т. е. стационарный), и, как следствие, на несоответствие неслучайных фракталов космологическому принципу.

Во-вторых, неслучайный фрактал не может быть однородно масштабнo-инвариантным — в том смысле, что он допускает лишь дискретную последовательность коэффициентов подобия вида  $r^k$ .

Проблема образования скоплений галактик настолько важна, что я решил построить наше теперешнее обсуждение именно вокруг нее — это эссе уже во второй раз вносит свой вклад в развитие астрономии.

### КОСМОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Постулат, согласно которому настоящее время и наше положение на Земле не является ни центральным, ни сколько-нибудь особенным,

а законы Природы должны быть одинаковы всегда и везде, называется *космологическим принципом*.

Это утверждение, формализованное А. Эйнштейном и Э. А. Милном (см. [445], с. 157), подробно обсуждается в [43].

## УСИЛЕННЫЙ КОСМОГРАФИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Применяя космологический принцип во всей его первоизданной мощи, можно потребовать, чтобы распределение материи всегда подчинялось *в точности* идентичным законам, независимо от системы отсчета (т. е. от начала координат и координатных осей), в которой производилось наблюдение. Иными словами, распределение должно быть инвариантным при сдвигах.

К выбору названия для этого следствия нужно подойти с должной осторожностью. Поскольку оно относится не столько к теории (*λογος*), сколько к описанию (*γραφη*), и поскольку мы вскоре предложим целый ряд более слабых его версий, представляется разумным определить его как *усиленный космографический принцип*.

Основополагающая идея такого принципа вполне могла бы быть позаимствована из доктрины «ученого незнания» Николая Кузанского (1401–1464): «В каком месте человек находится, то место и полагает центром мироздания»; «Центр мироздания находится везде и, следовательно, нигде; нигде располагаются и его пределы».

## КОСМОГРАФИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Распределение материи, однако, *не* является строго однородным.

Наиболее очевидный ослабленный вариант нашего принципа получается посредством введения случайности (в ее стандартном виде, описанном в предыдущей главе). Теоретики от вероятности называют такой вариант *принципом статистической стационарности*, мы же, согласованности ради, назовем его *однородным статистическим космографическим принципом*. Суть его заключается в следующем: распределение материи следует одинаковым *статистическим* законам, независимо от системы отсчета.

## В ЗАТРУДНИТЕЛЬНОМ ПОЛОЖЕНИИ

Применение вышеупомянутого принципа к кластеризации галактик ставит перед исследователем весьма непростые задачи. Вселенная Фурнье (см. главу 9), разумеется, донельзя неоднородна, но, может быть, есть еще надежда на то, что нам удастся рандомизировать эту модель с тем,

чтобы привести ее в соответствие с однородным статистическим космографическим принципом. Однако для сохранения в неприкосновенности духа модели необходимо, чтобы при рандомизации не пострадало то ее свойство, согласно которому приближительная плотность  $M(R)R^{-3}$  в сфере радиуса  $R$  стремится к 0, когда  $R \rightarrow \infty$ . К сожалению, это свойство и однородный статистический космографический принцип суть вещи несовместимые.

Возникает искушение придать большее значение общему принципу, нежели всего лишь данным, и сделать вывод, что иерархическая кластеризация должна по достижении некоторого конечного верхнего порога прекратиться, т. е. все флуктуации являются локальными по своей протяженности, а общая плотность материи все же отлична от нуля.

Для осуществления этой идеи можно, например, взять бесконечное множество вселенных Фурнье и разбросать их повсюду статистически однородным образом. Еще один вариант, предложенный Р. М. Сонейрой, обсуждается в книге [467].

## УСЛОВНАЯ СТАЦИОНАРНОСТЬ

Я все же полагаю, что однородный статистический космографический принцип, пожалуй, выходит за рамки разумного и желательного и что его следует заменить еще более ослабленной формой (назовем ее *условной*), которая относится не ко *всем* наблюдателям, а только к *материальным*. Астрономы, должно быть, сочли бы такой принцип вполне приемлемым и давно взяли бы его на вооружение, заподозри они, что от него может быть хоть какая-то реальная польза. А польза есть: условная форма не содержит никаких допущений относительно глобальной плотности и признает соотношение  $M(R) \propto R^{D-3}$ .

Попробую теперь выразить свои мысли в менее напористой манере. Известно, что примирить усиленный космографический принцип с тем обстоятельством, что действительное распределение галактик чрезвычайно далеко от однородного, — задача очень сложная, если не вовсе невыполнимая. С одной стороны, если глобальная плотность  $\delta$  материи во Вселенной стремится к нулю, то усиленный космографический принцип, должно быть, неверен. С другой стороны, если величина  $\delta$  мала, но отлична от нуля, то усиленный космографический принцип выполняется асимптотически, хотя в интересующих нас масштабах от него нет никакой пользы. Вы, возможно, захотите держать его про запас, если вас это успокаивает. Возможно также, что вы предпочтете отбросить его совсем во избежание потенциальных недоразумений. Наконец, вы можете удовлетвориться заменой его на другой принцип, который имеет смысл во всех масштабах и независим от того, равна нулю или положительна плотность  $\delta$ . Последний подход предполагает разбиение усиленного космографического принципа на две части.

## УСЛОВНЫЙ КОСМОГРАФИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

**Условное распределение.** В тех случаях, когда начало системы отсчета само является материальной точкой, вероятностное распределение масс называется *условным*.

**Основное космографическое допущение.** Условное распределение масс одинаково для всех удовлетворяющих условию систем отсчета. В частности, масса  $M(R)$ , заключенная внутри шара радиуса  $R$ , является случайной величиной, независимой от системы отсчета.

Формулировка условного космографического принципа звучит совершенно одинаково как для случая  $\delta > 0$ , так и для случая  $\delta = 0$ . Это приятно с эстетической стороны и имеет преимущества со стороны философской, поскольку согласуется с духом современной физики. Разделяя усиленный космографический принцип на две части, мы получаем возможность выдвинуть на первый план утверждение, которое справедливо для всего, что мы можем наблюдать, и не придавать излишнего значения утверждению, которое является не более, чем актом веры, — в лучшем случае, рабочей гипотезой.

## ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ДОПУЩЕНИЕ О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ОБЩЕЙ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИИ

**Вспомогательное космографическое допущение.** Величины

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) R^{-3} \quad \text{и} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \langle M(R) \rangle R^{-3}$$

существуют, почти наверняка равны между собой, положительны и конечны.

## СТАНДАРТНЫЙ СЛУЧАЙ, $\delta > 0$

Статистические законы распределения материи можно формулировать различными способами. Можно воспользоваться при этом абсолютным распределением вероятностей, связанным с произвольной системой отсчета. А можно взять за основу условное распределение вероятностей относительно системы отсчета, центром которой является материальная точка. В том случае, когда вышеупомянутое вспомогательное допущение подтверждается, условное распределение вероятностей выводится из абсолютного с помощью самого обыкновенного правила Байеса. А абсолютную вероятность можно вывести из условной вероятности, найдя среднее из значений последней относительно начал отсчета, однородно распределенных в пространстве.

$\triangleleft$  Начала отсчета, однородно распределенные по всему пространству, обладают, в общей сложности, бесконечной массой. Неусловное распределение можно перенормировать — с тем, чтобы свести его к единице — тогда и только тогда, когда глобальная плотность положительна. См. [352].  $\blacktriangleright$

## НЕСТАНДАРТНЫЙ СЛУЧАЙ, $\delta = 0$

Представим теперь обратную ситуацию — такую, в которой вспомогательное допущение ложно, а точнее, в которой предел  $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) R^{-3}$  обращается в нуль. В этом случае абсолютное распределение вероятностей указывает лишь на то, что некий случайно выбранный шар конечного радиуса  $R$  почти наверняка окажется пустым. А значит тот, кто сидит на выбранной в пространстве случайным образом точке и глазет по сторонам, почти наверняка ничего не увидит. Однако вероятностное распределение масс интересно человеческим существам лишь в той степени, в какой оно объясняет положение дел в реальной Вселенной, где, как известно, масса в нуль *не* обращается, по крайней мере, в окрестности места обитания этих самых существ. *После* того, как событие произошло, абсолютная вероятность именно этого события представляет весьма ограниченный интерес.

Тот факт, что безусловное распределение автоматически пренебрегает подобными случаями, говорит о вопиющей его неадекватности при  $\delta = 0$ . Оно не только не совместно с массой, содержащейся в любом фрактале с размерностью  $D < 3$ , но и не сообщает нам абсолютно ничего, кроме того, что  $\delta = 0$ .

Условное распределение вероятностей, напротив, проводит четкие границы между фракталами с разными фрактальными размерностями, между масштабно-инвариантными и масштабно-неинвариантными фракталами, а также между разными прочими допущениями.

## НЕСТАНДАРТНЫЕ «ПРЕНЕБРЕЖИМЫЕ СОБЫТИЯ»

Нестандартный случай  $\delta = 0$  ставит физика лицом к лицу с двумя событиями. Одним из них, почти неизбежным, *можно* пренебречь; другим же, почти невероятным, не просто *нельзя* пренебречь — его следует тщательно проанализировать на предмет наличия более мелких подсобытий.

Это противопоставление с точностью до наоборот повторяет то, к какому мы все привыкли в нашей повседневной жизни. Среднее число выпадений орла в очень длинной серии бросков симметричной монеты может и не сходиться к половине от общего числа бросков, однако



вероятность такой несходимости очень близка к нулю и *поэтому* совершенно нас не занимает. Если какой-либо вывод статистической механики (например, принцип увеличения энтропии) почти наверное справедлив, то вероятность того, что произойдет нечто противоположное, приближается к нулю, и *поэтому* ею можно пренебречь. Очевидно, что под тем, что следует после «*поэтому*» в двух предыдущих предложениях, подразумевается нечто полностью противоположное тому, что намерен предпринять в космографии я.

## ВО ИЗБЕЖАНИЕ СТРАТИФИКАЦИИ

Следующая форма симметрии касается преобразования подобия. В том случае, когда элементы неслучайного фрактала на каждом этапе его построения уменьшаются в  $r$  раз, допустимые коэффициенты подобия имеют вид  $r^k$ . Если же значение  $r$  на каждом этапе меняется ( $r_1, r_2, \dots$ ), выбор допустимых общих коэффициентов подобия оказывается более широк, однако до полной свободы этому выбору еще очень далеко.

Иными словами, неслучайные фракталы являют собой воплощение понятия сильно иерархической структуры; подобные множества я предпочитаю обозначать термином *сильно стратифицированные*. Некоторые из стратифицированных моделей пришлись по душе физикам, поскольку такие модели очень удобны в смысле вычислений. С точки же зрения философии это свойство представляется весьма неприятным; что же касается галактик, то нет никаких прямых свидетельств, подтверждающих существование таких стратифицированных скоплений. Вот почему повсюду слышится призывы (особенно в [104]) к «распространению идей Шарлье на квазинепрерывные модели флуктуаций плотности с целью разработать замену для чрезмерно упрощенной оригинальной дискретной иерархической модели».

Это пожелание невозможно удовлетворить с помощью неслучайных фракталов, а вот случайным фракталам оно вполне по силам, что я и намерен продемонстрировать.

## НЕСТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ УСЛОВНО-КОСМОГРАФИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МИРЫ

Как я уже указывал, астрономы вряд ли стали бы *a priori* возражать против идеи условности, и будь за ней признаны хоть какие-нибудь достойные внимания следствия, идея эта вскоре превратилась бы в банальность и общее место. Я берусь доказать, что идея условности представляет собой не просто формальное уточнение принципа, а его подлинное

обобщение — именно с этой целью я столь подробно описываю в главах с 32 по 35 некие конструкции, обладающие следующими свойствами:

- Они индуцируют нулевую глобальную плотность.
- Они удовлетворяют условному статистическому космографическому принципу.
- Они не удовлетворяют никакой другой форме космографического принципа.
- Они масштабно-инвариантны при любом значении  $r$ .
- По своей конструкции они не являются стратифицированными, однако индуцируют кажущуюся иерархическую структуру как следствие размерности  $D < 2$ .
- Наконец, они согласуются с количественными данными.

Всеми этими свойствами, кроме последнего, обладает любая из моих моделей. Что касается количественного согласования, то при продвижении от главы 32 к главе 35 оно демонстрирует несомненную тенденцию к улучшению. Таким образом, стоит лишь расположить мои модели наиболее естественным образом, т. е. в порядке возрастания их сложности, и мы получим ряд со все более точным согласованием с наилучшими из имеющихся анализов экспериментальных данных.

## АНОНС

Поприветствовав таким образом прекраснейшие виды, открываемые нашему изумленному взору совершенно рандомизированными фракталами, мы сдержим наш порыв и не устремимся немедленно к созерцанию этих моделей, поскольку они встретят нас кое-какими математическими сложностями, к которым мы еще не готовы. В процессе подготовки неплохо было бы просмотреть главы с 23 по 30, в которых я обещаю держаться вблизи сравнительно знакомых нам вероятностных берегов.



## VIII $\diamond$ СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФРАКТАЛЫ

---

### 23 $\diamond$ СЛУЧАЙНЫЙ ТВОРОГ: КОНТАКТНЫЕ КЛАСТЕРЫ И ФРАКТАЛЬНАЯ ПЕРКОЛЯЦИЯ

В этой группе глав мы поговорим о том, как с помощью различных, порой до смешного простых, приемов можно получить весьма эффективные случайные фракталы. Предметом главы 23 является рандомизация створаживания — процедура, используемая для приблизительного построения канторовой модели шума (см. главу 8), модели распределения галактик на основе пространственной канторовой пыли (см. главу 9), модели турбулентной перемежаемости (см. главу 10) и т. п. Глава 24 посвящена в основном представлению моих сквиг-кривых — нового рандомизированного варианта кривой Коха. В главе 25 мы коснемся броуновского движения, а в главе 26 определим другие фракталы со «случайным срединным смещением».

Вынесенный в заголовок этой группы глав термин «стратифицированный» (иначе — расслоенный, от латинского *strata* «слой») означает, что во всех рассматриваемых прецедентах мы будем иметь дело с фракталами, построенными посредством наложения друг на друга слоев, причем каждый из последующих слоев дает более мелкие по сравнению с предыдущим детали. Во многих случаях слои располагаются в иерархической последовательности. Вообще говоря, до сих пор мы изучали исключительно стратифицированные фракталы, пусть никто об этом прямо и не говорил. Однако в последующих главах мы убедимся в том, что случайные фракталы отнюдь не обязаны быть стратифицированными.

Фракталы в данной главе строятся на сетке или решетке, составленной из интервалов, квадратов или кубов, каждый из которых делится на  $b^E$  подынтервалов, подквадратов или подкубов ( $b$  — решеточная база).

## РАНДОМИЗИРОВАННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ПЫЛЬ

Построение простейшей случайной пыли, способной усовершенствовать канторову модель ошибок при передаче (см. главу 8), начинается с простейшей формы канторова створаживания: с решетки интервалов с базой  $b$  и некторого целого числа  $N < b$ . Однако вместо одного конкретного генератора нам предлагается список всех возможных канторовых генераторов, т. е. всех различных рядов, состоящих из  $N$  **заполненных** и  $b - N$  **пустых** промежутков. На каждом этапе построения случайным образом и с одинаковой вероятностью выбирается один из этих генераторов.

Любая принадлежащая творогу точка  $P$  определяется последовательностью вложенных «предтворожных» интервалов с длинами  $R_k = b^{-k}$ . Если общая исходная масса равна 1, то каждый предтворог содержит одинаковую массу  $R_k^D$ . Масса, содержащаяся в интервале длины  $2R_k$  с центром в точке  $P$ , равна произведению  $R_k^D$  на некоторую случайную величину, лежащую в интервале от 1 до 2 и не зависящую от  $k$ .

Заметим, что размерность  $D$  ограничена последовательностью  $\ln(b-1)/\ln b, \ln(b-2)/\ln b, \dots$ . Это ограничение часто причиняет неудобства. Что более важно, вышеприведенное определение створаживания сложно реализуется в компьютерной программе и вообще плохо поддается аналитическим манипуляциям. Так как главное достоинство модели створаживания заключается в ее простоте, более предпочтительным, очевидно, окажется альтернативное определение, которое мы дадим в последующих разделах. Во избежание путаницы будем называть определение, приведенное в этом разделе, *ограниченным* (в [378] я предлагал иной термин: *микрочаноническое* определение).

## СТВОРОЖЕННАЯ СЛУЧАЙНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ПЫЛЬ

Более удобное определение створаживания (предложенное в [378], где я называю его *каноническим*) можно получить с помощью последовательности случайных двоичных выборов, каждый из которых определяется простым броском монеты. Бросок монеты на первом этапе решает последующую судьбу каждого из  $b$  подынтервалов. Если выпадает орел (событие с вероятностью  $p < 1$ ), то данный подынтервал «выживает» как часть предтворога; в противном случае мы с ним больше не встретимся. Изолированные точки, остающиеся между «мертвыми» подынтервалами любой длины, после каждого этапа стираются. Здесь, конечно, от них вреда немного, однако их плоскостные или пространственные аналоги (изолированные линии и т. д.) порождают в множестве ложную связность. Ожидаемое количество выживших подынтервалов

равно  $\langle N \rangle = pb = p/r$ . Далее процесс возобновляется, причем каждый подынтервал обрабатывается независимо от других.

**Формализм процесса рождения.** Если назвать подынтервалы «детьми», а весь каскад — «семьей», то сразу станет ясно, что распределение количества детей определяется известным процессом рождения и гибели (см. [196]).

Фундаментальным следствием этого наблюдения является существование для величины  $\langle N \rangle$  критического значения: этот факт был открыт в 1845 году Иренеом Бьянемé (см. [212]) и вполне заслуженно называется эффектом Бьянеме.

Значение  $\langle N \rangle = 1$  является *критическим* в том смысле, что количество  $N(m)$  наличествующих в  $m$ -м поколении отпрысков ставит нас перед очень простой альтернативой. Если  $\langle N \rangle \leq 1$ , то семейство почти наверняка вымрет, и в настоящей интерпретации это означает, что каскад даст в конце концов пустое множество. Если же  $\langle N \rangle > 1$ , то генеалогическая линия каждого творога имеет ненулевую вероятность продолжиться на бесконечное число поколений. В этом случае случайное створаживание дает в пределе случайную линейную пыль.

**Смысл размерности подобия.** Так как отношение  $\ln N(m)/\ln(1/r)$  здесь изменяется случайным образом, понятие размерности подобия требует переосмысления. Из почти истинного соотношения

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln N(m)/\ln(1/r^m) = \ln \langle N \rangle / \ln(1/r)$$

можно предположить, что обобщенная размерность подобия выглядит следующим образом:

$$D^* = \ln \langle N \rangle / \ln(1/r) = E - \ln p / \ln r.$$

При таком определении  $D^*$  условие существования непустого предельного множества  $\langle N \rangle > 1$  принимает весьма логичный вид:  $D^* > 0$ . Если  $D^* > 0$ , то  $D = D^*$ . Если же мы формально применим эту формулу к случаю  $\langle N \rangle \leq 1$ , то получим  $D \leq 0$ , однако фактически размерность  $D$  пустого множества всегда равна 0.

## ВЛОЖЕННЫЕ ТВОРОГИ С УМЕНЬШАЮЩЕЙСЯ РАЗМЕРНОСТЬЮ $D$

Построим последовательность случайных творогов с уменьшающейся размерностью  $D$ , каждый из которых вложен в предыдущий.

Предварительный этап *не* зависит от величины  $D$  и заключается в присвоении каждому вихрю (неважно, какого порядка) некоторого

случайного числа  $U$  из интервала от 0 до 1. Из главы 21 нам известно, что все эти числа, взятые в совокупности, эквивалентны одному-единственному числу, которое служит мерой вклада случайности в данный процесс. Далее выбираем значение  $D$  и определяем из последней записанной нами формулы порог вероятности  $p$ . Наконец, происходит собственно створаживание посредством, если можно так выразиться, процесса «фрактальной децимации»<sup>1</sup>. При  $U > p$  вихрь «умирает», переходя в простоквашу и унося с собой все свои субвихри. Если же  $U \leq p$ , то вихрь можно считать выжившим и готовым к дальнейшему створаживанию.

Этот метод позволяет представлять все характеристики творога, простокваши и всех остальных интересующих нас множеств в виде функций от непрерывно изменяющейся размерности. Достаточно зафиксировать случайные числа  $U$ , уменьшая при этом значение  $p$  от 1 до 0, и мы получим размерность  $D$ , уменьшающуюся от 3 до 0.

Пусть даны твороги  $Q_1$  и  $Q_2$ , соответствующие вероятностям  $p_1$  и  $p_2 < p_1$  и имеющие размерности  $D_1$  и  $D_2 < D_1$ . Тогда преобразование  $Q_1$  в  $Q_2 \subset Q_1$  можно назвать «относительной фрактальной децимацией» и охарактеризовать относительной вероятностью  $p_2/p_1$  и относительной размерностью  $D_2 - D_1$ . Для того, чтобы произвести относительную децимацию вручную, следует разыскать вихри со стороной  $1/b$ , принадлежащие множеству  $Q_1$ , и определить их дальнейшую жизнь вероятностью  $p_2/p_1$ . Затем поступаем аналогичным образом с выжившими вихрями (длина стороны  $1/b^2$ ) и т. д. Относительные вероятности в получающемся путем последовательных децимаций ряду  $Q_1, Q_2, \dots, Q_g$  перемножаются, а относительные размерности складываются... до тех пор, пока значение суммы не становится отрицательным, а множество  $Q$  — пустым.

## СТВОРАЖИВАНИЕ ГАЛАКТИК ПО ХОЙЛУ

У ограниченного створаживания имеется пространственный аналог, который можно использовать при геометрической реализации твoroжной модели распределения галактик, предложенной Хойлом (см. рис. 310 и 311).

## СТВОРАЖИВАНИЕ В МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО РАССЕЯНИЯ НОВИКОВА – СТЮАРТА

Пространственное случайное створаживание можно наблюдать и в одной очень ранней модели перемежаемости турбулентности. Новиков и Стюарт [451] предполагают, что пространственное распределение

<sup>1</sup>Децимация (от лат. *decimatio*) — казнь (или иное наказание) одного из десяти человек (например, в случае ненахождения виновного, либо для устрашения врага). — *Прим. перев.*

рассеяния генерируется каскадным процессом: в начале каждого этапа берется предтворог предыдущего этапа и створаживается дальше, давая в результате  $N$  меньших в  $r$  раз частей. См. рис. 312–315.

Эта модель очень приближительна, она даже грубее модели, предложенной в [21] для описания определенных избыточных шумов (см. главы 8 и 31). Она почти не привлекла к себе сколько-нибудь благожелательного внимания, ее никто не исследовал и не разрабатывал. Однако такое пренебрежительное отношение лишено всяких оснований. Мои исследования показывают, что в створаживании, согласно этой модели, уже присутствовали многие черты, характерные для более совершенных и более сложных современных моделей.

**Сыр.** Образ, стоящий за термином *створаживание* (равно как и за термином *сыворотка*, обозначающим дополнение творожного множества), не следует, разумеется, воспринимать буквально, однако известно, что образование реального сыра может быть вызвано биохимической нестабильностью — точно так же, как створаживание Новикова–Стюарта происходит, согласно предположению, вследствие нестабильности гидродинамической. Как бы то ни было, непровержимых данных в пользу того, что какой-нибудь съедобный сыр может оказаться, ко всему прочему, еще и фрактальным, у меня нет.

## СЛЕДСТВИЯ «ПРОМЕЖУТОЧНОСТИ» СЛУЧАЙНОГО ТВОРОГА

Известно, что в трехмерном пространстве стандартные фигуры с размерностью  $D < 3$  (точки, линии и поверхности) имеют нулевой объем. Это верно и для случайного творога.

Площадь предтворогов также ведет себя довольно просто. При  $D > 2$  она стремится к бесконечности, а при  $D < 2$  — к нулю. При  $D = 2$  створаживание практически не изменяет величину площади.

Аналогичным образом, по мере того, как  $m \rightarrow \infty$ , суммарная длина краев предтворогов стремится к бесконечности при  $D > 1$  и к нулю при  $D < 1$ .

Эти свойства можно считать еще одним подтверждением того, что творог с фрактальной размерностью, заключенной в интервале  $2 < D < 3$ , представляет собой нечто среднее между обычной поверхностью и объемной фигурой.

◁ **Доказательства.** Самым простым оказывается доказательство для случая ограниченного створаживания. Объем  $m$ -го предтворога равен  $L^3 r^{3m} N^m = L^3 (r^{3-D})^m$ , и величина эта стремится к нулю по мере уменьшения внутреннего масштаба  $\eta = r^m$ . Что касается площади, то

случай  $D < 2$  устанавливается по верхнему пределу. Площадь предвторого  $m$ -го порядка не может превышать суммы площадей соответствующих вихрей, так как упомянутая сумма включает в себя те стороны субвихрей, которые, являясь общими для соседних второго, нейтрализуют одна другую. Поскольку площадь каждого вихря  $m$ -го порядка составляет  $6L^2r^{2m}$ , их общая площадь не может превышать  $6L^2r^{2m}N^m = 6L^2(r^{2-D})^m$ . При  $D < 2$  верхний предел стремится к нулю по мере того, как  $m \rightarrow \infty$ , что доказывает наше утверждение. В случае  $D > 2$  мы можем получить нижний предел, отметив, что объединение вихрей  $m$ -го порядка, содержащихся в предвтором  $m$ -го порядка, включает в себя, по крайней мере, один квадрат с длиной стороны  $r^m$  и площадью  $r^{2m}$ , каковой квадрат достается нам в наследство от предвторого  $(m-1)$ -го порядка и никак не может быть стерт. Следовательно, общая площадь не может быть меньше, чем  $L^2r^{2m}N^{m-1} = (L^2/N)(r^{2-D})^m$ , а эта величина стремится к бесконечности вместе с  $m$ . Наконец, при  $D = 2$  оба предела оказываются конечными и положительными.  $\blacktriangleright$

## РАЗМЕРНОСТЬ $D$ ФРАКТАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ: ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ КОРАЗМЕРНОСТЕЙ

Наша следующая тема уже неоднократно упоминалась ранее. И вот теперь мы созрели для того, чтобы рассмотреть ее в полном и явном виде на примере одного особого случая.

Для начала припомним следующее стандартное свойство евклидовой геометрии плоскости: если размерность  $D$  некоторой фигуры удовлетворяет условию  $D \geq 1$ , то сечение этой фигуры прямой (если оно не пусто) «обычно» имеет размерность  $D - 1$ . Например, непустое линейное сечение квадрата ( $D = 2$ ) представляет собой отрезок с размерностью  $1 = 2 - 1$ . А линейное сечение прямой ( $D = 1$ ) — это точка (размерность  $0 = 1 - 1$ ), за исключением случая, когда обе прямые совпадают.

Стандартные геометрические правила, определяющие поведение размерности при пересечении, можно свести к следующему, более общему, виду: если сумма коразмерностей  $C = E - D$  меньше  $E$ , то эта сумма является коразмерностью типического пересечения; в противном случае пересечение, как правило, оказывается пустым. (Я приглашаю читателя самостоятельно проверить справедливость данного утверждения для различных пространственных конфигураций плоскостей и прямых.)

Упомянутое правило, к счастью, распространяется и на фрактальные размерности. Благодаря этому обстоятельству многие относящиеся к фракталам рассуждения становятся гораздо более простыми, чем можно было опасаться. Не следует, однако, забывать и о многочисленных исключениях из правила. Так, в частности, в главе 14 мы наблюдали,



что при пересечении неслучайного фрактала  $\mathcal{J}$  особым образом расположенной прямой или плоскостью далеко не всегда можно вывести размерность получающегося сечения из размерности фрактала  $\mathcal{J}$ . Случайные фракталы в этом смысле заметно проще.

## РАЗМЕРНОСТЬ $D$ СЕЧЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ТВОРОГОВ

Для доказательства применимости этого фундаментального правила к фрактальному творогу рассмотрим следы (квадраты и интервалы), оставляемые вихрями и субвихрями каскада створаживания на поверхности либо на краю исходного вихря со стороной  $L$ . На каждом этапе каскада каждый участок предтворога замещается некоторым количеством меньших участков, причем количество это определяется процессом рождения и гибели. Обозначим количество «отпрысков»  $m$ -го поколения, расположенных вдоль края исходного вихря, через  $N_1(m)$ . Классические выводы, уже использованные ранее в этой главе, показывают, что величина  $N_1(m)$  не оставляет нам богатого выбора. Если  $\langle N_1 \rangle = Nr^2 \leq 1$  (т. е.  $D \leq 2$ ), то можно быть почти уверенным, что семейство в конце концов вымирает, иными словами край вихря становится пустым, а размерность его, как следствие, равной нулю. Если же  $\langle N_1 \rangle > 1$  (т. е.  $D > 2$ ), то генеалогическая линия каждого края имеет, напротив, ненулевую вероятность продолжиться на бесконечное число поколений. Размерность подобия в этом случае равна  $D - 2$  согласно следующему почти всегда верному соотношению:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln N_1(m) / \ln(1/r^m) = \ln \langle N_1 \rangle / \ln(1/r) = D - 2.$$

К двумерным следам вихрей применимы те же рассуждения, только нужно заменить величину  $N_1$  на некоторую случайную величину  $N_2$  — такую, что  $\langle N_2 \rangle = Nr$ . Если  $\langle N_2 \rangle \leq 1$  (т. е.  $D \leq 1$ ), то поверхность каждого вихря становится в конце концов пустой. Если же  $\langle N_2 \rangle > 1$  (т. е.  $D > 1$ ), то размерность подобия равна  $D - 1$  согласно следующему почти всегда верному соотношению:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ln N_2(m) / \ln(1/r^m) = \ln \langle N_2 \rangle / \ln(1/r) = D - 1.$$

При ограниченном створаживании результаты остаются такими же.

Тождественность поведения фрактальной и евклидовой размерностей при пересечении подтверждается и следующим наблюдением: при пересечении нескольких створоженных фракталов, носителем которых является одна и та же решетка, а размерности равны, соответственно,  $D_m$ , выполняется равенство  $E - D = \sum (E - D_m)$ .

## ТОПОЛОГИЯ ТВОРОГА: КЛАСТЕРЫ

Рискуя показаться занудным, все же позволю себе повториться: фундаментальные неравенства —  $D < 2$  для галактик (глава 9) и  $D > 2$  для турбулентности (глава 10) — являются не топологическими, но фрактальными.

При неслучайном створаживании в  $E \geq 2$  (см. главы 13 и 14) топология предельного множества однозначно определяется выбранным в начале процесса генератором. Любой ковер Серпинского ( $D > D_T = 1$ ) представляет собой плоский связный творог, а любая губка ( $D > D_T = 1$ ) или пена ( $D > D_T = 2$ ) — пространственный связный творог. Остальные твороги — это либо  $\sigma$ -кластеры, либо пыли. Таким образом, при  $E = 3$  и  $D > 2$  (т.е. в тех случаях, которые интересуют исследователей турбулентности) неслучайный каскад может привести либо к  $D_T = 0$  (пыль), либо к  $D_T = 1$  (кривые или  $\sigma$ -кривые), либо к  $D_T = 2$  (поверхности или  $\sigma$ -поверхности). Когда же  $E = 3$ , а  $D < 2$  (этими случаями, как правило, занимается астрономия), топологическая размерность  $D_T$  может быть равна либо 0, либо 1.

Случайное же створаживание использует статистически смешанный генератор; о топологии предельного множества в этом случае можно говорить лишь «почти наверняка» (см. конец главы 21). Сама неточность такого створаживания делает его настолько простым, что существенным становится тщательно исследовать имеющиеся в нем на этот счет предсказания. Наше теперешнее знание складывается из доказанных фактов и выведенных из косвенных свидетельств умозаключений.

**Критические размерности.** Топологическая размерность  $D_T$  творага дискретно изменяется, когда значение  $D$  пересекает определенные критические пороги, которые мы будем обозначать как  $D_{\text{крит}}$ ,  $D_{2\text{крит}}$ , ...,  $D_{(E-1)\text{крит}}$ . Иными словами, почти невозможно встретить смешанный творог, т.е. такой, который состоял бы из отдельных частей с различной размерностью  $D_T$ .

Порог  $D_{\text{крит}}$  — самый важный. Он, кроме того, является верхним пределом для тех значений  $D$ , при которых данный творог почти наверняка представляет собой пыль, а также нижним пределом для тех значений  $D$ , при которых данный творог почти наверняка распадается на бесконечное количество непересекающихся участков, каждый из которых представляет собой связное множество. По причинам, изложенным в главе 13, эти участки называются контактными кластерами.

Следующий порог,  $D_{2\text{крит}}$ , отделяет значения  $D$ , при которых творог представляет собой  $\sigma$ -кривую, от тех, при которых он становится  $\sigma$ -поверхностью, и т.д. Если (или когда) мы всерьез займемся исследованием топологии сыворотки, она, вполне возможно, одарит нас новыми критическими порогами.

**Размерность кластеров.** Когда  $D > D_{\text{крит}}$ , фрактальная размерность контактных кластеров  $D_c < D$ . По мере уменьшения значения  $D$  от  $E$  до  $D_{\text{крит}}$  размерность кластеров  $D_c$  сначала уменьшается от  $E$  до некоторого  $D_{c \text{ min}}$ , а затем резко падает до нуля.

**Распределение размеров кластеров.** Распределения  $\text{Pr}(\Lambda > \lambda)$ ,  $\text{Pr}(A > a)$  и т.д. можно получить путем простой замены  $\text{Ng}$  на  $\text{Pr}$  в соответствующих формулах главы 13.

**Пределы для  $D_{\text{крит}}$  и  $D_{2 \text{ крит}}$ .** Очевидно, что  $D_{\text{крит}} \geq 1$  и  $D_{2 \text{ крит}} \geq 2$ . В следующем разделе доказывается, что для порога  $D_{\text{крит}}$  существует верхний предел, меньший  $E$ , из чего можно заключить, что вышеприведенные определения и в самом деле имеют вполне конкретный смысл.

Кроме того, существуют и более связанные нижние пределы, не зависящие от  $b$ . Чуть позже я покажу, что достаточным условием для  $D_T = 0$  является  $D < \frac{1}{2}(E + 1)$ . Следовательно,  $D_{\text{крит}} > \frac{1}{2}(E + 1) > 1$ . Достаточным же условием для равенства  $D_T$  либо 0, либо 1, является  $D < \frac{1}{2}E + 1$ . Следовательно,  $D_{2 \text{ крит}} > \frac{1}{2}E + 1 > 2$ .

При  $E = 3$  находим  $D < \frac{1}{2}(E + 1) = 2$ , что вполне согласуется (даже с запасом) как со значением Фурнье–Хойла  $D = 1$ , так и с эмпирическим значением для галактики,  $D \sim 1,23$ . Таким образом, случайный творог с любым из этих значений  $D$  представляет собой пыль — чего мы, собственно, от него и добивались.

Условие  $D < \frac{1}{2}E + 1$  дает при  $E = 3$  размерность  $D < 2,5$ . Это пороговое значение (как ни странно) также хорошо вписывается в нашу картину и вполне соответствует оценке размерности носителя турбулентной перемежаемости. Опыт подсказывает, что достаточные условия, полученные с помощью приближенных методов, редко бывают оптимальными. Следовательно, можно предположить, что, согласно модели створаживания, носитель турбулентности должен представлять собой нечто *меньшее*, чем участок поверхности.

**Отыскание нижних пределов.** Существование нижних пределов обусловлено тем фактом (см. главу 13), что контактные кластеры в твороге возникают там, где сливается содержимое соседних ячеек. Рассмотрим в этой связи пересечение творога с плоскостью, перпендикулярной некоторой оси с координатой вида  $\alpha b^{-\beta}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — целые числа. Известно, что при  $D > 1$  существует положительная вероятность того, что это пересечение не пусто. Однако для слияния необходимо перекрытие между частичными вкладками в пересечение соседних ячеек с общей стороны, длина которой равна  $b^{-\beta}$ . Если эти вклады не пусты, то они статистически независимы друг от друга; следовательно, размерность их перекрытия формально определяется выражением  $D^* = E - 1 - 2(E - D) = 2D - E - 1$ .

Если  $D^* < 0$  (т.е. если  $D < \frac{1}{2}(E + 1)$ ), то вклады не перекрываются. Следовательно, данный творог никак не может содержать в себе непрерывную кривую, пересекающую нашу плоскость, и  $D_T < 1$ .

Если  $D^* < 1$  (т.е. если  $D < \frac{1}{2}E + 1$ ), то перекрытие вкладов (при условии, что оно существует) не может содержать кривую. Следовательно, творог не может содержать в себе непрерывную поверхность, пересекающую плоскость, и  $D_T < 2$ .

При  $D^* < F$ , где  $F > 1$  (т.е. при  $D < \frac{1}{2}(E + 1 + F)$ ), аналогичное рассуждение исключает возможность существования какой бы то ни было гиперповерхности с размерностью  $D_T = F$ .

С учетом этих результатов не составляет особого труда завершить доказательство приведенных в предыдущем подразделе неравенств: если творог содержит в себе кривую (или поверхность), то любая точка  $P$  на этой кривой (поверхности) содержится внутри блока со стороной вида  $b^{-\beta}$ , который кривая (поверхность) пересекает в некоторой точке (или кривой). Можно утверждать, что таких точек (или кривых) почти наверняка не существует при  $D < \frac{1}{2}(E + 1)$  (или при  $D < \frac{1}{2}E + 1$ ).

## ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ

Обсуждение топологии лучше всего продолжать в рамках перколяционной терминологии. В соответствии с определением, приведенным в главе 13, мы говорим, что некая фигура внутри квадрата или куба перколирует, если она содержит в себе связную кривую, соединяющую противоположные стороны этого квадрата или куба. Под термином «перколяция» обычно понимают бернуллиеву перколяцию, которую мы рассматривали в главах 13 и 14. Однако аналогичная задача возникает и в контексте случайных фракталов. Ниже мы попытаемся решить эту задачу на примере случайного творога.

Опираясь мы будем на фундаментальный факт, заключающийся в том, что если упомянутая фигура представляет собой  $\sigma$ -кластер, то она перколирует в том и только в том случае, если перколирует один из принадлежащих ей контактных кластеров. Когда контактные кластеры фрактальны и их длины подчиняются безмасштабному гиперболическому распределению, вероятность перколяции не зависит от длины стороны квадрата и не вырождается в 0 или 1. В бернуллиевой перколяции упомянутое в предыдущем предложении «когда» сводится к весьма жесткому условию:  $p = p_{\text{крит}}$ . Перколяция сквозь фрактальный творог довольствуется условием более мягким, а именно:  $D > D_{\text{крит}}$ . Разница очень значительна. И все же понимание бернуллиевой перколяции помогает понять перколяцию творога, и наоборот.

**Верхний предел для  $D_{\text{крит}}$ .** Я утверждаю, что при  $b \geq 3$  пороговое значение  $D_{\text{крит}}$  удовлетворяет неравенству  $b^{D_{\text{крит}}} > b^E + \frac{1}{2}b^{E-1}$ . Точнее, при фиксированном  $N$  (ограниченное створаживание) выполнение этого условия почти гарантирует перколяцию. При неограниченном створаживании оно означает, что существует некая положительная, но малая вероятность того, что перколяции не произойдет.

Прежде всего рассмотрим случай неслучайного  $N$ . При сильном условии  $b^E - N \geq \frac{1}{2}b^{E-1} - 1$  любая заданная поверхность, заключенная между двумя ячейками предтворога, всегда выживает. Даже в самой опасной ситуации, когда вокруг упомянутой поверхности скапливаются все невыживающие субвихри, их количества совершенно недостаточно для разрыва существующей тропы (причем не *почти наверное*, а *абсолютно точно*). Более слабое условие  $b^E - N \geq \frac{1}{2}b^{E-1}$  дает тот же результат, но уже не абсолютно, а лишь почти наверное. Получающийся творог состоит из листов поверхности, окружающих отдельные лакуны, заполненные съвороткой. Две точки съворотки, расположенные в разных лакунах, нельзя соединить никаким образом. Топология такого творога почти наверняка тождественна топологии ковра Серпинского или фрактальной пены (см. главу 14).

Если применить то же условие к неограниченному створаживанию, то отсутствие перколяции из разряда совершенно невозможных событий перейдет в просто маловероятные.

Рассмотрим некоторые численные примеры на плоскости ( $E = 2$ ). При  $b = 3$  более слабое (и более полезное) из вышеприведенных условий дает неравенство  $N > 7,5$ , которое имеет единственное решение:  $N = 8$  (равное значению  $N$  для ковра Серпинского). По мере того как  $b \rightarrow \infty$  верхний предел для  $D_{\text{крит}}$  подходит все ближе к 2.

**Нижний предел для  $D_{\text{крит}}$ .** При  $b \gg 1$  справедливо неравенство  $D_{\text{крит}} > E + \log_b p_{\text{крит}}$ , где  $p_{\text{крит}}$  — критическая вероятность в бернуллиевой перколяции. Существование этого предела обусловлено тем, что первый этап случайного фрактального створаживания сводится к построению бернуллиевой решетки, каждая ячейка которой является проводящей с вероятностью  $b^{D-E}$ . Если эта вероятность меньше  $p_{\text{крит}}$ , то электропроводность решетки — событие маловероятное. А если такая решетка все-таки проводит ток, то происходит это, скорее всего, благодаря одной-единственной цепочке проводящих ячеек. На втором этапе случайного фрактального створаживания мы строим бернуллиеву решетку с вероятностью  $b^{D-E}$  уже в каждой проводящей ячейке решетки первого этапа. И это наверняка разорвет существующую перколяционную цепочку.

При  $b \rightarrow \infty$  новый предел стремится к  $E$  и, в своей области применения ( $b \gg 1$ ), превосходит предел  $\frac{1}{2}(E+1)$ . Таким образом,  $D_{\text{крит}} \rightarrow E$ . ■



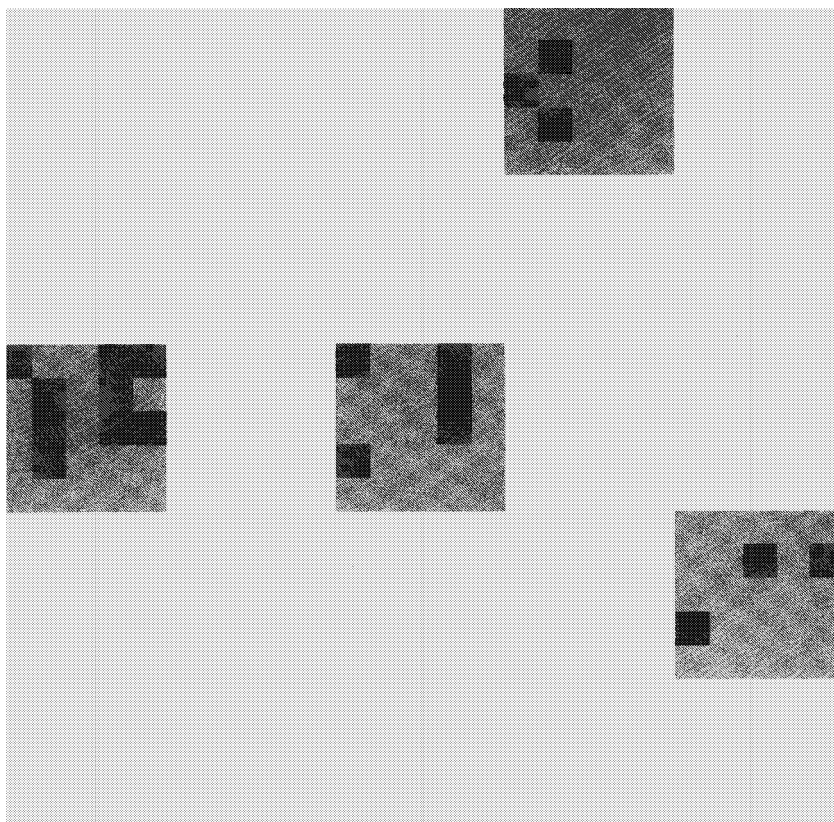
**Рис. 310 и 311. РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ХОЙЛА  
(РАЗМЕРНОСТЬ  $D = 1$ ) С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛУЧАЙНОГО  
СТВОРАЖИВАНИЯ НА РЕШЕТКЕ**

Основой модели Хойла (см. главу 9) является газовое облако очень низкой плотности, которое в результате последовательных сжатий образует скопления галактик, затем собственно галактики и т. д. Однако описание Хойла страдает чрезвычайной схематичностью, поэтому реальное геометрическое воплощение его модели требует некоторых специальных допущений. На рисунках показаны проекции простейшего такого воплощения на плоскость.

**Рис. 311.** В качестве инициатора выступает куб со стороной 1, который на первом этапе каскада разделяется на  $5^3 = 125$  подкубов со стороной  $5^{-1}$ ; далее процедура повторяется, и на  $k$ -м этапе мы получаем уже  $125^k$  подкубов  $k$ -го порядка, длина стороны каждого из которых равна  $5^{-k}$ , и при этом содержится в любом из подкубов  $(k - 1)$ -го порядка вещество, сжимаясь, образует набор из 5 подкубов  $k$ -го порядка, который мы будем называть  $k$ -предтворогом. Створаживание по Хойлу всегда понижает размерность  $D$  с 3 до 1.

На этом рисунке вы можете видеть первые три этапа каскада, совмещенные друг с другом, причем более темный оттенок серого символизирует большую плотность газа. В сравнении с рисунком, приведенным в [230] (с. 286), наша картинка может показаться приближенной. Это не так: рисунок выполнен с очень тщательным соблюдением масштаба, поскольку вопросы, связанные с размерностью, требуют точности.

Ввиду того, что мы представляем здесь плоскую проекцию трехмерного творого, нередко случается так, что два куба проецируются в один квадрат. Однако в пределе совпадения проекций двух точек практически

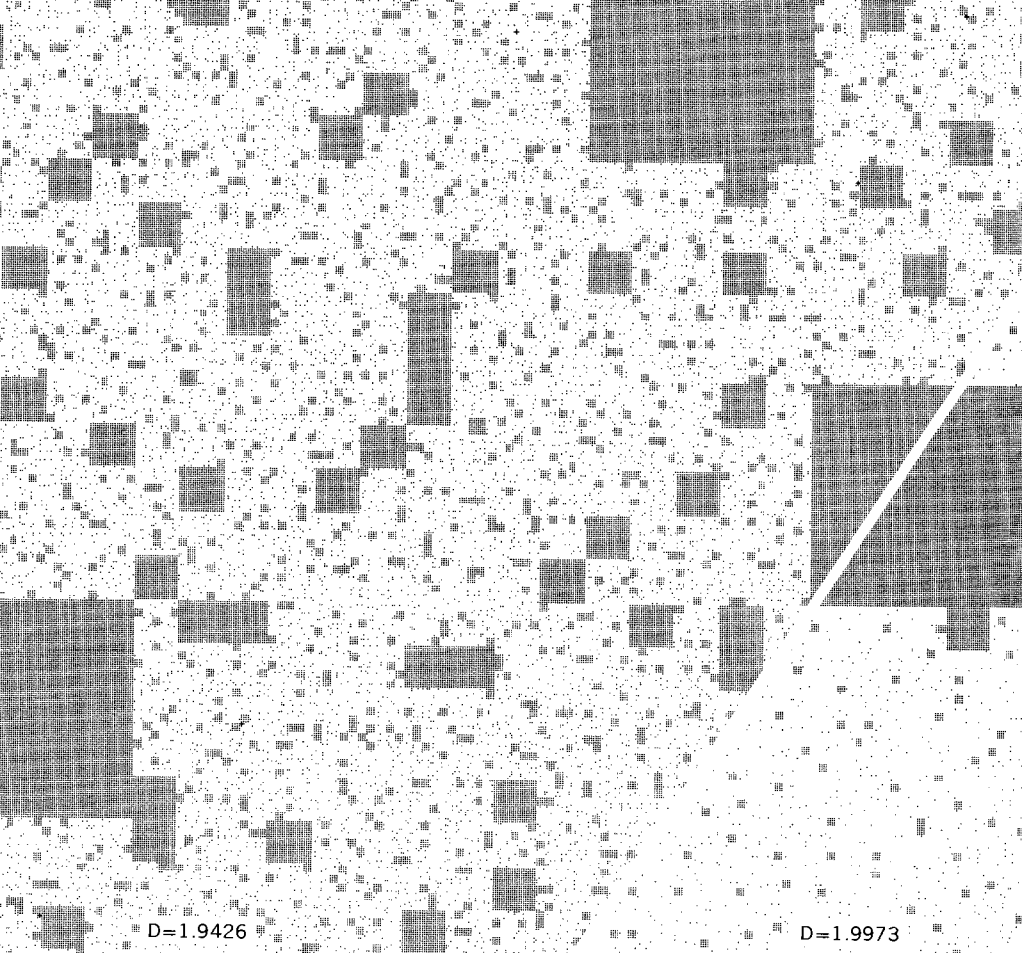


исключены. Образующаяся пыль настолько разрежена, что пространство, в сущности, остается прозрачным.

**Рис. 310.** Здесь показан только четвертый этап каскада (с другой заправкой). Лежащая в основе построения решетка практически не прослеживается, и это хорошо, поскольку в природе мы никаких решеток не наблюдаем (см. главу 27). Верхний участок вихря, обрезанный краем страницы, в настоящем примере пуст.

◁ **Регулирование лакуарности.** Понятие лакуарности, представленное в главе 34, непосредственно применимо к створаживанию на прямой и к створаживанию по Хойлу. Если у Хойла заменить  $N = 5$  «реальным» значением Фурнье  $N = 10^{22}$  (см. рис. 141), то лакуарность случайного творага становится очень и очень малой. ►





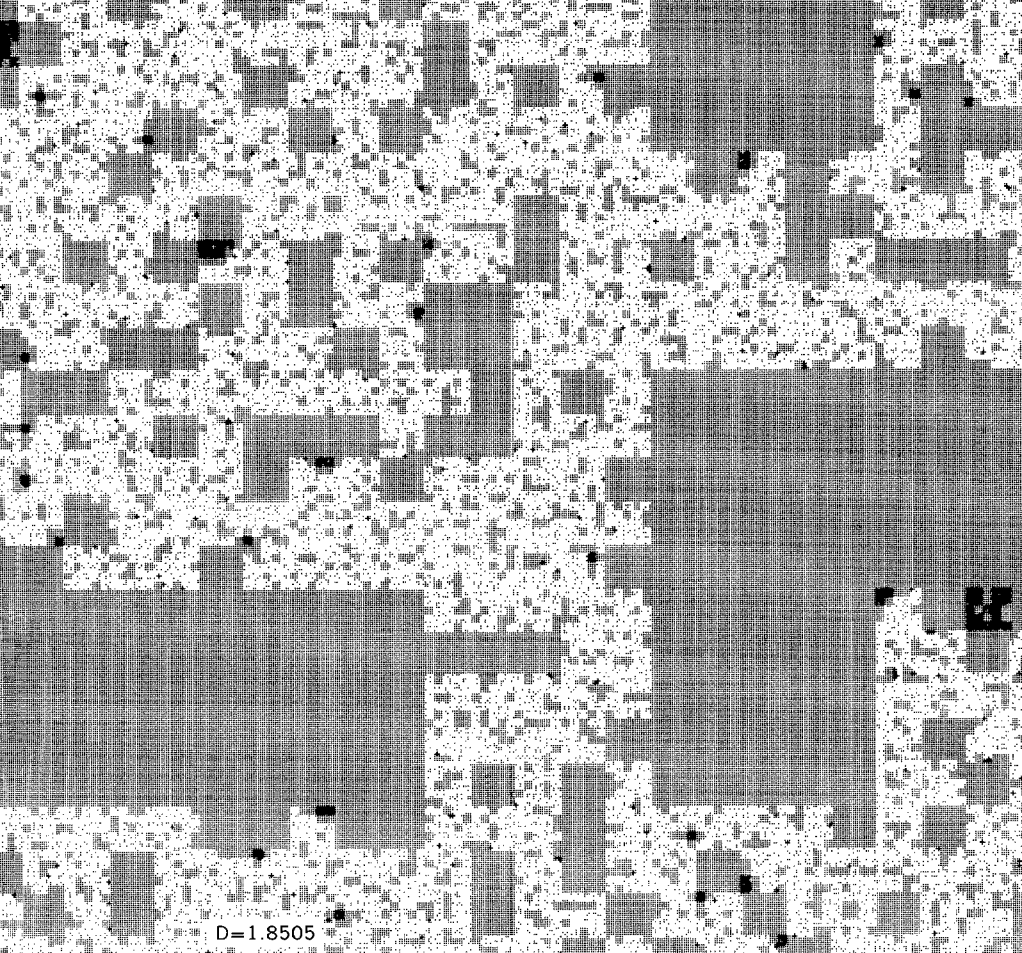
D=1.9426

D=1.9973

**Рис. 312–315. СЛУЧАЙНЫЙ ТВОРОГ НОВИКОВА – СТЮАРТА НА ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ (РАЗМЕРНОСТИ ОТ  $D = 1,5936$  ДО  $D = 1,9973$ ) И ПЕРКОЛЯЦИЯ**

Каскад Новикова–Стюарта дает полезное общее представление о том, каким образом турбулентное рассеяние в жидкости приходит в итоге к относительно малому объему. Концептуально он очень похож на каскад Хойла, проиллюстрированный на предыдущих рисунках; однако между фрактальными размерностями  $D$  получаемых в пределе этих каскадов множеств имеется значительное различие. Размерность распределения галактик близка к единице, тогда как в турбулентности  $D > 2$ ,





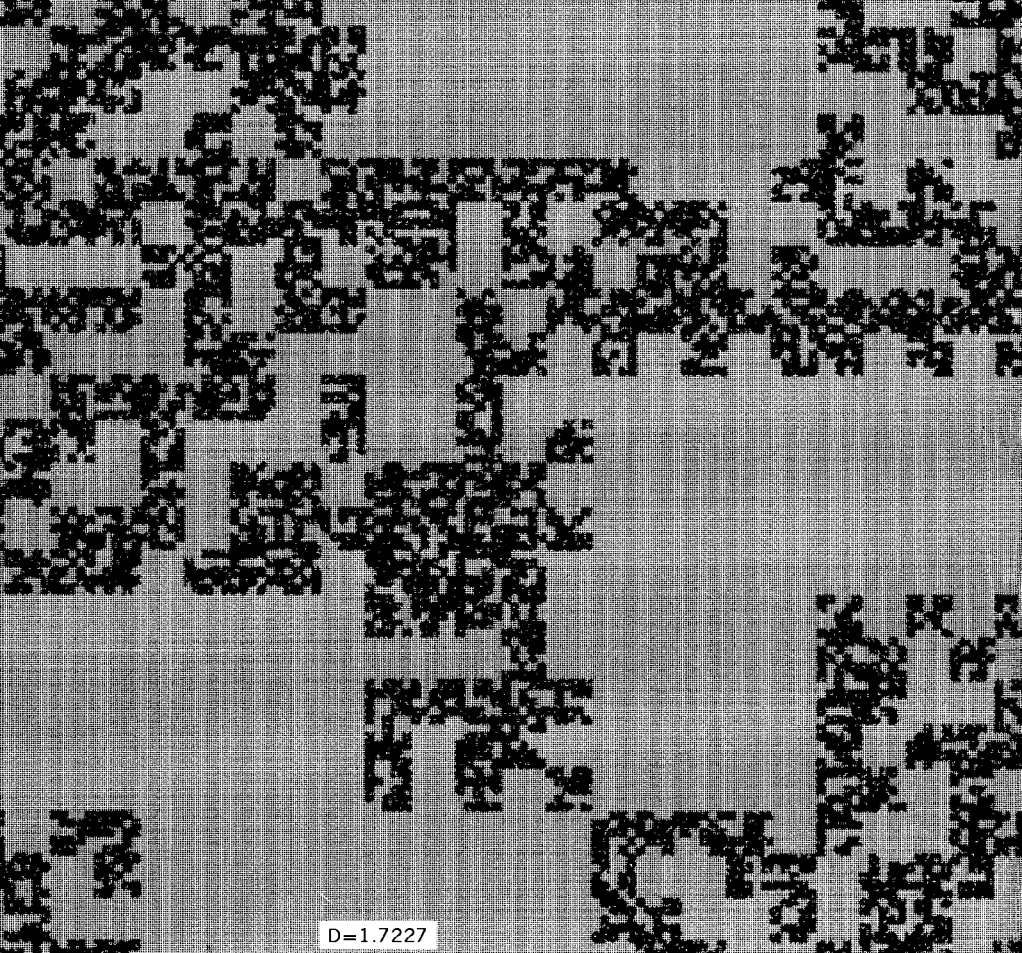
$D=1.8505$

причем хорошим приближением считается значение в интервале от 2,5 до 2,6. Для более общего понимания процесса створаживания на рисунках представлены примеры с различными размерностями. Во всех примерах  $r = 1/5$ , а  $N$  принимает следующие значения:

$$N = 5 \times 24, \quad N = 5 \times 22, \quad N = 5 \times 19, \\ N = 5 \times 16 \quad \text{и} \quad N = 5 \times 13.$$

Размерности же, соответственно, равны:

$$D = 1 + \ln 24 / \ln 5 = 2,9973; \quad D = 2,9426; \\ D = 2,8505; \quad D = 2,7227 \quad \text{и} \quad D = 2,5936.$$



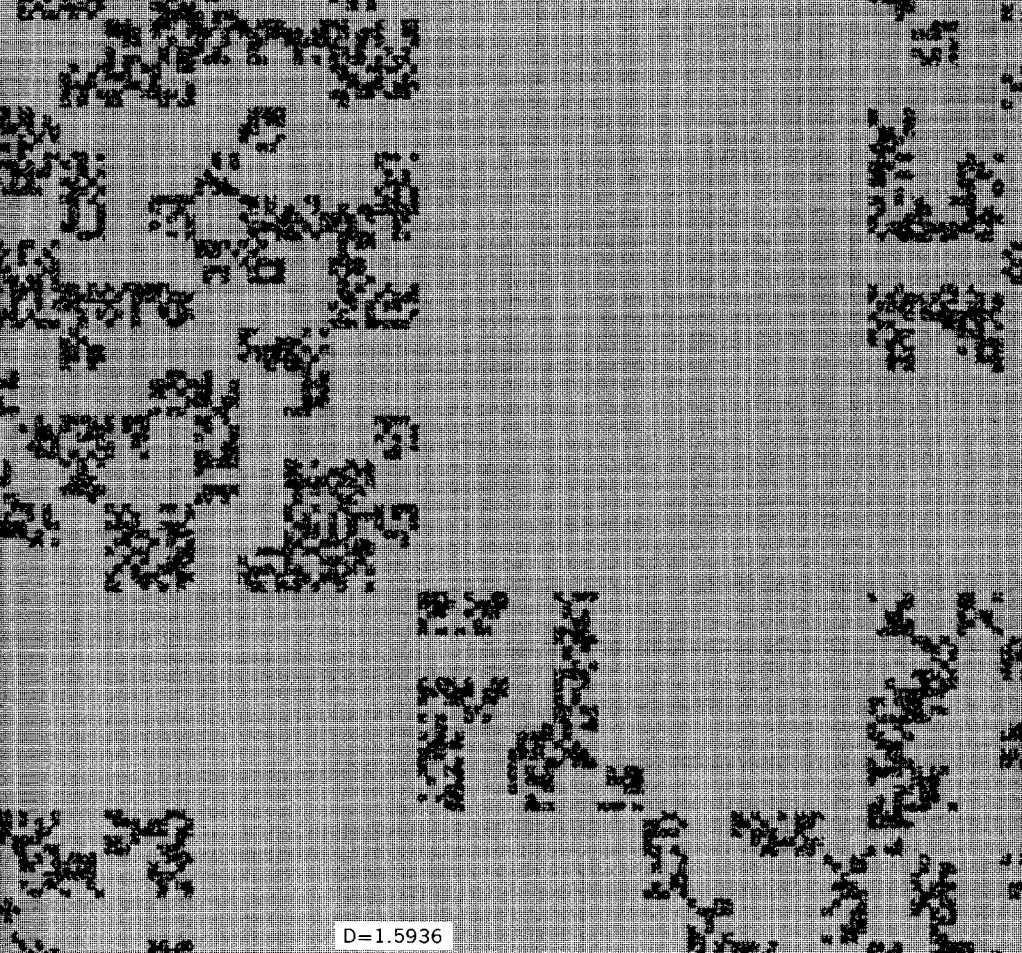
$D=1.7227$

Сыворотка изображается серым цветом, а творог — черным или белым. Белая область представляет собой перколяционный контактный кластер, т. е. вы можете, двигаясь только по белому, пройти от нижнего края рисунка до верхнего. Черным цветом представлены все остальные контактные кластеры.

Так как размерность турбулентности больше 2, твороги эти, в сущности, непрозрачны, а на рисунках показаны (в отличие от творогов Хойла) их плоские сечения со следующими размерностями:

$$D = 1,9973; \quad D = 1,9426; \quad D = 1,8505; \\ D = 1,7227 \quad \text{и} \quad D = 1,5936.$$

Правый нижний угол рис. 312 отведен под пример с размерностью



D=1.5936

$D \sim 1,9973$ , не представляющий большого интереса, остальная часть рисунка иллюстрирует случай  $D \sim 1,9426$ .

Порождающая программа и заправка одинаковы для всех примеров, и мы можем проследить постепенное исчезновение серых пятен по мере увеличения размерности. Для начала возьмем 25 субвихрей любого вихря и наложим их случайным образом друг на друга. Серыми окажутся  $25 - N$  верхних субвихрей, где  $N = 5^D$ .

В двух примерах с наименьшими размерностями перколяции не происходит. При  $N = 19$  на рисунке остается несколько черных пятен и появляется много белых. Некоторые заправки перколируют уже при  $N = 18$ . Однако на иллюстрациях показан слишком ранний этап каскада, чтобы можно было делать достоверные оценки порога  $D_{\text{крит}}$ . ■

## 24 ◊ СЛУЧАЙНЫЕ ЦЕПИ И СКВИГ-КРИВЫЕ

В предыдущей главе показано, что можно рандомизировать процесс створаживания, никак не затрагивая при этом несущую пространственную решетку с базой  $b$ . При случайном створаживании «вещество», находящееся в ячейке решетки на некотором  $k$ -м этапе, остается в ней навсегда, только его распределение становится все менее и менее однородным. Процесс этот весьма прост, поскольку эволюция любой отдельно взятой ячейки совершенно не зависит от того, что происходит в других. Следует, однако, признать, что топология предельного фрактала определяется случайностью и свойствами пространства.

В этой главе мы узнаем, как можно ограничить случайное створаживание таким образом, чтобы получающийся в результате фрактал обладал какими-либо заранее заданными свойствами связности. Например, если мы намерены построить модель береговой линии или речного русла, то нам потребуется на выходе кривая без самопересечений. Такой же результат необходим и в совершенно ином примере из весьма далекой от географии области — физики полимеров: вообразите себе чрезвычайно длинную молекулу, которая свободно плавает в некоем растворителе, однако при всем желании не может в заданный момент времени занимать один объем пространства более чем однажды.

Пользоваться мы будем теми же рекурсивными методами, которые обеспечивают при створаживании получение связного множества без самопересечений; в качестве инициатора снова возьмем некоторую плоскую область (например, квадрат), а генератором будет некоторая совокупность меньших областей, содержащихся внутри инициатора. В главе 23 от этих меньших требовалось только не перекрывать друг друга, за исключением тех случаев, когда *допустимы* общие вершины или стороны. В настоящей же главе наличие общих вершин или сторон *предписывается в обязательном порядке*.

Общие вершины, рассматриваемые первыми, порождают «случайные цепи», которые представляют собой прямое обобщение некоторых кривых Коха или Пеано.

Что касается общих сторон, то от них берет начало гораздо более интересное и привлекательное семейство фракталов, представленное впервые в [393] и [394]. Одни представители этого семейства — «простые» кривые, неветвящиеся и не содержащие самопересечений, другие имеют вид петель и деревьев; кроме того, процесс может породить

и поверхности. Я предлагаю называть такие фигуры *сквиг-кривыми* и *сквиг-поверхностями*<sup>1</sup>.

Я отдаю сквиг-кривым предпочтение перед случайными цепями главным образом потому, что их *меньшее* непостоянство, по всей видимости, отражает некое фундаментальное свойство пространства.

Линейные сквиг-кривые можно считать приближенными моделями линейных полимеров и речных русел, петлеобразными сквиг-кривыми моделируются береговые линии, а древовидными — речные бассейны.

## СЛУЧАЙНЫЕ ЦЕПИ И ЦЕПНЫЕ КРИВЫЕ

Совокупность белых областей на рис. 71 можно рассматривать как цепь, составленную из треугольников, соединенных вершинами. Следующий этап построения заменяет каждый треугольник подцепочкой, целиком заключенной внутри него, и дает в результате цепь, составленную из меньших треугольников, снова соединенных вершинами. Такая последовательность вложенных друг в друга цепей сходится в пределе к кривой Коха. (Процедура напоминает построение цепей Пуанкаре в главе 18.)

Подобным образом можно построить и многие другие кривые Коха — например, салфетку Серпинского (рис. 205); цепью в этом случае послужит фигура, остающаяся после удаления центральных треугольных трем.

Этот метод построения прекрасно рандомизируется — например, можно заменить треугольник двумя треугольниками с коэффициентом  $r = 1/\sqrt{3}$ , как на рис. 71, либо тремя треугольниками с  $r = 1/3$ .

## ПРОСТЕЙШИЕ СКВИГ-КРИВЫЕ [393]

Простейшей сквиг-кривой является случайная фрактальная кривая, построенная в [393, 394] и более подробно изученная в [473, 474, 475]. Это модель русла реки, созданная по образу и подобию известных картинок из учебников по географии и геологии, на которых изображены последовательные этапы развития реки, промывающей себе путь через долину; с каждым этапом будущее русло приобретает все более четкие очертания.

Перед началом  $k$ -го этапа река течет в «предсквиг-долине», составленной из ячеек правильной треугольной решетки со стороной  $2^{-k}$ . Разумеется, ни в одну ячейку нельзя наведываться более чем однажды, к тому же каждое звено в решетке должно касаться сторонами двух соседних звеньев, оставляя третью сторону «свободной».

<sup>1</sup>См. прим. к с. 68. — *Прим. перев.*

На  $k$ -м этапе эта предсвиг-кривая заменяется другой, более точной, построенной на интерполированной решетке со стороной  $2^{-k-1}$ . Очевидно, что предсвиг-кривая  $(k+1)$ -го порядка обязательно содержит половину каждой стороны, общей для двух соседних звеньев  $k$ -го порядка. Верно также строгое обратное утверждение, а именно: положение общих (несвободных) половин сторон однозначно определяет вид предсвиг-кривой  $(k+1)$ -го порядка.

**Симметрично-случайные скви-кривые.** Будем выбирать половину стороны, которую следует оставить свободной, случайным образом, полагая, что каждый из вариантов равновероятен. Тогда число звеньев  $(k+1)$ -го порядка внутри звена  $k$ -го порядка равно 1 с вероятностью  $1/4$  или 3 с вероятностью  $3/4$ . Среднее значение составит 2, 5.

С каждым этапом долина сужается и в пределе асимптотически сходится к некую фрактальную кривую. Я, естественно, предположил, что размерность этой предельной кривой равна  $D = \ln 2,5 / \ln 2 = 1,3219$ . Доказательство (весьма деликатное, надо сказать) можно найти в [473].

**Асимметрично-случайные скви-кривые.** Предположим, что вероятность того, что после разделения стороны треугольника на две половины подолойны выберет, скажем, «левую», не равна  $1/2$ . Понятия «правый» и «левый» можно определять либо с позиции наблюдателя, смотрящего в направлении вниз по реке, либо с позиции наблюдателя, находящегося в центре разделяемого треугольника. В первом случае  $D = \ln[3 - p^2 - (1 - p^2)] / \ln 2$  и может принимать значения от 1 до  $\ln 2,5 / \ln 2$ . Во втором случае  $D = \ln[3 - 2p(1 - p)] / \ln 2$  и может принимать значения от  $\ln 2,5 / \ln 2$  до  $\ln 3 / \ln 2$ . В общей сложности достижимы все значения  $D$  от 1 до  $\ln 3 / \ln 2$ .

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ РЕШЕТКИ И СКВИ-КРИВЫЕ

Используя другие интерполированные решетки, можно получить скви-кривые иного вида. Во всех случаях, когда для идентификации предсвиг-кривой  $(k+1)$ -го порядка достаточно знать, в каких интервалах она пересекает границу между двумя ячейками  $k$ -го порядка, возможно непосредственное обобщение. В качестве примера можно привести прямоугольную решетку, в которой отношение длинной стороны ячейки к короткой имеет вид  $\sqrt{b}$ , и каждая ячейка интерполируется в  $b$  ячеек, расположенных поперек исходной ячейки.

Иначе обстоит дело с треугольными решетками, ячейки которых интерполируются в  $b^2 \geq 9$  треугольников, или с квадратными решетками, где ячейки интерполируются в  $b^2 \geq 4$  квадратов. В обоих случаях интерполяция предсвиг-кривых требует дополнительных шагов.

При  $b = 3$  (треугольная решетка) или  $b = 2$  (квадратная решетка) достаточно одного дополнительного шага — вполне, впрочем, естественного. В самом деле, представьте себе четыре «луча», исходящих из центра квадрата и разделяющих его на четыре части (либо шесть лучей, разделяющих треугольник на девять частей). Как только мы оставляем свободным один из этих лучей, поддолина оказывается полностью определена. Согласно моему определению сквиг-кривых, луч, который следует оставить свободным, выбирается случайным образом, причем каждый из вариантов равновероятен. Размерности при этом принимают следующие значения:  $D \sim 1,3347$  (для треугольников, разделенных на девять частей) и  $D \sim 1,2886$  (для квадратов, разделенных на четыре части). Учитывая, что для простейших сквиг-кривых  $D \sim 1,3219$ , можно заключить, что все сквиг-кривые характеризуются приблизительно одинаковой размерностью  $D$ , значение которой находится в окрестности  $4/3$ .

В тех случаях, когда ячейка разделяется на  $b^2$  частей, где  $b > 3$  (для треугольников) или  $b > 2$  (для квадратов), для определения поддолины необходимо вводить различные дополнительные факторы, отчето конструкция приобретает все более произвольный характер. При этом сущность сквиг-построения, понимаемая в свете рассуждений последующего раздела, оказывается потерянной.

## ЦЕПНЫЕ КРИВЫЕ И СКВИГ-КРИВЫЕ: СРАВНЕНИЕ

Остановимся на минуту и припомним, что независимо от того, получаем ли мы фрактальную кривую цепным методом Чезаро или с помощью оригинального метода Коха, погрешность, возникающая при остановке процесса, распределяется вдоль кривой очень *неоднородно*. Полезным здесь может оказаться тот факт, что некоторые точки уже после конечного числа этапов подходят к своему предельному положению бесконечно близко. Это обстоятельство, к примеру, помогло Коху в отыскании простейшей кривой, не имеющей касательных ни в одной своей точке. Однако сущность понятия кривой становится гораздо яснее, если рассматривать кривую как предел полосы *однородной* ширины. Мои сквиг-кривые вполне отвечают этому условию.

Следующий пункт сравнения связан с числом произвольных решений, которые приходится принимать «создателю» при том и другом подходе. Подход Коха к построению неслучайных или случайных фракталов необычайно эффективен (он, в частности, позволяет достичь любой желаемой размерности в рамках относительно простой кривой), однако он требует от создателя принятия многочисленных специфических решений, причем все они так или иначе зависят друг от друга. Значение  $b$  здесь также не является внутренней характеристикой.

Все мы знаем, что наука немало настрадалась от недостатка в евклидовой геометрии моделей для описания негладких природных форм, а потому известие о том, что фрактальная геометрия способна справиться с этим несомненно бедственным положением, должно, казалось бы, наполнить наши сердца восторгом. Боюсь, однако, что на настоящей стадии развития теории восторги придется несколько попридержать и постараться обойтись как можно меньшим числом произвольных решений.

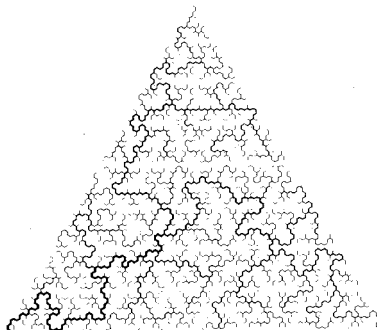
В этом свете факт наличия весьма серьезных ограничений, налагаемых геометрией плоскости на построение сквиг-кривых (в результате чего сквиг-кривые получаются более предсказуемыми и менее разнообразными), выглядит достоинством.

### РАЗМЕРНОСТЬ $D \sim 4/3$

Следует обратить самое пристальное внимание на размерность сквиг-кривых  $D \sim 4/3$ . То, что мы еще не раз встретимся с этим значением — в главе 25 (рис. 341) и в главе 36 — вряд ли можно объяснить простым совпадением; не исключено, что он приведет нас к более глубокому проникновению в основы геометрической структуры плоскости.

### ВЕТВЯЩИЕСЯ СКВИГ-КРИВЫЕ

Вернемся к построению речного русла. Вот мы заменили треугольный интервал долины участком поддолины, состоящим из одного или трех подтреугольников; представьте теперь, что оставшиеся три (или один) подтреугольника вдруг решают отвести от основного русла собственную поддолину. Построение нового русла полностью определяется уже известным процессом. Точки, в которых подреки пересекают границы между треугольниками, выбираются с помощью той же системы, что используется в главной реке. В пределе конструкция сходится к древоподобной кривой, которая заполняет треугольник случайным образом, как можно видеть на рисунке:





## ОЧЕНЬ КРАТКО ЕЩЕ О ДВУХ ПРЕЦЕДЕНТАХ

Тот факт, что столь грубая модель, как мои линейные сквиг-кривые, может дать результат, вполне сносно — хоть и приблизительно — согласующийся с наблюдаемой размерностью реальных речных русел и бассейнов, представляется мне весьма интересным и даже многозначительным.

С помощью этих кривых можно также найти размерность общепринятой модели для сильно разбавленных растворов линейных полимеров — случайного блуждания без самопересечений (СББС) на решетке (см. главу 36).

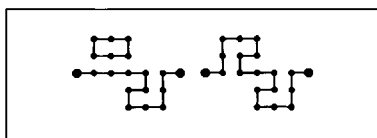
Лучшая (чем в случае СББС) приспособленность сквиг-кривых к ограничениям, налагаемым геометрией плоскости, объясняется, очевидно, интерполяционным характером их построения.

## СКВИГ-ПОВЕРХНОСТИ

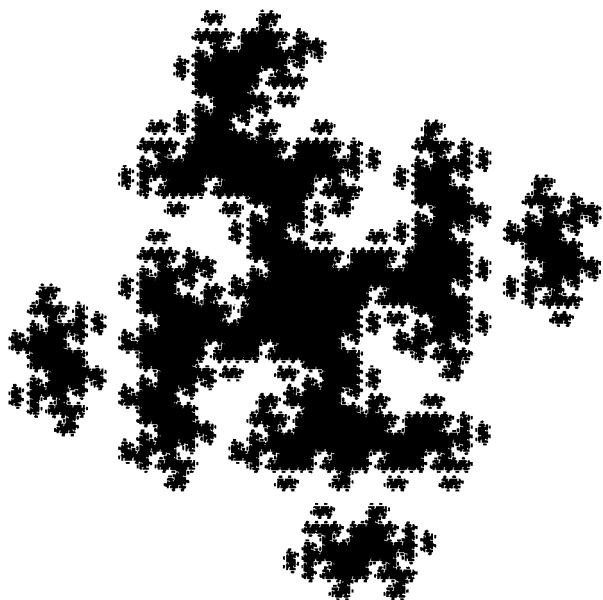
Сквиг-поверхности строятся на кубе, разделенном на  $b^3$  подкубов; я определил соответствующие «освобождающие» процедуры, которые однозначно определяют получаемую в результате фигуру — нечто вроде скомканного шерстяного шарфа постоянной и в то же время уменьшающейся толщины. К сожалению, не представляется возможным привести здесь алгоритм построения, из-за его чрезмерной громоздкости. ■

### Рис. 322. СЛУЧАЙНОЕ ПОБЕРЕЖЬЕ КОХА (РАЗМЕРНОСТЬ $D = 1,6131$ )

Во многих случаях кривую Коха с заранее заданной размерностью  $D$  и без самопересечений можно получить несколькими различными способами, используя при этом одну и ту же общую решетку и одинаковые инициаторы. Кроме того, предположим, что существуют, по крайней мере, два генератора, которые дают одинаковый общий контур фигуры. Теперь можно легко рандомизировать построение, случайным образом выбирая на каждом этапе один из двух упомянутых генераторов. Генераторы могут, например, выглядеть вот так:



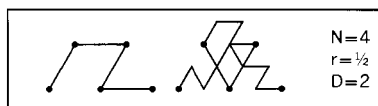
Результат построения представлен на рисунке на следующей странице.



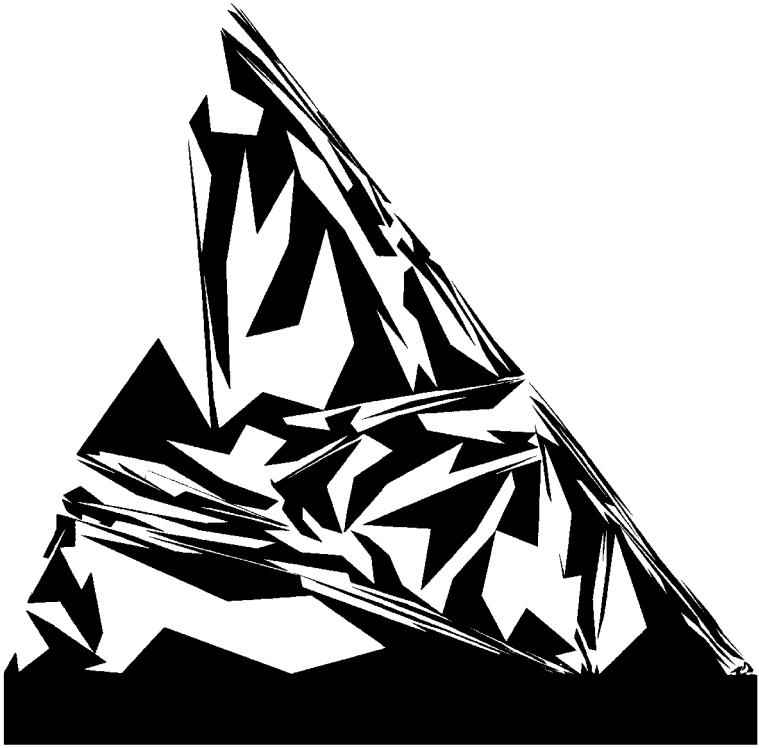
Общая форма случайного острова Коха, построенного таким способом, сильно зависит от исходной фигуры. В частности, все начальные симметрии явственно прослеживаются на любом из этапов построения. По этой причине (равно как и по другим, описанным в главе 24) метод построения случайной кривой Коха путем случайной перетасовки ее элементов имеет весьма ограниченную область применения. ■

### Рис. 323. СЛУЧАЙНАЯ КРИВАЯ ПЕАНО (РАЗМЕРНОСТЬ $D = 2$ )

Изображенный ниже генератор вкпе с инициатором  $[0, 1]$  дает в пределе кривую, заполняющую треугольник.



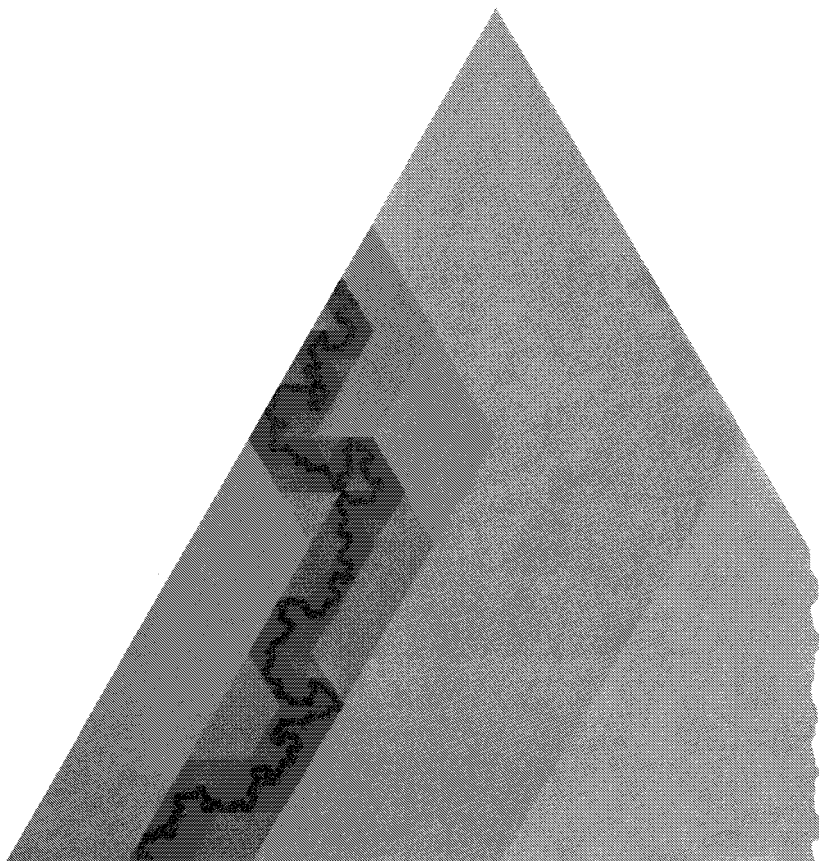
Положение и вид генератора определяется четностью номера интервала в треуголе. На интервалах с нечетными номерами вышеприведен-



ный (т.е. прямой, S) вариант генератора располагается справа от кривой. К интервалам же с четными номерами применяется обратный (F) вариант генератора, и располагается он слева от кривой. Суть метода рандомизации, результат которой показан на рисунке, состоит в том, что выбор этих фокальных точек производится случайным образом. В данном примере распределение симметрично относительно средней точки интервала. Каждый подтреугольник разбивается позднее на четыре подтреугольника, причем независимым от соседей образом, и процесс продолжается до бесконечности.

Для того, чтобы за изменениями терегона было легче проследить, каждый интервал заменен двумя, причем добавочная концевая точка является серединой «крыши» этого интервала.

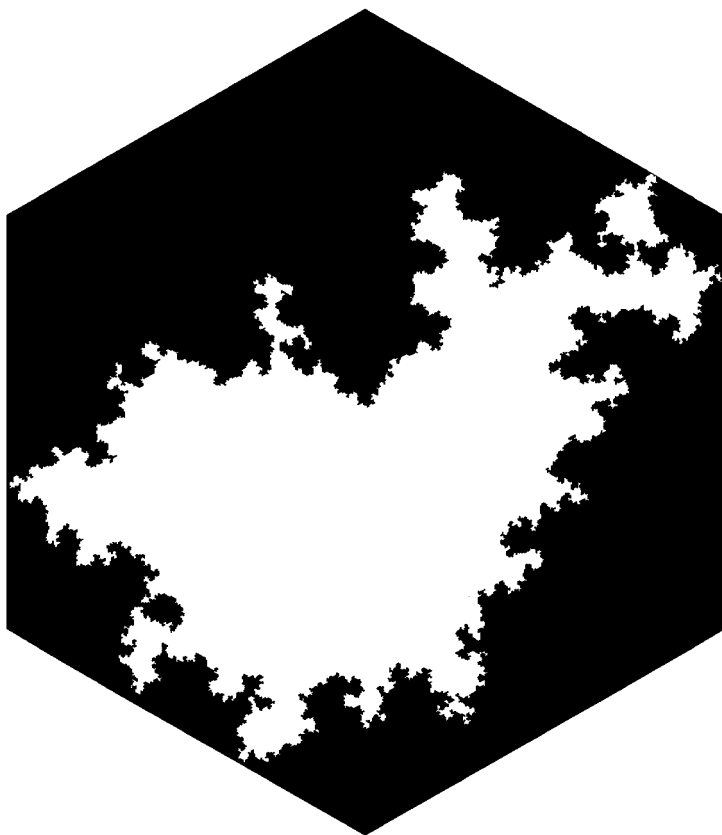




**Рис. 324. ТРЕУГОЛЬНИК И СКВИГ-КРИВАЯ**

Здесь проиллюстрировано поэтапное построение простейшей сквиг-кривой — каждый последующий этап совмещен с предыдущим и показан более темным оттенком серого цвета. Обратите также внимание на следующее обстоятельство: то, что мы не видим светлого оттенка под темным, не означает, что светлая область в этом месте прерывается. Начинается построение светло-серым треугольником, а заканчивается кривой черного цвета. Масштаб изображения этапов с 6 по 10 несколько больше масштаба для этапов с 0 по 5. Сами этапы описаны в тексте главы.





**Рис. 325. ШЕСТИСКВИГОВАЯ БЕРЕГОВАЯ ЛИНИЯ**

На этом рисунке изображены шесть сквиг-кривых, соединенных концами и образующих петлю без самопересечений. Размерность фигуры очень близка к  $D = 4/3$ . Это же значение фигурирует и во многих других примерах кривых без самопересечений — например, границы броуновской оболочки на рис. 341, сходство которой с нашим «шести-сквигом», безусловно, заслуживает упоминания.



## 25 ◇ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Место этой главы в настоящем эссе представляет собой в некотором роде результат компромисса. Логичнее было бы поместить такую главу в следующей части, однако некоторые ее разделы являются необходимым предисловием к главе 26.

### РОЛЬ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Как мы знаем из главы 2, Жану Перрену пришла однажды в голову блестящая идея сравнить физическое броуновское движение с непрерывными недифференцируемыми кривыми. Идея Перрена послужила источником вдохновения для юного Норберта Винера, примерно в 1920 г. определившего и исследовавшего математическую реализацию броуновского движения, которую и сейчас нередко называют *винеровским процессом*. Много позже стало известно, что тот же процесс был подробно, хотя и не так строго, рассмотрен в докторской диссертации Луи Башелье [12] (см. также главы 37 и 39).

Странно, что само по себе броуновское движение — при всей своей чрезвычайной важности во многих других областях — не находит в настоящем эссе никакого нового приложения. Время от времени оно помогает вчерне набросать проблему, однако и в этих случаях при дальнейшем ее рассмотрении оно непременно заменяется каким-либо другим процессом. И все же во многих случаях можно зайти на удивление далеко просто модифицируя броуновское движение; нужно только следить за тем, чтобы модификации оставались масштабно-инвариантными.

По этой и иным причинам остальные случайные фракталы нельзя оценить по достоинству без досконального изучения и понимания конкретных свойств этого их прототипа. Однако миллионы страниц, посвященных данной теме, либо упоминают вскользь, либо вовсе опускают некоторые весьма важные моменты, рассмотрением которых мы и займемся в настоящей главе. Если читатель сочтет, что мы заходим слишком далеко, он — как здесь принято — вполне может перейти к следующему разделу или даже к следующей главе.

## БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЫ: ФУНКЦИЯ И СЛЕД

К сожалению, термин «броуновское движение» неоднозначен. Во-первых, этим термином можно обозначить *график* выражения  $B(t)$  как *функции* от  $t$ . Если  $B(t)$  — ордината точки на плоскости, то график представляет собой плоскую кривую, подобную изображенному на рис. 338. Если же  $B(t)$  — это точка в  $E$ -пространстве, то график представляет собой кривую в  $(1 + E)$ -пространстве (к  $E$  координатам точки  $B$  добавляется временная координата). Однако во многих случаях нас интересует всего лишь кривая в  $E$ -пространстве, которую броуновское движение оставляет за собой в виде *следа*. Когда след изгибается через равные промежутки времени, функция и след легко выводятся друг из друга. Однако в случае непрерывного броуновского движения эти два аспекта вовсе не эквивалентны, и обозначение их одним термином вносит путаницу.

Когда неоднозначность начинает угрожать ясности моих рассуждений, я разделяю термины и говорю либо о *броуновской функции*, либо о *броуновском следе*. Мы уже сталкивались с такой неоднозначностью при рассмотрении кривых Коха, однако здесь она более очевидна благодаря термину «движение».

Кроме того, переменная в броуновских функциях, рассматриваемых в главах 28–30, многомерна. Например, в одной из моделей земного рельефа в главе 28 предполагается, что высота точки поверхности является броуновской функцией от ее широты и долготы. Таким образом, часто возникает потребность в уточнении терминологии. При необходимости мы различаем броуновские функции и следы из прямой в прямую, из прямой в пространство, из пространства в прямую, из прямой в  $E$ -пространство и т. д.

**Броуновские «поля».** «Случайное поле» есть в действительности не рандомизированное (алгебраическое) поле, а всего лишь модный синоним (см., например, [3]) для термина «случайная функция нескольких переменных». Синоним этот ничем не оправдан, и его следует как можно скорее изъять из обихода, пока он не успел укорениться. Возник он, судя по всему, вследствие некомпетентного перевода с русского «как и термин «автомодельный» (его распространение я, к счастью, успел вовремя пресечь), появившийся в результате бездумного перевода русского термина «самоподобный». ►

## ПЛОСКИЙ БРОУНОВСКИЙ СЛЕД, ПОСТРОЕННЫЙ КАК СЛУЧАЙНАЯ КРИВАЯ ПЕАНО ( $N = 2$ )

Изучение броуновских следов проливает новый свет на природу кривых Пеано — и это при том, что броуновский след, как выяснилось, представляет собой не что иное, как рандомизированный вариант

кривой Пеано. Я провел небольшой опрос среди случайно выбранной группы ученых, и ни один из них не признал идентичности этих двух построений; не упоминается об этом и в случайным образом отобранной мною (и тщательно просмотренной) пачке книг, посвященных данному предмету. Математики любыми способами избегают такого подхода, поскольку основная его составляющая (иерархия слоев с возрастающей детализацией, регулируемая двоичной временной решеткой) никак не связана с результатом построения. Это обстоятельство, по мнению математиков, придает данному подходу искусственный и надуманный характер — однако именно благодаря этому обстоятельству он замечательно вписывается в настоящее эссе.

Процесс можно начинать с любой кривой Пеано с  $N = 2$  и  $r = 1/\sqrt{2}$ . Хитрость заключается в последовательном снятии различных ограничений при продвижении по этапам.

Промежуточные фракталы — «пеано-броуновские гибриды» — заслуживают отдельного подробного изучения в более подходящей обстановке.

**Трансверсальное срединное смещение.** В конструкциях, изображенных на рис. 98–102, на  $(k + 1)$ -м этапе построения  $k$ -й трапегон трансформируется путем трансверсального срединного смещения каждого прямолинейного интервала на величину  $|\Delta M| = \sqrt{2^{-k-1}}$  влево или вправо в соответствии с некоторыми конкретными правилами — например, в зависимости от четности числа  $k$ .

Обозначим смещения кривой Пеано за промежуток времени  $\Delta t = t - t^k$  и за два половинных промежутка  $\Delta_1 t$  и  $\Delta_2 t$  через, соответственно,  $\Delta P$ ,  $\Delta_1 P$  и  $\Delta_2 P$ . Теперь теореме Пифагора можно записать так:

$$|\Delta P|^2 = |\Delta_1 P|^2 + |\Delta_2 P|^2.$$

**Направления изотропных смещений.** В качестве нашего первого отступления от правил построения любой кривой Пеано попробуем рандомизировать *направления* смещения. Один подход предполагает равную вероятность смещений вправо и влево, давая в результате эталонную «случайную прыг-скок-кривую». Другой подход состоит в случайном (однородной плотности) выборе точки на окружности, размеченной в градусах, и использовании полученной таким образом угловой величины. Смещения, определяемые такой процедурой, называются *изотропными*.

Теорема Пифагора применима к любому из упомянутых способов рандомизации: приращения изотропного движения на двоичных подынтервалах двоичного же интервала геометрически ортогональны.

**Длины случайных смещений.** Второе отступление от правил неслучайного построения: рандомизации подвергается и *длина* смеще-



ния. Начиная с настоящего момента, под величиной  $2^{-k-1}$  следует понимать уже не квадрат неслучайного  $|\Delta M|$ , а среднеквадратическое значение случайного  $|\Delta M|$ . В результате величины смещения  $\Delta P^*$  удовлетворяют следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\langle |\Delta_1 P^*|^2 \rangle &= \langle |\Delta_2 P^*|^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle |\Delta P^*|^2 \rangle + \langle |\Delta M|^2 \rangle; \\ \langle |\Delta_1 P^*|^2 \rangle + \langle |\Delta_2 P^*|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle |\Delta P^*|^2 \rangle + 2^{-k}.\end{aligned}$$

**Случайный инициатор.** Следующим шагом будет использование в построении случайного инициатора, среднеквадратическая длина которого равна 1. Отсюда неизбежно следует, что  $\langle |\Delta P^*|^2 \rangle = 2^{-k-1}$ , и мы получаем пифагорову теорему для средних:

$$\langle |\Delta_1 P^*|^2 + |\Delta_2 P^*|^2 - |\Delta P^*|^2 \rangle = 0.$$

Иными словами, *геометрически* ортогональные отрезки заменяются отрезками, которые в теории вероятности называются *статистически* ортогональными или *некоррелированными*.

**Независимые приращения.** Срединные смещения можно теперь считать статистически независимыми, как внутри каждого отдельного этапа, так и между этапами.

**Гауссовы приращения.** Рандомизированная кривая Пеано становится броуновским следом  $B(t)$  тогда, когда срединные смещения следуют изотропному гауссову распределению.  $\triangleleft$  В плоскости квадрат модуля этой переменной распределяется экспоненциально. Следовательно, при прямом построении нам следует случайным образом выбрать на однородном интервале  $[0, 1]$  точку  $U$  и определить модуль как  $|\Delta M| = [-2 \ln U]^{1/2}$ .  $\blacktriangleright$

**Обобщение на пространство.** Окончательное построение имеет смысл и при  $E > 2$ .

**Размерность  $D = 2$ .** Теорема Пифагора для средних представляет собой обобщенное определение размерности подобия. Она применима и к броуновскому следу, поскольку размерность Хаусдорфа–Безиковича в этом случае также равна 2. В применимости же ее к случаю негауссова распределения величины смещения средней точки еще предстоит разобраться.

## БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ СЕТИ (РЕШЕТКИ)

**Множественные самопересечения.** Даже если остановить рандомизацию после первого же этапа описанного в предыдущем разделе

процесса, она успевает полностью нарушить идеальные дальний и ближний порядки, благодаря которым кривые Пеано избегают самопересечений. Рандомизированные терагоны самопересекаются уже на начальных этапах построения, а предельный след почти наверное содержит бесконечное количество самопересечений.

**Броуновские пустоты.** Общеизвестно, что броуновский след, экстраполированный для всех значений  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , плотно заполняет плоскость. Это свойство мы вскоре выведем заново. Однако след, ограниченный определенным промежутком времени, обладает собственной весьма примечательной геометрией — и я не припомню, чтобы ее кто-либо где-либо описывал.

Очевидно, в качестве компенсации за те точки, которые броуновский след  $B(t)$  покрывает за время  $t \in [0, 1]$  несколько раз, остальные точки плоскости остаются непокрытыми. Эти непокрытые точки образуют открытое множество, которое разделяется на внешнее множество, содержащее точку в бесконечности, и бесконечное количество непересекающихся *броуновских пустот*. И внешнее множество, и каждая пустая область ограничены фрактальными кривыми, которые являются подмножествами следа. Следовательно, броуновский след можно считать фрактальной сетью — наглядные подтверждения этому вы найдете на рис. 340 и 341.

$\triangleleft$  В главе 14 описана сеть с размерностью  $D$ , в которой число пустот площади  $U$ , превышающей некоторое заданное значение  $u$ , определяется соотношением  $\text{Nr}(U > u) \propto u^{-D/E}$ . В случайном контексте при  $D = E = 2$  формальное обобщение имеет вид  $P(u) = \text{Pr}(U > u) \propto u^{-1}$ . Однако в данном случае оно неприменимо, так как должен сходиться интеграл  $\int_0^\varepsilon P(U > u) du$ . В связи с этим я предполагаю, что  $\text{Pr}(U > u) \propto u^{-1}L(u)$ , где  $L(u)$  — некая медленно изменяющаяся функция, которая убывает достаточно быстро для обеспечения сходимости упомянутого интеграла. Из-за необходимости введения непостоянной величины  $L(u)$  размерность  $D = 2$  в самоподобной разветвленной сети оказывается недостижима — точно так же, как недостижима она и в самоподобной простой кривой (см. главу 15).  $\blacktriangleright$

**Нулевая площадь броуновской сети.** Несмотря на размерность броуновской сети ( $D = 2$ ), ее площадь равна нулю. То же должно быть верно и для пеано-броуновских гибридов.

**Неограниченный след плотен в плоскости.** Это свойство основывается на том факте (который мы установим несколько позже, когда будем говорить о нуль-множествах), что неограниченный след бесконечно часто «возвращается» в любую заданную плоскую область  $D$  — такую, например, как диск. А если взять любую произвольно малую

область  $\mathcal{D}$  и совместить ее центр с произвольной точкой  $P$  на плоскости, то станет ясно, что неограниченный броуновский след подходит к каждой точке плоскости бесконечно много раз и на произвольно близкое расстояние.

Однако — в чем мы убедимся при рассмотрении тех же нуль-множеств — вероятность того, что некий конкретный след *точно* попадет в некую заданную точку, равна нулю, т. е. заданная точка почти наверняка оказывается *не затронутой* неограниченным следом.

Часть неограниченного следа, заключенную внутри области  $\mathcal{D}$ , можно приближенно представить себе в виде исчислимо бесконечного множества независимых ограниченных сетей, заброшенных на область  $\mathcal{D}$ . Результат напоминает исчислимо бесконечное множество точек, выбранных случайным образом и независимо друг от друга из интервала  $[0, 1]$ . Общеизвестно, что такое множество везде плотно, однако длина его равна нулю.

## ЗАВИСИМОСТЬ МАССЫ ОТ РАДИУСА

Величина  $\sqrt{t}$  в качестве коэффициента подобия характерна для большинства аспектов броуновского движения. Например, если измерить по прямой расстояние, которое покрывает броуновское движение за время  $t$ , то мы получим случайную величину, кратную  $\sqrt{t}$ . Аналогичным образом и общее время, проведенное броуновской точкой внутри окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $B(0) = 0$ , представляет собой случайную величину, кратную  $R^2$ .

Определив величину, пропорциональную времени, затраченному броуновским следом на прохождение того или иного своего участка, как «массу», а затем «взвесив» эти самые участки, мы обнаружим, что — как в плоскости, так и в пространстве ( $E \geq 2$ ) — общая масса, заключенная внутри окружности радиуса  $R$ , определяется соотношением  $M(R) \propto R^2$ .

Формально это соотношение полностью идентично тому, что мы получили для кривых Коха (глава 6) или канторовой пыли (глава 8). И тем более идентично соотношению для классических случаев интервала, диска или шара однородной плотности.

## БРОУНОВСКИЙ СЛЕД: ОТСУТСТВИЕ «СКЛАДОК» И СТАЦИОНАРНЫЕ ПРИРАЩЕНИЯ

Рандомизировав кривую Пеано, мы нежданно-негаданно получили гораздо больше, чем предполагали. В качестве предваряющего комментария заметим, что в моменты времени вида  $N^{-k}$  неслучайные кривые

Коха и Пеано непременно демонстрируют «складки». Разделив, например, треть границы снежинки на четыре части, мы обязательно обнаружим, что угол между первой и второй четвертями отличается от угла между второй и третьей. То есть спутать левую четверть со средней просто *невозможно*.

Броуновский же след лишен таких «складок». Имея перед глазами броуновский след на некотором интервале времени  $t$ , никак нельзя сказать, где именно на временной оси расположен этот интервал. В терминологии теории вероятности принято говорить, что броуновский след имеет «стационарные приращения».

Это свойство заслуживает внимания по двум причинам: во-первых, на нем основывается альтернативное, «безрешеточное», определение броуновского движения, данное несколько дальше в этой же главе, а во-вторых, оно не имеет соответствий среди свойств аналогичных рандомизированных форм простых фрактальных кривых и поверхностей.

## БРОУНОВСКИЙ СЛЕД: САМОПОДОБИЕ

Из отсутствия складок вытекает весьма сильная форма статистического самоподобия. Положим  $B(0) = 0$ , выберем два положительных числа  $h$  и  $h'$  и воспользуемся разделом теории вероятности, который называется теорией слабой сходимости. Согласно этой теории, функции  $h^{-1/2}B(ht)$  и  $h'^{-1/2}B(h't)$  статистически тождественны. Положив далее  $T < \infty$  и  $h < 1$  и изменяя  $t$  в интервале от 0 до  $T$ , мы обнаруживаем, что функция  $h^{-1/2}B(ht)$  представляет собой некоторое подобие участка функции  $B(t)$  в уменьшенном масштабе. Эту статистическую тождественность части целому можно рассматривать как форму самоподобия.

Самоподобие в приложении к случайным множествам — понятие не столь строгое, как то, с которым мы познакомились в главе 5, так как здесь части не обязательно должны быть в точности подобны целому. Достаточно того, что части и уменьшенное в масштабе целое имеют одинаковые распределения.

Заметим, что кривые Коха допускают только коэффициенты подобия вида  $r = b^{-k}$ , где  $b$  — целое число, для броуновского же следа сгодится любое  $r$ . Весьма ценное свойство.

## БРОУНОВСКОЕ НУЛЬ-МНОЖЕСТВО САМОПОДОБНО...

Особое значение для изучения броуновских функций имеют множества постоянства, или *изомножества*, координатных функций  $X(t)$

и  $Y(t)$ . Например, нуль-множество определяется в те моменты времени  $t$ , когда  $X(t) = 0$ .

Изомножества самоподобны; их очевидная чрезвычайная разреженность подтверждается и их фрактальной размерностью  $D = 1/2$ . Они представляют собой особый случай пыли Леви, которую мы рассмотрим в главе 32.

**Распределение пустот в броуновских нуль-множествах.** Длины пустот броуновского нуль-множества удовлетворяют соотношению  $\text{Pr}(U > u) = u^{-D}$ , где  $D = 1/2$ . Аналогичное соотношение ( $\text{Nr}(U > u) = u^{-D}$ ), как нам известно, применимо к длинам «пауз» в канторовой пыли; только здесь мы заменили  $\text{Nr}$  на  $\text{Pr}$ , а ступени исчезли из-за рандомизации.

## ... А БРОУНОВСКАЯ ФУНКЦИЯ ВСЕГО ЛИШЬ САМОАФФИННА

Что же касается графиков функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ , а также векторной функции  $B(t)$ , то они являются *не* самоподобными, а всего лишь *самоаффинными*. То есть участок кривой от  $t = 0$  до  $t = 4$  можно покрыть  $M = 4$  его уменьшенными копиями только при условии, что вдоль оси (осей) пространственных координат уменьшение по-прежнему происходит с коэффициентом подобия  $r = 1/2$ , а временная координата при этом уменьшается с *другим* коэффициентом  $r^2 = 1/M$ . Следовательно, размерность подобия для графиков функций  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $B(t)$  не определена.

Более того, аффинные пространства таковы, что расстояния вдоль оси  $t$  и расстояния вдоль осей  $X(t)$  и  $Y(t)$  нельзя сравнивать друг с другом, а это означает, что диски определить невозможно. В результате соотношение  $M(R) \propto R^D$  не имеет в случае броуновских функций аналога, который мог бы послужить для определения размерности  $D$ .

С другой стороны, к ним применимо определение Хаусдорфа – Безиковича. Это вполне согласуется с высказанным в главах 5 и 6 утверждением о том, что определение размерности Хаусдорфа – Безиковича представляет собой наиболее общий – и наиболее громоздкий! – способ интуитивного постижения содержания понятия фрактальной размерности. Значение  $D$  для функции  $X(t)$  равно  $3/2$ , а для функции  $B(t)$   $D = 2$ .

◄ **Набросок доказательства.** На протяжении временного промежутка  $\Delta t$  значение разности  $\max X(t) - \min X(t)$  есть величина порядка  $\sqrt{\Delta t}$ . Для покрытия этого подграфика функции  $X(t)$  квадратами со стороной  $\Delta t$  потребуется порядка  $1/\sqrt{\Delta t}$  квадратов. Следовательно, для покрытия графика на интервале от  $t = 0$  до  $t = 1$  потребуется порядка  $(\Delta t)^{-3/2}$  квадратов. А поскольку это число равно также  $(\Delta t)^{-D}$  (см. главу 5), можно эвристически заключить, что  $D = 3/2$ . ►

## ФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ СЕЧЕНИЙ

Нуль-множество броуновской функции из прямой в прямую представляет собой горизонтальное сечение броуновской функции  $X(t)$ . Применяв правило, сформулированное в главе 23, можно предположить, что размерность нуль-множества составляет  $3/2 - 1 = 1/2$ ; как нам уже известно, так оно и есть. Другие приложения этого правила также обладают огромной эвристической ценностью, в чем мы убедимся немного позже. Правило это имеет и исключения, особенно в случае неизотропных фракталов. Например, вертикальное сечение броуновской функции из прямой в прямую — это всего лишь точка.

Рассуждая аналогичным образом, находим размерность линейного сечения броуновского следа из прямой в плоскость:  $2 - 1 = 1$ , и это в самом деле так.

В более общем виде стандартное правило можно сформулировать следующим образом: если не считать особых конфигураций, коразмерности  $E - D$  при пересечении складываются. Следовательно, коразмерность пересечения  $k$  плоских броуновских следов равна  $k \cdot 0 = 0$ . В частности, можно ожидать, что точки самопересечения броуновского следа образуют множество с размерностью 2 (в самом деле, образуют). (И все же многочисленные точки самопересечения броуновского следа, равно как и сам броуновский след, *не в состоянии* заполнить плоскость.)

Правило сложения коразмерностей можно использовать для доказательства следующего утверждения (некоторое время назад мы уже говорили об этом): броуновское движение почти наверное не возвращается в свою начальную точку  $B(0) = 0$ , однако почти наверное бесконечно часто проходит в произвольной окрестности этой точки. Для того, чтобы придать нашим рассуждениям более общий вид и сделать их пригодными для последующего применения в главе 27 без дополнительной корректировки, обозначим размерность броуновского нуль-множества буквой  $H$ .

В моменты возвращения  $B(t)$  в 0 одновременно выполняются следующие равенства:  $X(t) = 0$  и  $Y(t) = 0$ . Следовательно, эти моменты должны принадлежать пересечению нуль-множеств функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ , каковые множества не зависят друг от друга. Размерность пересечения равна  $1 - 2H$ , что при  $H = 1/2$  составляет  $D = 0$ . Такое значение размерности можно расценивать как явный намек (но всего лишь намек, так как полное доказательство гораздо сложнее) на то, что  $B(t)$  почти наверное не возвращается в точку  $B(0) = 0$ .

А теперь рассмотрим множество моментов времени, когда  $B(t)$  попадает в точку, расположенную внутри горизонтального квадрата со стороной  $2\varepsilon$  и центром в точке 0. Это множество можно приближенно представить как пересечение множеств моментов  $t$ , находящихся на расстоянии  $\varepsilon^{1/H}$  от точек нуль-множеств функций  $X(t)$  и  $Y(t)$ , соот-

ответственно. Для каждого из этих множеств масса, заключенная во временном промежутке  $[0, t]$ , пропорциональна  $\varepsilon^{1/H} t^{1-H}$ , а вероятность того, что именно этот промежуток содержит нужный момент  $t$ , пропорциональна  $\varepsilon^{1/H} t^{-H}$ . Следовательно, вероятность того, что момент  $t$  принадлежит пересечению этих множеств, пропорциональна  $\varepsilon^{2/H} t^{-2H}$ .

Поскольку  $H = 1/2$ , получаем  $\int_0^\infty t^{-2H} dt = \infty$ ; на этом основании в теореме, предложенной Борелем и Кантелли, делается вывод, что количество возвратов  $B(t)$  в квадрат с центром в точке 0 почти наверное бесконечно. Впрочем, можно сказать и «чуть ли не бесконечно». Как следствие, пустоты в ограниченных броуновских сетях начинают — медленно и с видимой неохотой — заполняться.

## СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ НА ЧАСТОЙ РЕШЕТКЕ

Можно генерировать броуновское движение и случайным блужданием на решетке. Здесь мы только упомянем о возможности такого подхода; более подробное обсуждение, ввиду наличия в нем некоторых сложностей, отложим до главы 36.

Мы говорим, что точка  $P(t) = \{X(t), Y(t)\}$ , вложенная в  $\mathbb{R}^2$ , совершает случайное блуждание, если в каждый из последовательных моментов времени, разделенных интервалом  $\Delta t$ , она перемещается на некоторое фиксированное расстояние  $|\Delta P|$  в направлении, которое выбирается случайным образом из доступных в данной решетке.

Если решетка состоит из точек плоскости, координаты которых — целые числа, то величины  $(X + Y)/\sqrt{2}$  и  $(X - Y)/\sqrt{2}$  изменяются при каждом шаге на  $\pm 1$ . Говорят, что каждая из этих величин совершает случайное блуждание на прямой (см. рис. 338). В приблизительном масштабе, т. е. при малом  $\Delta t$  и  $\Delta P = \sqrt{\Delta t}$ , случайное блуждание неотличимо от броуновского движения.

## ПРЯМЫЕ, «БЕЗРЕШЕТОЧНЫЕ», ОПРЕДЕЛЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ $B(t)$

Предыдущие определения броуновского движения основывались либо на временной решетке, либо и на временной, и на пространственной, однако в окончательном результате эти «подпорки» никак себя не проявляют. Я полагаю, что и при описании этого самого результата вполне возможно обойтись без них.

В прямом описании Башелье [12] постулируется, что на некоторой произвольной последовательности равных приращений времени  $\Delta t$  векторы смещения  $\Delta B(t)$  независимы, изотропны и случайны с гауссовым распределением вероятности. Таким образом,

$$\langle \Delta B(t) \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle [\Delta B(t)]^2 \rangle = |\Delta t|.$$

Следовательно, среднеквадратическое значение  $\Delta B$  равно  $\sqrt{|\Delta t|}$ . Это определение не зависит от системы координат, но проекция вектора смещения  $\Delta B(t)$  на любую ось представляет собой гауссову скалярную случайную переменную с нулевым средним и дисперсией, равной  $\frac{1}{2}|\Delta t|$ .

Определение, полюбившееся математикам, идет дальше и обходится без разделения времени на равные промежутки. Оно требует изотропии движений между любой парой моментов времени  $t$  и  $t_0 > t$ . Оно требует независимости движения от предыдущего положения точки. Наконец, оно требует, чтобы вектор из точки  $B(t)$  в точку  $B(t_0)$ , деленный на  $\sqrt{|t_0 - t|}$ , имел приведенную гауссову плотность распределения для всех  $t$  и  $t_0$ .

## ДРЕЙФ И ПЕРЕХОД К $D = 1$

Движение коллоидной частицы в однородно текущей реке или электрона в медном проводнике можно представить как  $B(t) + \delta t$ . След этой функции неотличим от следа функции  $B(t)$  при  $t \ll 1/\delta^2$  и от следа функции  $\delta t$  при  $t \gg 1/\delta^2$ . Таким образом, при  $t_c \propto 1/\delta^2$  и  $r_c \propto 1/\delta$  размерность следа понижается от  $D = 2$  к  $D = 1$ .  $\triangleleft$  В терминологии критических феноменов величина  $\delta$  символизирует расстояние от критической точки, а показатели в формулах для  $t_c$  и  $r_c$  представляют собой критические показатели.  $\blacktriangleright$

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ КРИВЫЕ ПЕАНО

$\triangleleft$  Рандомизация кривых Пеано через срединное смещение проходит так гладко только благодаря исключительным обстоятельствам. Аналогичные конструкции, имеющие в своей основе кривую Пеано с  $N > 2$ , значительно более сложны. Кроме того, если смещение средней точки следует гауссову распределению среднеквадратического значения, равного  $\frac{1}{2}|\Delta B|$  (т. е.  $r_1$  и  $r_2$  суть гауссовы независимые переменные, связанные уже знакомым нам соотношением  $\langle r_1^2 + r_2^2 - 1 \rangle = 0$ ), то тем самым достигается более тесный параллелизм с неслучайным скейлингом. Получаемый в этом случае процесс весьма интересен. Только он не является броуновским движением. И все из-за складок.  $\blacktriangleright$

## РАЗМЕРНОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В качестве достойного завершения этого обсуждения можно упомянуть об одной фрактальной морщине, появившейся недавно на лице квантовой механики. Фейнман и Хиббс [150] отмечают, что типичная траектория квантовомеханической частицы непрерывна и недифференцируема; кроме того, многие авторы усматривают явное сходство между



броуновским и квантовомеханическим движениями (см., например, статью [441] и список литературы к ней). Вдохновившись этими параллелями и моими первыми эссе, Эббот и Уайз [2] показали, что наблюдаемая траектория частицы в квантовой механике представляет собой фрактальную кривую с размерностью  $D = 2$ . Интересная аналогия — по крайней мере, в педагогическом смысле.



**Рис. 338. ВЫБОРОЧНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ КАК ПРИБЛИЖЕНИЕ БРОУНОВСКОЙ ФУНКЦИИ ИЗ ПРЯМОЙ В ПРЯМОЮ (РАЗМЕРНОСТЬ  $D = 3/2$ ) И ЕЕ НУЛЬ-МНОЖЕСТВА (РАЗМЕРНОСТЬ  $D = 1/2$ )**

Самая долгая (и самая простая!) из всех азартных игр началась приблизительно в 1700 г., когда в теории вероятности еще заправляла семья Бернулли. Если наша неизменно симметричная монета падает орлом вверх, то пенни выигрывает Генри, если же выпадает решка, пенни достается Томасу. (На самом деле их звали Петер и Пауль, но я так и не смог запомнить, который из них ставил на орла.)

Некоторое время назад понаблюдать за игрой заходил Уильям Феллер; результаты своих наблюдений он обобщил в виде графика зависимости совокупного выигрыша Генри от количества бросков монеты, каковой график вы можете видеть на рисунке вверху. (Воспроизводится по книге Феллера «Введение в теорию вероятности и ее приложения» (т. 1)<sup>1</sup> с любезного разрешения ее издателей, компании J. Wiley & Sons © 1950.)

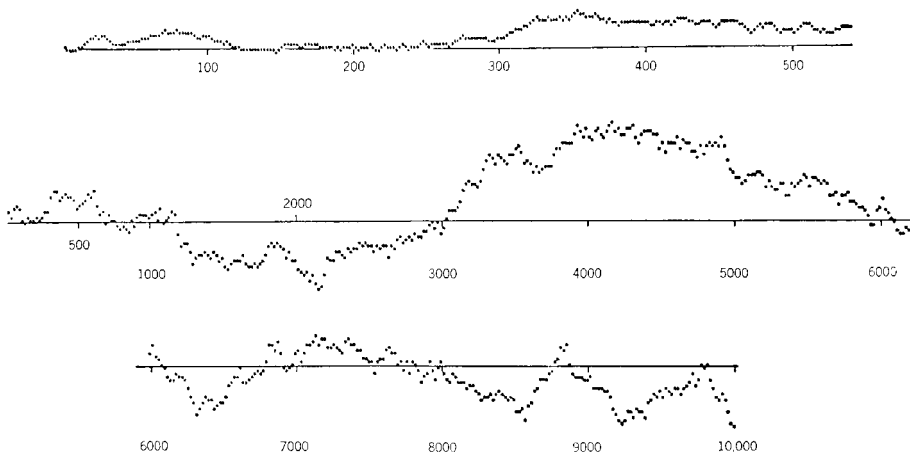
Средний и нижний рисунки представляют совокупный выигрыш Генри за более продолжительную игру; данные снимаются через каждые 20 бросков.

Увеличивая длину наборов данных и уменьшая длину шага, асимптотически получаем выборку значений броуновской функции из прямой в прямую.

На одной из своих лекций Феллер сообщил, что данные рисунки «нетипичны» и были выбраны среди нескольких других, графики на которых выглядели неправдоподобно разбросанно. Как бы то ни было, бесконечное (так мне казалось) созерцание этих графиков сыграло решающую роль в развитии двух теорий, включенных в настоящее эссе.

**О графике в целом.** В [342] имеется высказывание в том смысле, что форма всего графика целиком напоминает силуэт горного массива

<sup>1</sup>Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1.* (См. [147], кроме того имеется русский перевод: Феллер, У. Введение в теорию вероятности и ее приложения. В 2 т. — М.: Мир, 1984). — Прим. перев.



или вертикальный разрез земной коры. Пройдя через несколько обобщений, это наблюдение привело в конце концов к нескольким моделям, описанным в главе 28.

**Нуль-множество графика.** Нуль-множество графика есть множество моментов, когда кошельки Генри и Томаса возвращаются к тому состоянию, в котором они пребывали в момент начала наблюдения. По способу построения графика временные интервалы между нулями взаимно независимы. Однако совершенно очевидно, что *положения* этих нулей независимыми назвать никак нельзя — они образуют *весьма явные скопления*. Например, если рассматривать вторую кривую в том же масштабе, что и первую, то почти каждый нуль предстает в виде целого скопления точек. Имея дело с математическим броуновским движением, эти скопления можно подразделять иерархически до бесконечности.

Когда ко мне обратились за помощью в построении модели распределения ошибок в телефонных линиях, я очень кстати вспомнил о графиках Феллера. Хотя было известно, что ошибки группируются в пакеты (в этом, собственно, и состояла практическая суть возникшей проблемы), я предположил, что интервалы между пакетами могут оказаться взаимно независимыми. Тщательное эмпирическое исследование подтвердило мое предположение и привело к созданию моделей, описанных в главах 8 и 31.

◁ Броуновское нуль-множество образует простейшую пыль Леви, т. е. случайную канторову пыль с размерностью  $D = 1/2$ . Таким же образом можно получить и пыль любой другой размерности  $D$  в интервале

между 0 и 1, нужно только взять нули другой случайной функции. С помощью этой модели можно даже определить фрактальную размерность телефонного канала. Точность значений  $D$  зависит от точности измерения характеристик моделируемого функцией физического процесса. ► ■

---

### **Рис. 340 и 341. БРОУНОВСКИЕ ОБОЛОЧКИ / ОСТРОВА; БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ**

**Броуновская петля.** Под этим термином я подразумеваю след, покрываемый за некоторое конечное время  $\Delta t$  плоским броуновским движением, возвращающимся к своей исходной точке. Этот след представляет собой случайную кривую Пеано, длина инициатора которой равна нулю.

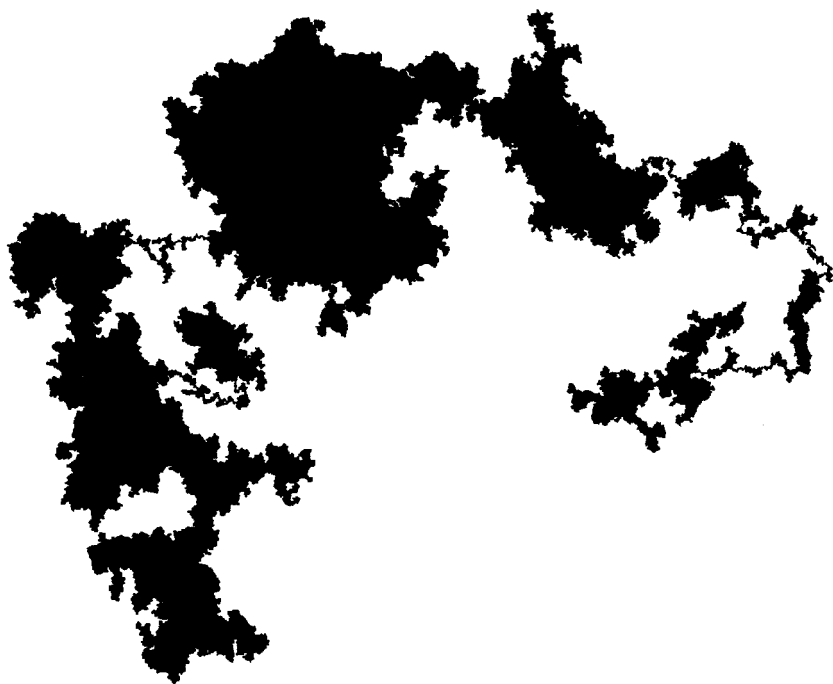
**Рис. 341. Броуновская оболочка.** Будучи (почти наверное) ограниченной, броуновская петля разбивает плоскость на две области: *внешнюю*, любая точка которой может быть соединена с некой отдаленной точкой без пересечения петли, и *внутреннюю*, которую я предлагаю называть *броуновской оболочкой* или *броуновским островом*.

**Рис. 340.** На этом рисунке представлена оболочка броуновского следа, не образующего петли.

**Комментарий.** Я не знаю, проводил ли кто-нибудь исследование броуновских оболочек, но полагаю, что они заслуживают самого пристального внимания. Образцы, изображенные справа, являются результатом 200 000 броуновских шагов, каждый из которых построен на растре  $1\,200 \times 1\,200$ .

По способу построения броуновские оболочки, соответствующие различным значениям  $\Delta t$ , статистически тождественны, за исключением масштаба. И имеются все основания полагать, что мелкие детали границы оболочки асимптотически самоподобны (нет только конкретных доказательств). Граница не может быть масштабно-инвариантной в строгом смысле, так как петлю нельзя разделить на участки одинаковой структуры, однако малые подучастки подходят к масштабной инвариантности весьма близко.

**Броуновское движение без самопересечений.** По причинам, подробно изложенным в главе 36, где мы рассмотрим случайное блуждание без самопересечений, я предлагаю для обозначения границы броуновской оболочки термин *броуновское движение без самопересечений*.

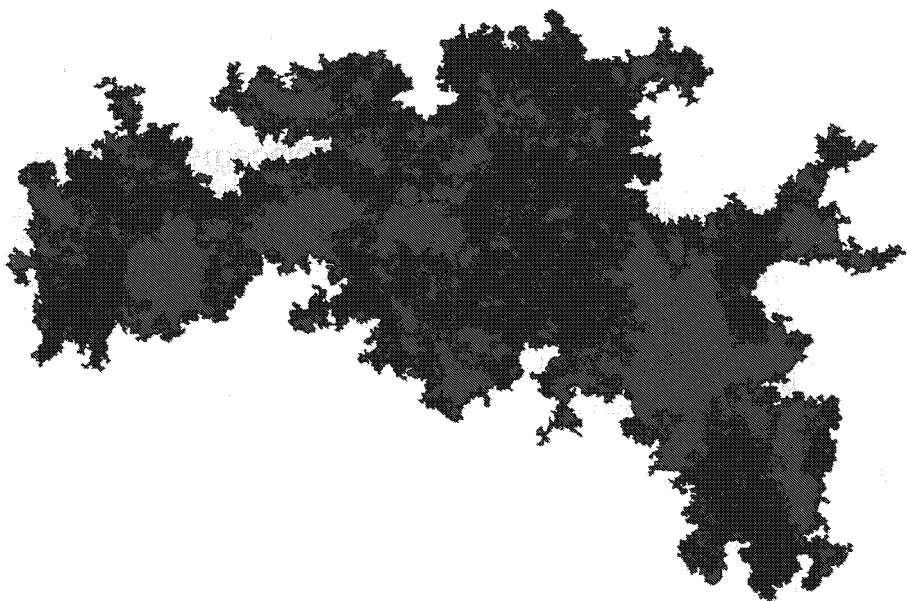


### **Размерность броуновского движения без самопересечений.**

Интерпретировав некоторые известные соотношения (они приведены в главе 36) в том смысле, что размерность случайного блуждания без самопересечений составляет  $4/3$ , я предполагаю, что это верно и для броуновского движения без самопересечений.

Эмпирическая проверка этого предположения дает замечательную возможность проверить заодно и соотношение между длиной и площадью, полученное в главе 12. Плоскость покрывается квадратными решетками (с каждым разом все более частыми), а мы считаем количество квадратов со стороной  $G$ , пересекаемых а) оболочкой — получается  $G$ -площадь — и б) ее границей — получается  $G$ -длина. Графики зависимости  $G$ -длины от  $G$ -площади в двойном логарифмическом масштабе оказываются замечательно прямыми, причем их угловые коэффициенты практически совпадают с  $D/2 = (4/3)/2 = 2/3$ .

Сходство между кривыми на рис. 341 и 325 — и между их размерностями — также заслуживает упоминания.



**Замечание.** Наибольшие открытые области на рис. 341, которую  $B(t)$  не посещает, показаны серым цветом. Их можно рассматривать как тремы, ограниченные фрактальными кривыми; следовательно, петля представляет собой сеть — в том смысле, который мы вкладывали в этот термин в главе 14.

◁ Возникает вопрос: чем же является петля с точки зрения степени ветвления — салфеткой или ковром? Я предполагаю, что верно последнее, так как броуновские сети удовлетворяют свойству Уайберна, описанному на с. 201. Это предположение подтверждается и в статье Какутани и Тонглинга (пока неопубликованной). Следовательно, броуновский след также можно считать универсальной кривой в смысле, определенном на с. 209. ►



## 26 ◊ СЛУЧАЙНЫЕ КРИВЫЕ СРЕДИННОГО СМЕЩЕНИЯ

Повествование, продолжаемое в этой главе, имеет логическое начало в середине предыдущей главы, сразу после раздела о генерации броуновского движения посредством рандомизации кривой Пеано.

Напомним, что  $k$ -й терагон броуновской функции  $B(t)$  прямолинеен между двумя последовательными моментами времени вида  $h2^{-k}$ , а  $(k+1)$ -й терагон получается посредством случайного смещения средних точек сторон  $k$ -го терагона. То же относится и к терагонам  $X_k(t)$  и  $Y_k(t)$  координатных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  функции  $B(t)$ .

Поскольку процедура срединного смещения проходит совершенно гладко с кривыми, размерность которых  $D = 2$ , возникает вполне естественное желание попробовать адаптировать ее к оригинальной снежинке и другим кривым Коха с  $N = 2$ , а затем применить упомянутую процедуру к построению поверхностей. Этим мы сейчас и займемся.

Пытаясь воспроизвести и улучшить графику «Фракталов» 1977 г. и обойтись при этом наиболее прямыми и наименее дорогостоящими процедурами, многочисленные художники, специализирующиеся в создании фильмов и графических работ с помощью компьютера, применяли, как правило, один и тот же общий подход. Эти специалисты оказались не способны осознать, что метод случайного срединного смещения дает результаты, существенно отличающиеся от тех, что они стремились достичь. Простота и в самом деле входит в число достоинств этого метода, однако вместе с тем он обладает многими другими, часто вовсе нежелательными особенностями.

### ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОГРАНИЧЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ КРИВЫЕ КОХА С ВРЕМЕННОЙ РЕШЕТКОЙ

Напомним, что можно построить снежинку Коха с основанием  $N = 2$ , используя генератор, составленный из двух интервалов длины  $1/\sqrt{3}$ . В этом случае — вообще говоря, в любом случае, когда генератор состоит из двух интервалов длины  $2^{-1/D}$ , где  $D < 2$ , — само построение определяет, в каком направлении смещаются средние точки сторон  $k$ -го терагона: влево или вправо. Смещение всегда ортогонально

к соответствующей стороне, и квадрат его длины задается следующей разностью:

$$2^{-2(k+1)/D} - 2^{-2(k/D+1)}.$$

Рандомизация такого построения происходит так же, как и преобразование кривой Пеано в броуновское движение. Направление смещения полагаем случайным и изотропным, вне зависимости от того, каким оно было на предыдущем этапе; распределение длины смещения полагаем гауссовым, а вышеприведенную формулу применяем к *среднеквадратическому* смещению. При этом мы не предпринимаем ничего для предотвращения самопересечений, и предельная фрактальная кривая просто изобилует ими. Обозначим ее через  $B_H^*(t)$ , где  $H = 1/D$ , что вскоре получит исчерпывающее объяснение.

В результате соотношение между смещением  $\Delta B_H^*$  на временном промежутке  $2^{-k}$  и двумя интерполированными смещениями  $\Delta_1 B_H^*$  и  $\Delta_2 B_H^*$  принимает вид

$$\langle |\Delta_1 B_H^*|^D + |\Delta_2 B_H^*|^D - |\Delta B_H^*|^D \rangle = 0,$$

где  $D$  — некоторая произвольно заданная величина, меньшая 2.

Отсюда следует, что если временной интервал  $[t', t'']$  является двоичным, т. е. если  $t' = h2^{-k}$  и  $t'' = (h+2)2^{-k}$ , то верно следующее:

$$\langle |\Delta B_H^*|^2 \rangle = \Delta t^{2/D} = |\Delta t|^{2H}.$$

Величину  $H$  в качестве параметра мы выбрали потому, что она представляет собой показатель при среднеквадратическом смещении.

Можно также показать, что если  $B_H^*(0) = 0$ , то функция  $B_H^*(t)$  статистически самоподобна относительно отношений приведения вида  $2^{-k}$ . Это — весьма желательное обобщение наших знаний о конструкциях с размерностью  $D = 2$ .

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРИРАЩЕНИЯ

Не будем, однако, радоваться слишком бурно. Функция  $B_H^*(t)$  является статистически самоподобной относительно отношений приведения иного, нежели  $2^{-k}$ , вида *только* в пеано-броуновском случае ( $D = 2$ ), когда она сводится к  $B(t)$ .

Более серьезная проблема возникает тогда, когда интервал  $[t', t'']$  не является двоичным, хотя и имеет ту же длину  $\Delta t = 2^{-k}$  — например, если  $t' = (h-0,5)2^{-k}$  и  $t'' = (h+0,5)2^{-k}$ . На таких интервалах приращение  $\Delta B_H^*$  имеет *иную* и меньшую дисперсию, зависящую от  $k$ . Нижняя граница этой дисперсии выглядит как  $2^{1-2H} \Delta t^{2H}$ . Более того,

если известна величина  $\Delta t$ , а время  $t$  не известно, то распределение соответствующего приращения  $\Delta B_H^*$  не является гауссовым, но представляет собой случайную смесь различных гауссовых распределений.

В результате складки, возникающие в двойных точках аппроксимирующего тетагона, остаются и в предельной кривой. При размерности  $D$  чуть меньше 2 (т.е. при  $H$  чуть больше  $1/2$ ) складки довольно незначительны. Однако, когда значение  $H$  приближается к 1 (в главе 28 мы увидим, что при моделировании рельефа поверхности Земли нам приходится иметь дело с  $H \sim 0,8 \div 0,9$ ), складки становятся очень заметными — их можно увидеть и на выборочных функциях. Единственным способом избежать их оказывается отказ от рекурсивной схемы срединного смещения, что мы и сделаем в следующем разделе и в главе 27.

## СЛУЧАЙНО РАЗМЕЩЕННЫЕ СЛОИ

$\triangleleft$  Для того чтобы установить причину нестационарности кривых и поверхностей срединного смещения, рассмотрим координатную функцию  $X(t)$  некоторой кривой  $B_H^*(t)$ . На каждом этапе построения мы получаем некоторую ломаную функцию  $\Delta_k X(t) = X_k(t) - X_{k-1}(t)$ , нуль-множество которой, во-первых, периодически с периодом  $2^{-k}$  и, во-вторых, включает в себя нуль-множество функции  $\Delta_{k-1} X(t)$ . То есть можно сказать, что каждая такая ломаная функция находится в синхронии со всеми последующими.

Из-за того, что нуль-множества периодичны и синхронны («иерархичны»), приращения не могут быть стационарными. И наоборот, стационарности можно достичь путем устранения этих свойств.

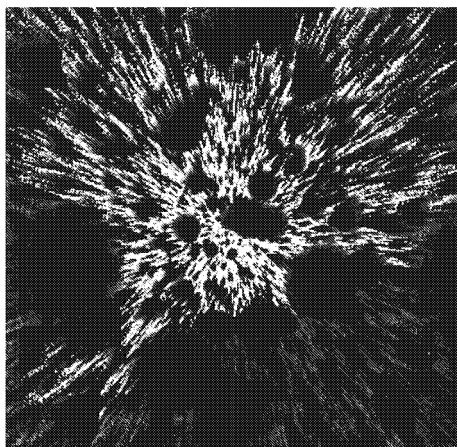
Один из подходов состоит в построении ломаной функции  $\Delta B_k^\dagger(t)$  следующим образом. Выберем пуассоновскую последовательность моментов времени  $t_n^{(k)}$  со средним числом точек на единицу времени, равным  $2^k$ , затем положим, что функция  $\Delta B_k^\dagger(t_n^{(k)})$  принимает независимые и одинаково распределенные случайные значения, и, наконец, произведем линейную интерполяцию между моментами времени  $t_n^{(k)}$ . Бесконечная сумма  $B_H^\dagger(t)$  таких вкладов представляет собой некую стационарную случайную функцию, впервые описанную в докторской диссертации гидролога О. Дитлефсена (1969). (См. также [424] и [370].)

Оглянувшись назад, мы видим, что такое обобщение вовсе не требует, чтобы среднее число нулей было равно  $2^k$ . Оно может иметь вид  $b^k$ , где  $b$  — любая вещественная база, большая 1.

Допустимые отношения приведения соответствующего фрактала задаются дискретной последовательностью  $r = b^{-k}$ . По мере того как  $b \rightarrow 1$ , эта последовательность становится все более плотной, — в сущности, асимптотически непрерывной. Таким образом, функция  $B_H^\dagger(t)$  стано-



вится как нельзя более приемлемой для тех, кому нужны стационарность и широкий выбор коэффициентов подобия. Однако при этом она, к сожалению, теряет свою специфичность. Из рассуждений в [370] явствует, что функция  $B_H^\dagger(t)$  сходится к случайной функции  $B_H(t)$ , которую мы рассмотрим в следующей главе. ►



**Рис. 345. В РОЛИ ХУДОЖНИКА — ОШИБКА В ПРОГРАММЕ, ОПУС 1**

Авторство этой иллюстрации можно частично приписать ошибочному программированию. Ошибку вовремя распознали и исправили (*после* сохранения результата, разумеется!); конечным результатом вы можете полюбоваться на рис. 424–427.

Изменения, явившиеся результатом пустяковой ошибки в критическом месте, далеко превзошли наши наихудшие опасения.

Очевидно, что по замыслу в «правильных» иллюстрациях должен был наличествовать весьма строгий порядок. Здесь этот порядок оказался нарушен, причем никакого другого порядка также не наблюдается.

То, что эта иллюстрация — по крайней мере, на первый взгляд, — вполне может сойти за произведение высокого искусства, явно не случайно. Свои соображения на этот счет я вкратце высказал в [399] и намерен изложить их в полном виде в самом ближайшем будущем.

# IX ◊ ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЫ

---

## 27 ◊ СТОКИ РЕК. МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕТИ И ШУМЫ

Переход к дробным броуновским фракталам знаменует собой один из важнейших поворотных пунктов настоящего эссе. До сих пор мы придерживались фракталов, связанных с временными и/или/ пространственными решетками, которые налагали определенные ограничения на свойства инвариантности фракталов, т. е. на допустимые преобразования сдвига и подобия, отображающие данный фрактал на себя.

Такие ограничения противоречат второму доводу в пользу рандомизации фракталов, изложенному в главе 22. Более того, в большинстве занимающих нас случаев они не имеют никакого физического смысла. И вот теперь, в главах 27–35, мы займемся, наконец, фракталами, инвариантности которых и при сдвиге, и при преобразовании подобия остаются ничем не ограниченными.

В этой главе мы рассмотрим обобщенное броуновское движение (обозначив его через  $B_H(t)$ ), которое в [404] называется дробным броуновским движением (сокращенно, ДБД). В качестве мотивации здесь выступит необходимость отыскания закономерности изменения объемов годового стока рек, а кроме того, упоминаются масштабно-инвариантные сети и шумы (« $1/f$ -шумы»). Главы 28–30 посвящены исследованию соответствующих поверхностей.

### КАК ВАЖНО БЫТЬ ГАУССОВЫМ

Первой чертой, объединяющей главы 27–30, является то, что все они занимаются исключительно гауссовыми процессами. Статистики полагают, что «гауссовость» непременно представляет собой нечто чрезвычайно особенное, однако я с некоторых пор не разделяю эту точку зрения. (См. мои замечания по этому поводу в главе 42.) Тем не менее,

гауссовы процессы остаются своего рода эталонным тестом, и их следует изучать прежде, чем мы начнем двигаться дальше.

## НЕРЕКУРСИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Еще одна присущая главам 27–30 особенность не встречается ни в каком другом месте настоящего эссе.

Конструкции (и случайные, и нет), описываемые в других главах, строятся рекурсивно, т. е. посредством добавления все более мелких деталей к менее детализированным формам, полученным на предыдущих этапах построения. Свойства получающегося при этом фрактала выводятся из правил построения.

Теперь же мы начинаем с объявления желательными тех или иных свойств и только затем находим такие правила построения, которые удовлетворили бы нашим пожеланиям. Хотя искомые свойства легко формулируются и *выглядят* простыми, реализующие их правила, к сожалению, нерекурсивны и, более того, часто весьма неприятны.

Если все так плохо, то почему же мы продолжаем настаивать на этих свойствах? Потому что в их число входят такие свойства, как самоподобие и отсутствие складок (т. е. стационарность), составляющие самую суть науки вообще и теории фракталов в частности.

Относительная ценность «аксиоматического» подхода, используемого в этой главе, видна особенно отчетливо, когда его результат сравнивается с фракталом, полученным рекурсивно. Представьте себе, например, что вы исследуете какой-то конкретный случай, требующий построения плоской фрактальной кривой, размерность  $D$  которой лежит где-то между 1 и 2, и не можете решить, какой метод для этого использовать: процесс срединного смещения из главы 26 или процесс, описываемый ниже. В первом *неизбежны* складки, тогда как второй лишен этого недостатка. А последовательность дискретных этапов, из-за которой рекурсивные построения представляются столь привлекательными, оборачивается в большинстве случаев возникновением слоев, не имеющих никакого смысла, а зачастую и вовсе нежелательных.

## ЭФФЕКТ ИОСИФА И ЭФФЕКТ НОЯ

Прозвучавшее в первой главе утверждение о том, что негладкие природные структуры издавна привлекали внимание людей, как правило, очень трудно подтвердить документально. Однако в Библии имеются два совершенно очаровательных исключения из этого правила:

*«... и отворились все источники земные, и отверзлись хляби небесные. И лил дождь на землю сорок дней и сорок ночей.»*  
Бытие, 6: 11–12.

«. . . и были семь лет великого изобилия во всей земле египетской. И были после них семь лет голода.» Бытие, 41: 29–30.

В истории Ноя сложно не увидеть иносказательного повествования о неравномерности выпадения осадков на Ближнем Востоке, а в истории Иосифа — о том, что дождливые и засушливые годы имеют тенденцию группироваться по нескольку подряд. В курсе лекций «Новые формы случайности в науке» (не опубликованном, но частично изложенном в [405] и [373]) я даже предложил для описываемых в этих историях явлений особые термины: *эффект Ноя* и *эффект Иосифа*.

Как подтверждают данные из достоверных источников, библейские «семь и семь» лет представляют собой не что иное, как поэтическое упрощение реальности, а любая кажущаяся периодичность в записях об уровне воды в Ниле — не более, чем иллюзия (хотя это уже не так очевидно). С другой стороны, твердо установленным фактом является то, что последовательные годовые данные по стоку и уровню паводка Нила и многих других рек демонстрируют чрезвычайно высокую степень персистентности<sup>1</sup>.

Эта персистентность в равной степени является и предметом живого интереса со стороны самых разных ученых, и жизненно важным фактором для проектировщиков плотин. Однако в течение долгого времени она оставалась недоступной измерению, а следовательно, и анализу. Как всякая наука, делающая свои первые шаги в статистике, гидрология начала с допущения, что последовательные объемы стока любой реки представляют собой независимые, одинаково распределенные гауссовы переменные, или белый гауссов шум. Следующим шагом стало допущение существования между ними марковской зависимости. Обе модели, однако, ни в малейшей степени не соответствуют реальности. Прорыв произошел вместе с выходом моей работы [348], основанной на эмпирических результатах Херста [232, 233]. (Биографию Херста читайте в главе 40.)

## ФЕНОМЕН ХЕРСТА. ПОКАЗАТЕЛЬ $H$

Обозначим через  $X^*(t)$  совокупный сток реки за период от начала нулевого года до конца  $t$ -го года. Согласуем его посредством вычитания *выборочного* среднего стока за период между нулевым и  $d$ -м годами и определим величину  $R(d)$  как разность между максимумом и минимумом согласованного стока  $X^*(t)$  при  $0 < t < d$ . При таком определении величина  $R(d)$  представляет собой пропускную способность, какой должен обладать водоем для обеспечения идеального функционирования

<sup>1</sup>Т. е. устойчивости, долговечности. Термин образован Мандельбротом от лат. *persistere* «пробывать, оставаться». — *Прим. ред.*

на протяжении соответствующего числа лет ( $d$ ). Водоем функционирует идеально, если уровень воды в нем в конце и в начале указанного периода одинаков, водоем никогда не пустеет, никогда не переполняется и производит однородный поток. Идеал, очевидно, недостижим, однако величину  $R(d)$  вполне можно брать за основу метода проектирования водохранилищ, — например метода, предложенного Рипплом и примененного при строительстве Асуанской плотины. Херсту пришлось в голову, что  $R(d)$  можно использовать и в качестве инструмента исследования действительного поведения статистики речных стоков. Из соображений удобства он разделил  $R(d)$  на коэффициент подобия  $S(d)$  и рассмотрел зависимость отношения  $R(d)/S(d)$  от  $d$ .

Если допустить, что объемы годовых стоков представляют собой белый гауссов шум, то коэффициент  $S$  теряет свою значимость, а совокупный сток  $X^*(t)$ , согласно известной теореме, приблизительно совпадает с броуновской функцией из прямой в прямую  $B(t)$ . Следовательно, пропускная способность  $R(d)$  прямо пропорциональна среднеквадратическому объему стока  $X^*(d)$ , который, в свою очередь, прямо пропорционален  $\sqrt{d}$ . Отсюда получаем  $R/S \propto \sqrt{d}$  (см. [146]). Тот же результат верен и в том случае, если объемы годового стока зависимы, но зависимость эта марковская ◁ с конечной дисперсией ▶, или в том случае, когда зависимость объемов стока принимает какую-либо из форм, описанных в элементарных учебниках по статистике или теории вероятности.

Однако, руководствуясь результатами наблюдений, Херст пришел к совершенно иному и абсолютно неожиданному выводу, который заключается в том, что  $R/S \propto d^H$ , где  $H$  почти всегда *больше*  $1/2$ . Объемы годового стока Нила (самые зависимые из всех) демонстрируют  $H = 0,9$ . Для рек Св. Лаврентия, Колорадо и Луары показатель  $H$  находится где-то между  $0,9$  и  $1/2$ . Рейн — река особенная, ее совершенно не волнует ни история Иосифа, ни феномен Херста, и она держит показатель  $H$  на уровне  $1/2$  с точностью до экспериментальной погрешности. Результаты всевозможных наблюдений можно найти в работе [407].

## ШУМ ХЕРСТА — МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ШУМ

Флуктуацию (или шум)  $X(t)$ , для которой выполняется соотношение  $R/S \propto d^H$ , я предлагаю называть *шумом Херста*. В [384] показано, что величина показателя должна удовлетворять неравенству  $0 \leq H \leq 1$ .

В ответ на вызов Х. А. Томаса-младшего, усомнившегося в моей способности дать объяснение феномену Херста, я рискнул предположить, что дело здесь в масштабной инвариантности. Для того чтобы дать наглядное определение масштабного шума, вспомним о том, что любую естественную флуктуацию можно обработать таким образом, чтобы ее стало слышно — о чем, собственно, говорит и сам

термин *шум*. Запишем ее на пленку и прослушаем через громкоговоритель, который точно воспроизводит диапазон частот, скажем, от 40 до 14 000 Гц. Затем прослушаем эту же пленку на большей или меньшей скорости. В общем случае можно ожидать, что характер звука существенно изменится. Скрипка, например, будет звучать совсем не так, как должна звучать скрипка. А если проиграть на достаточно большой скорости песню кита, то она станет слышимой для человеческого уха. Имеется, однако, некий особый класс звуков, которые ведут себя совсем иначе. Достаточно лишь подрегулировать громкость, и после изменения скорости движения пленки громкоговоритель воспроизведет звук, неотличимый на слух от исходного. Я предлагаю называть такие звуки или шумы *масштабно-инвариантными*.

Белый гауссов шум после вышеописанных трансформаций представляет собой все то же маловразумительное гудение, а следовательно, его можно считать масштабнo-инвариантным. Однако для создания моделей можно приспособить и другие масштабнo-инвариантные шумы.

## ДРОБНАЯ ДЕЛЬТА-ДИСПЕРСИЯ

В главе 21 дельта-дисперсия случайной функции определяется как дисперсия приращения функции за приращение времени  $\Delta t$ . Дельта-дисперсия обыкновенной броуновской функции равна  $|\Delta t|$  (см. главу 25). Как я отметил в [348], для объяснения соотношения Херста  $R(d)/S(d) \propto d^H$ , где  $H$  может принимать любое значение, вполне *достаточно*, чтобы кумулятивный процесс  $X^*$  был гауссовым процессом с обращающимся в нуль дельта-ожиданием и дельта-дисперсией, равной  $|\Delta t|^{2H}$ . Эти условия определяют некоторый уникальный масштабнo-инвариантный случайный гауссов процесс. А поскольку показатель  $2H$  представляет собой дробное число, этот уникальный процесс может с полным правом называться *дробной броуновской функцией из прямой в прямую* (приведенной). Подробности и иллюстрации можно найти в [404, 405, 406, 407, 408].

Переходя от функций из прямой в прямую к функциям  $B_H(t)$  из прямой в плоскость, можно предложить в качестве необходимого дополнения следующее альтернативное определение: среди кривых с размерностью  $D = 1/H$ , параметризованных по времени, след функции  $B_H(t)$  является единственной кривой, приращения которой подчиняются гауссову распределению и стационарны относительно *любого* смещения (т. е. «лишены складок»), а также масштабнo-инвариантны относительно *любого* значения коэффициента  $r > 0$ .

Значение  $H = 1/2$  (или  $D = 2$ ) соответствует обыкновенному броуновскому движению, которое, как мы знаем, представляет собой процесс, *не проявляющий персистентности* (т. е. его приращения независимы). Остальные ДБД распадаются на два резко отличных друг от

друга семейства. Значения показателя Херста  $1/2 < H < 1$  соответствуют *персистентному* ДБД, следами которого являются кривые с размерностью  $D = 1/H$ , причем  $1 < D < 2$ . Значения показателя Херста  $0 < H < 1/2$  соответствуют *антиперсистентному* ДБД.

## ДРОБНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

После того, как желательная дельта-дисперсия определена, остается реализовать ее на практике. Если мы начинали с броуновского движения, то теперь следует привнести в него персистентность. Стандартным методом для этого является интегрирование, однако оно вносит больше персистентности, чем нам необходимо. К счастью, существует способ получить при интегрировании лишь некоторую часть стандартного эффекта. При  $0 < H < 1/2$  то же верно и для дифференцирования. Идея такого способа скрывается в одном из «классических, но не вполне ясных» закоулков математики. Впервые она пришла в голову еще Лейбницу (см. главу 41), а затем была воплощена Риманом, Лиувиллем и Вейлем.

Из школьного курса дифференциального исчисления мы помним, что если  $m$  — некоторое целое положительное число, то  $m$ -кратным дифференцированием функция  $x^{1/2}$  преобразуется в функцию  $x^{1/2-m}$ , а  $m$ -кратным интегрированием — в функцию  $x^{1/2+m}$  (не забываем, разумеется, об умножении каждый раз на соответствующую константу). Алгоритм Римана–Лиувилля–Вейля обобщает это преобразование на случай нецелого  $m$ , а дробное интегриродифференцирование порядка  $1/D - 1/2$ , примененное к броуновскому движению, дает ДБД. Таким образом, обычная броуновская формула (смещение)  $\propto \sqrt{\text{время}}$  заменяется ее обобщенным вариантом (смещение)  $\propto (\text{время})^{1/D}$ , где  $1/D \neq 1/2$ . Чего мы, собственно, и добивались.

Соответствующие формулы приведены в [404], а приближения (настоящие) описаны в [408] и [364].

◁ Здесь имеется еще одна сложность — можно сказать, потенциальная ловушка. Алгоритм Римана–Лиувилля–Вейля включает в себя свертку, и, как следствие, может возникнуть искушение реализовать его через метод быстрого преобразования Фурье (БПФ). Поступив таким образом, мы получим периодическую функцию, т. е. функцию с исключенным систематическим трендом. При исследовании стандартных временных рядов исключение тренда не имеет практически никаких последствий, так как зависимость ограничена весьма кратким временным промежутком. В случае же ДБД исключение тренда последствия имеет (тем больше, чем больше  $|H - 1/2|$ ), причем они могут оказаться очень и очень значительными. В развернутом контексте этот эффект можно проиллюстрировать сравнением различных горных пейзажей на рисунках, помещенных после следующей главы. Рисунки 370 и 371, полученные

с помощью БПФ, не демонстрируют никакого общего тренда и, как следствие, имитируют форму горных вершин, тогда как на рисунке 374, полученном без каких бы то ни было упрощений, общий тренд ясно виден.

Поскольку БПФ чрезвычайно экономично, часто бывает удобнее использовать все-таки его, однако период следует брать значительно длиннее, чем ожидаемый размер выборки, а также не забывать учитывать потери, которые возрастают, по мере того как  $H \rightarrow 1$ .  $\blacktriangleright$

## $H > 1/2$ : ДОЛГОВРЕМЕННАЯ (БЕСКОНЕЧНО ДОЛГАЯ) ПЕРСИСТЕНТНОСТЬ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

Существенное свойство функции  $B_H(t)$  в случае  $H > 1/2$  заключается в весьма особенном поведении персистентности ее приращений: она распространяется на *бесконечно долгий срок*. Следовательно, связь между ДБД и феноменом Херста подразумевает, что персистентность, наблюдаемая в гидрологической статистике, не ограничена короткими временными интервалами (такими, например, как срок службы фараоновых министров), но распространяется на века (одни дождливые, другие засушливые) и даже на тысячелетия. Степень персистентности измеряется параметром  $H$ .

Персистентность весьма ярко проявляет себя на графиках приращений функции  $B_H(t)$  и в статистике объемов годового стока рек, каковую статистику и моделируют эти приращения. Почти все выборки выглядят как «случайные шумы» на некотором фоне, проходящие несколько циклов вне зависимости от длины выборки. Однако эти циклы *не* являются периодическими, т. е. их *нельзя* экстраполировать при увеличении длины выборки. Кроме того, в такой выборке можно часто наблюдать некий основополагающий тренд, который вовсе не обязательно продолжится в экстраполяции.

Эти наблюдения становятся еще интереснее, если учесть, что аналогичное поведение статистических выборок часто наблюдается в экономике: излюбленным занятием экономистов является разложение *любого* набора данных на тренд, несколько циклов и шум. Такое разложение призвано облегчить понимание основополагающих механизмов экономики, однако, как мы только что увидели на примере ДБД, и тренд, и циклы могут быть порождены шумом, который сам по себе ничего не значит.

$\triangleleft$  **Интерполяция.** В том случае, когда обыкновенная броуновская функция  $B(t)$  известна в моменты времени  $t_1, t_2, \dots$  (не обязательно равноотстоящие), ожидаемые значения  $B(t)$  между этими моментами вычисляются с помощью линейной интерполяции. В частности, интерполяция на интервале  $[t_j, t_{j+1}]$  зависит *исключительно* от значений  $B_H$



в моменты  $t_j$  и  $t_{j+1}$ . И напротив, во всех случаях  $H \neq 1/2$  интерполяция функции  $B_H(t)$  нелинейна и зависит от всех  $t_m$  и от всех  $B_H(t_m)$ . При увеличении значения  $t_m - t_j$  влияние  $B_H(t_m)$  уменьшается, но медленно. Таким образом, интерполяцию функции  $B_H$  можно описать как глобальную. Случайные кривые срединного смещения, рассмотренные в главе 26, ведут себя совершенно иначе, поскольку их интерполяции линейны на определенных временных интервалах. В этом и заключается самая суть различия между двумя упомянутыми процессами.  $\blacktriangleright$

## РАЗМЕРНОСТЬ $D$ ОБОБЩЕННОЙ БРОУНОВСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ НУЛЬ-МНОЖЕСТВА

Приращения персистентны, и график функции  $B_H(t)$  менее иррегулярен, чем график обыкновенной броуновской функции  $B(t)$ , причем во всех масштабах. Это выражается в размерности функции  $B_H(t)$  ( $D = 2 - H$ ). Размерность ее нуль-множества равна  $1 - H$ .

### $H > 1/2$ : ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ СЛЕДЫ

В случае двумерной векторнозначной функции  $B_H(t)$  нас будут интересовать движения, направления которых стремятся к персистентности во всех масштабах. Персистентность включает в себя достаточно сильное стремление (не подразумевающее, однако, обязательности) избежать самокасаний. А поскольку в настоящем эссе мы желаем сохранить и самоподобие, допустим, что координатные функции  $X_H(t)$  и  $Y_H(t)$  представляют собой дробные броуновские функции из прямой в прямую от времени, статистически независимые и характеризующиеся одним параметром  $H$ . Таким образом, мы получаем дробный броуновский след из прямой в плоскость (см. рис. 357).

Фрактальная размерность такого следа определяется как  $D = 1/H$ ; ее наименьшее значение  $D = 1/1 = 1$ , каким оно, собственно, и должно быть у кривой, а наибольшее —  $D = 1/(1/2) = 2$ . Последнее значение предполагает, что след функции  $B_H(t)$  заполняет плоскость менее «плотно», чем обыкновенный броуновский след. Для того, чтобы подтвердить это предположение, рассмотрим по отдельности ограниченный и неограниченный следы.

Влияние параметра  $H$  на ограниченные следы носит чисто количественный характер. При  $H > 1/2$  (равно как и при  $H = 1/2$ ) ограниченный броуновский след представляет собой фрактальную сеть, пронизанную бесконечным количеством пустот. Исходя из сильных эвристических соображений, можно предположить, что площадь этих пустот удовлетворяет равенству  $\text{Pr}(U > u) \propto u^{-D/E} = u^{1/2H}$ .

Кроме того, я экспериментально исследовал границы ограниченных следов с различными  $D$  в поисках отклонения от значения  $4/3$ , каковое значение, согласно пояснению к рис. 340, наблюдается в броуновском случае. Никакого сколько-нибудь явного отклонения я не обнаружил!

На *неограниченные* же следы параметр  $H$  оказывает качественное влияние. Если след начинается в точке  $O$  в момент времени  $0$ , то известно, что ожидаемое количество его возвращений в малую окрестность точки  $O$  бесконечно для броуновской модели; однако при  $H > 1/2$  оно становится конечным.  $\triangleleft$  Причина заключается в том, что интеграл  $\int_1^{\infty} t^{-2H} dt$ , полученный в предпоследнем разделе главы 25, при  $H = 1/2$  расходится, а при  $H > 1/2$  сходится.  $\blacktriangleright$  Когда в одном объеме укладывается некоторое конечное число фрактальных сетей, покрытие становится менее лакунарным, однако достичь таким образом плотного покрытия почти наверное невозможно. Количество уложенных в одном объеме решеток мало, если значение параметра  $H$  близко к 1, и устремляется к бесконечности при  $H = 1/2$ .

## $H < 1/2$ : АНТИПЕРСИСТЕНТНЫЕ ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Дробные броуновские движения с  $0 < H < 1/2$  описываются *антиперсистентными* функциями и следами. Под антиперсистентностью подразумевается стремление постоянно возвращаться к исходной точке, следствием чего является *более медленное* (чем у броуновских аналогов) рассеяние.

Формула  $D = 1/H$  справедлива только при условии, что  $E > 1/H$ . Если же  $E < 1/H$  (особенно в случае плоскости,  $E = 2$ ), то фрактальная размерность достигает наибольшего возможного значения,  $D = E$ . Напомним, что наибольшим возможным значением размерности для броуновского следа является  $D = 2$ , и этот максимум может быть реализован только в случае  $E \geq 2$ . Если втиснуть броуновский след в реальную прямую с размерностью  $E = 1$ , то ему придется примириться с  $D = 1$ . При  $H = 1/3$  след ДБД едва заполняет обыкновенное 3-пространство.

В случае же плоскости ( $E = 2$ ) анализ размерностей показывает, что неограниченный след с  $H < 1/2$  почти наверное посещает любую заданную точку бесконечно часто. Таким образом, в противоположность функции  $B(t)$ , которая не совсем отвечает ожиданиям, связанным с ее размерностью  $D = 2$ , и заполняет плоскость плотно, но не полностью, броуновский след при любом превышении параметром  $1/H$  значения 2 заполняет плоскость полностью. Для доказательства того, что след  $B_H(t)$  почти наверное бесконечно часто возвращается к своей исходной точке, вспомним из главы 25, что размерность множества

моментов возвращения равна  $1 - 2H$  и, как следствие, при  $H < 1/2$  положительна. Это же рассуждение справедливо и для точек, отличных от  $O$ . Следовательно, пересечение неограниченного дробного броуновского следа при  $H < 1/2$  с единичным квадратом имеет единичную же площадь.

Ограниченный след представляет собой сеть с пустотами, однако площадь его положительна (привет из главы 15!).

## «ХОРОШО МОТИВИРОВАННАЯ» ДРОБНАЯ БРОУНОВСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЧНОГО СТОКА

Нужно заметить, что первоначальная мотивировка введения функции  $B_H$  основана на личном опыте пишущего эти строки геометра, чьи математические и графические приемы, как правило, срабатывают. Я готов поспорить, что отсутствие серьезной мотивировки в модели, которая согласуется с явлением и должным образом работает, гораздо предпочтительнее, нежели недостаток согласованности в модели, которая выглядит хорошо мотивированной; однако ученым подавай и то, и другое. К сожалению, существующие «объяснения» несколько, на мой взгляд, надуманны и еще менее ясны, чем само объясняемое явление.

Для того чтобы понять, почему последовательные объемы годового стока рек являются независимыми величинами, следует начинать с учета объема воды, проходящей через естественные водоемы за сезон. Однако при естественном способе хранения ресурса мы получаем краткосрочное сглаживание статистики и можем рассчитывать, в лучшем случае, лишь на краткосрочную персистентность. С точки же зрения долговременности размерность графика совокупного стока остается, по существу (или «эффективно» — в том смысле, в каком это слово употреблено в главе 3), равной  $3/2$ .

Двигаясь дальше, стоит ознакомиться с трудами многочисленных авторов, которые гораздо лучше меня подкованы в извлечении на свет целой иерархии процессов, каждый из которых имеет собственный масштаб. В простейшем случае вклады компонентов носят аддитивный характер. Первый компонент отвечает за естественные водоемы, второй учитывает микроклиматические изменения, третий — макроклиматические изменения и т. д.

К сожалению, бесконечный диапазон персистентности требует бесконечного количества компонентов, и в итоге модель обзаводится бесконечным же количеством параметров. Необходимо еще объяснить, почему сумма различных вкладов масштабно-инвариантна.

На одном из этапов обсуждения функция (корреляция) записывается как бесконечная сумма экспоненциальных функций. Я уже не помню, сколько раз я пытался убедить окружающих в том, что показать гипербо-

личность этой суммы ничуть не проще, чем объяснить гиперболичность исходной кривой, и сколько бесконечных часов потратил я на доказательство того, что все попытки высосать эту причину из пальца обладают лишь магической (но никак не научной) ценностью — по крайней мере до тех пор, пока остаются безрезультатными. Можете себе представить, каким облегчением оказалось для меня открытие, что я не одинок в своих трудах, — и самому Джеймсу Клерку Максвеллу приходилось в свое время заниматься чем-то подобным (см. раздел МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ: ЖИВУЧИЕ ПАНАЦЕИ ИЗ ПРОШЛОГО в главе 41).

Разумеется, практикующему инженеру-гидрологу ничего не стоит навязать любому процессу конечный внешний порог, величина которого будет сравнима со сроками выполнения самого затянутого инженерного проекта.

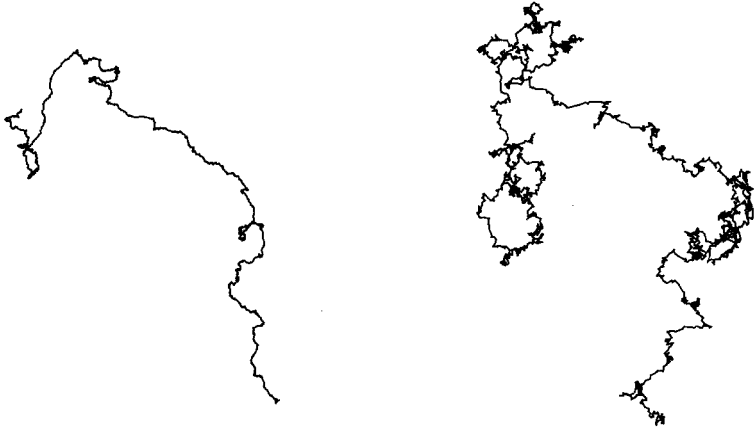
## ДРУГИЕ МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ШУМЫ. 1/f-ШУМЫ

**Формальное определение.** Шум  $X(t)$  следует называть *масштабно-инвариантным*, если либо сама функция  $X$ , либо ее интеграл или производная (повторные, если возникает такая необходимость) *самоаффинны*. То есть, если функция  $X(t)$  статистически тождественна своему преобразованию при сжатии времени, сопровождаемом соответствующим изменением интенсивности. Следовательно, должен существовать такой показатель  $\alpha > 0$ , что функция  $X(t)$  была бы статистически тождественна функции  $h^{-\alpha}X(ht)$  при любом  $h > 0$ . В более общем виде (особенно для случая дискретного  $t$ ) функцию  $X(t)$  следует называть асимптотически масштабной-инвариантной, если существует некая медленно изменяющаяся функция  $L(h)$  — такая, что функция  $h^{-\alpha}L^{-1}(h)X(ht)$  стремится к пределу при  $h \rightarrow 0$ .

Такое определение подразумевает необходимость проверки всех математических характеристик функций  $X(t)$  и  $h^{-\alpha}X(ht)$ . А это означает, что в эмпирической науке масштабную инвариантность никак нельзя *доказать*, и в большинстве случаев заключение о наличии этого свойства делается на основании одного-единственного критерия, который затрагивает только какой-нибудь один аспект тождественности — например, распределение длин пауз (глава 8) или отношение Херста  $R/S$ .

◁ Наиболее широко распространенный критерий масштабной инвариантности основан на спектрах. Шум можно считать спектрально масштабной-инвариантным, если его измеренная спектральная плотность на частоте  $f$  имеет вид  $1/f^\beta$ , где  $\beta$  — некоторый положительный показатель. В случае, когда величина  $\beta$  настолько близка к 1, что становится возможным заменить  $1/f^\beta$  на  $1/f$ , мы получаем так называемый «1/f-шум». ►

Многие масштабно-инвариантные шумы находят в своих областях весьма интересные применения, а объединяет все эти шумы то, что их можно встретить буквально повсюду. ■



**Рис. 357. ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ СЛЕДЫ  
(РАЗМЕРНОСТИ  $D \sim 1,1111$  И  $D \sim 1,4285$ )**

На рисунке слева представлен пример статистически самоподобной фрактальной кривой с размерностью  $D = 1/0,9000 \sim 1,1111$ . Ее координатные функции — независимые дробные броуновские функции с показателем  $H = 0,9000$ , которым и обусловлено возникновение на Ниле эффекта Иосифа. Того обстоятельства, что  $H$  близок к 1, оказывается недостаточно для предотвращения самопересечений, однако оно весьма осложняет им существование, побуждая «тренд» кривой к персистентности в любом направлении, какое он уже избрал. Представляя сложные кривые как наложения друг на друга больших, средних и малых сверток, можно сказать, что в случае высокой персистентности и близости размерности к единице малые свертки едва различимы.

Для рисунка справа мы воспользовались той же компьютерной программой, что и для рисунка слева, изменив лишь размерность  $D$  (теперь она равна  $D \sim 1/0,7000 \sim 1,4285$ ). Псевдослучайная затравка не изменилась, поэтому общая форма линии остается узнаваемой. Однако увеличение  $D$  приводит к росту относительной значимости малых сверток, а также — до некоторой степени — и средних. Становятся отчетливо видны ранее невидимые детали. ■

## 28 ◊ РЕЛЬЕФ И БЕРЕГОВЫЕ ЛИНИИ

В этой главе, главными героями которой являются абсолютно искусственные изображения, имитирующие карты и фотографии гор и островов, мы предполагаем показать, что с помощью должным образом подобранных фрактальных поверхностей, определяемых броуновской случайностью, можно очень легко моделировать в первом приближении любые горы (например, Альпы). Кроме того, мы наконец познакомимся с разумной моделью естественных структур, с которых начиналось настоящее эссе, но которые до сих пор не давались нам в руки, — я говорю о береговых линиях.

Отправной точкой послужит следующее утверждение: поверхности гор представляют собой масштабно-инвариантные фигуры. Нова ли эта идея? Конечно же, нет! Она, правда, не была должным образом сформулирована и научно исследована, однако во всех остальных отношениях ее можно считать почти банальностью и общим местом. Приведем еще один пример в придачу к цитате, открывающей главу 2. В книге Эдварда Вимпера «Альпийские восхождения 1860–1869 гг.»<sup>1</sup> на с. 88 читаем следующее: «Достоинно упоминания и то, что форма. . . обломков скал. . . часто напоминает характерную форму тех утесов, с которых они осыпались. . . В этом, по всей видимости, нет ничего удивительного, если признать, что горы в своей массе более или менее однородны. И малые, и большие формы образуются под воздействием одних и тех же процессов — один и тот же холод и одна и та же вода формируют и массу, и ее части.»

Для того, чтобы согласиться с целесообразностью подробного исследования явления, столь образно описываемого Вимпером, совсем необязательно воспринимать его слова буквально. В этой главе я предпринимаю попытку такого исследования в рамках наиболее удобной для меня математической среды — броуновских и дробных броуновских поверхностей.

Фраза «видеть — значит верить» была применима еще к моим первым попыткам моделирования броуновских гор (см. рис. 377 и 377). По мере роста качества графики росло и качество веры. Однако в конце

<sup>1</sup>Edward Whymper. *Scrambles Amongst the Alps in 1860–1869*. — *Прим. nepea*.

концов расхождения между моделью и нашим непосредственным опытом стали слишком большими, что привело к созданию новой модели, которая будет описана в следующей главе.

## БРОУНОВСКИЙ РЕЛЬЕФ НА ПЛОСКОЙ ЗЕМЛЕ [384]

В основе нашего подхода к построению рельефа лежит построение его вертикальных сечений. Как уже указывалось в главе 4 и в пояснении к рис. 338, одной из причин написания этого эссе стало предположение (высказанное в [342]) о том, что скалярное случайное блуждание может являться грубым первым приближением поперечного сечения горы. Итак, я пустился на поиски случайной поверхности, вертикальные сечения которой представляли бы собой броуновские функции из прямой в прямую. В инструментарий строителя статистических моделей такая поверхность не входит, однако тут, по счастью, мне на глаза попала одна весьма подходящая, хотя и малоизвестная претендентка.

Речь идет о броуновской функции точки из плоскости в прямую ( $B(P)$ ), определенной Полем Леви в [306]. Для того чтобы свести с ней близкое знакомство и получить возможность использовать ее в реальных моделях, не существует иного пути, нежели самое тщательное изучение уже готовой модели, изображенной на рис. 370. Этот воображаемый броуновский ландшафт характеризуется фрактальной размерностью  $D = 5/2$  и, несомненно, является более пересеченным, чем большая часть поверхности Земли.

Таким образом, перед нами грубая модель, которая так и напрашивается на возвращение на верстак для доработки. И все-таки она символизирует собой огромный — и прекрасный! — шаг вперед.

**Предупреждение об опасности броуновских листов.** Размножению различных вариантов броуновского движения не видно конца, и терминология здесь еще не совсем устоялась. Не следует путать упомянутую здесь броуновскую функцию из плоскости в прямую с броуновским листом. Последний представляет собой совершенно иной процесс, обращающийся в нуль вдоль координатных осей и строго изотропный. Подробности можно найти в книге [3], особенно интересны иллюстрации на с. 185 и 186.

## БЕРЕГОВЫЕ ЛИНИИ БРОУНОВСКОГО РЕЛЬЕФА

Остановимся на минуту и оценим, насколько далеко мы уже продвинулись в изучении океанских береговых линий, определяемых в

виде нуль-множеств (т.е. множеств точек, расположенных на уровне моря, включая и те, что принадлежат прибрежным островам). Броуновская береговая линия, изображенная на рис. 377, — первая встреченная мною кривая, которая а) лишена самопересечений, б) практически лишена самокасаний, в) имеет фрактальную размерность, явно большую 1, и г) изотропна. Более поздний вариант показан на рис. 373.

Точное значение размерности равно  $3/2$ . Так как это значение больше, чем большинство размерностей Ричардсона (рис. 57), применимость броуновской береговой линии несколько ограничена. Она и в самом деле напоминает северное побережье Канады или Индонезии, а возможно, даже западное побережье Шотландии или берега Эгейского моря — в общем, применима ко многим примерам, но, конечно же, далеко не ко всем. Впрочем, имея в распоряжении данные Ричардсона, было бы неразумно ожидать, что какое-то одно значение  $D$  окажется универсальным.

## ГЕНЕРАЦИЯ БРОУНОВСКОГО РЕЛЬЕФА [384]

Весьма печально, что для моделирования реальной поверхности оказывается недостаточно простых броуновского рельефа (размерность  $D = 5/2$ ) и береговых линий (размерность  $D = 3/2$ ) — их можно было бы легко объяснить. В самом деле, броуновская функция представляет собой превосходное приближение «пуассоновского» рельефа, который образуется путем наложения независимых прямолинейных разломов. Берется горизонтальное плато и разламывается вдоль прямой, выбранной случайным образом. Затем, также случайно, выбирается разница между уровнями высоты двух сторон получившегося утеса — например,  $\pm 1$  с равными вероятностями (гауссово распределение). После этого начинаем все сначала, причем за  $k$ -м этапом следует деление на  $\sqrt{k}$  (вследствие чего размер каждого отдельного утеса становится пренебрежимо мал по сравнению с общей суммой размеров остальных утесов).

Результат, получаемый при продлении описанной процедуры в бесконечность, представляет собой обобщение обыкновенного пуассоновского процесса во времени. Нет необходимости вдаваться в математические или физические детали, чтобы увидеть, что в этом рассуждении затрагивается, по меньшей мере, один аспект тектонической эволюции.

Так как механизм этот очень прост, было бы удобно считать, что когда-то очень давно, когда Земля пребывала в более «нормальном»



состоянии, вся ее поверхность имела броуновский рельеф с размерностью  $D = 5/2$ . Однако эту тему я предлагаю на время отложить — мы вернемся к ней чуть позже.

## ГЛОБАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ В БРОУНОВСКОМ РЕЛЬЕФЕ

Леви обнаружил, что броуновская функция из плоскости в прямую обладает одним весьма удивительным, на первый взгляд, свойством, которое имеет самые непосредственные практические последствия. В вольной формулировке это свойство выглядит следующим образом: различные части броуновского рельефа *далеко* не являются статистически независимыми. Таким образом, для того, чтобы вложить броуновскую функцию из прямой в прямую в броуновскую функцию из плоскости в прямую, необходимо отказаться от одного аспекта броуновской случайности, который до сих пор являлся ее самой значительной характерной особенностью — речь идет о независимости частей.

Рассмотрим две точки, расположенные, соответственно, к востоку и к западу от меридионального сечения рельефа. Рельеф вдоль меридиана представляет собой броуновскую функцию из прямой в прямую, следовательно, «наклон кривой» в каждой отдельной точке является независимой величиной. Кроме того, можно ожидать, что наш меридиан послужит чем-то вроде экрана — то есть знание рельефа в восточной точке никоим образом не повлияет на распределение рельефа в западной точке. ◁ Если бы это было так, то рельеф был бы марковским. ► В действительности же запад *влияет-таки* на восток — в том смысле, что порождающий процесс неизбежно привносит сильную глобальную зависимость.

Эта зависимость делает построение броуновской поверхности существенно более трудной задачей, нежели построение броуновской функции из прямой в прямую. Описанный в главе 25 процесс случайного срединного смещения, с помощью которого нам не удалось построить дробную броуновскую функцию из прямой в прямую (что задокументировано в главах 26 и 27), непригоден также и для построения *обыкновенной* броуновской функции из плоскости в прямую. То есть *нельзя* сначала привязать эту функцию к некоторой грубой решетке, а затем вписать в каждую ячейку ее значения независимо от остальных ячеек. Невозможно также построить ее по слоям: сначала для  $x = 0$ , затем для  $x = \varepsilon$  (не принимая во внимание значения при  $x < 0$ ), затем для  $x = 2\varepsilon$  (не принимая во внимание значения при  $x < \varepsilon$ ) и т. д.

Вообще, любой алгоритм, который сулит простое пошаговое обобщение броуновской функции из прямой в прямую на «многомерное вре-

мя», неизбежно дает в конечном счете функцию, систематически отличную от обещанной.

Как указывается в последнем разделе данной главы, в моделях, в создании которых я принимал участие, громоздкие теоретические определения были переформулированы таким образом, чтобы включать последовательные приближения с известными значениями погрешности. Однако я не могу поручиться за всех тех, кто присоединился к этой игре, вдохновившись моими предыдущими эссе.

## БРОУНОВСКИЙ РЕЛЬЕФ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

Допустим теперь, что опорной поверхностью земного рельефа является сфера. К счастью, мой ментор предоставил в наше распоряжение и соответствующую броуновскую функцию  $B_O(P)$  из сферы в прямую (см. [308]). Ее несложно описать, она забавна и даже обладает, возможно, некоторой значимостью. Однако мы скоро убедимся, что ее также нельзя назвать реалистичной, поскольку, согласно ее предсказанию, береговые линии имеют размерность  $D = 3/2$ , — а это серьезный недостаток.

В простейшем определении функции  $B_O(P)$  используются термины из теории шума — мы не будем их здесь определять, однако они, несомненно, известны многим читателям. На поверхность сферы накладывается слой белого гауссова шума, функция же  $B_O(P)$  представляет собой интеграл этого белого шума по поверхности полусферы с центром в точке  $P$ .

На угловых расстояниях, меньших  $60^\circ$ , функция  $B_O(P)$  выглядит очень похоже на броуновскую функцию из плоскости в прямую. Однако при глобальном рассмотрении сходство пропадает.

Например, у функции  $B_O(P)$  есть одно поразительное свойство: в случае, когда расположенные на поверхности сферы точки  $P$  и  $P'$  диаметрально противоположны, значение суммы  $B_O(P) + B_O(P')$  не зависит от конкретного расположения этих точек. В самом деле, эта сумма представляет собой всего лишь интеграл, взятый по всей сфере белого шума, использованной для построения функции  $B_O(P)$ .

Таким образом, высокий холм в точке  $P$  соответствует всем глубоким ямам в диаметрально противоположной точке  $P'$ . Центр тяжести такого распределения не совпадает с центром опорной поверхности и вряд ли может находиться в состоянии устойчивого равновесия. Однако нам нет нужды беспокоиться: благодаря теории изоэнтальпии рассматриваемый рельеф оказывается избавлен от статической неустойчивости — и, как следствие, от слишком поспешного признания его непригодности в качестве модели. Теория эта утвержда-

ет, что почти твердая земная кора очень тонка под самыми глубокими океанскими впадинами и весьма толста под высочайшими горными вершинами, так что сфера, концентрическая с земной и проходящая чуть ниже глубочайших точек океана, делит кору на две почти равные части. Если согласиться с тем, что видимые горные вершины всегда следует рассматривать в сочетании с их невидимыми корнями, расположенными ниже сферы отсчета, то постоянство суммы  $B_O(P) + B_O(P')$  уже не обязательно предполагает наличие серьезного статического дисбаланса, хотя и остается по-прежнему удивительным.

## БРОУНОВСКИЕ ПАНГЕЯ И ПАНТАЛАССИЯ

Насколько хорошо вышеописанный вариант броуновского рельефа соответствует данным наблюдений? Исходя из сегодняшних очертаний континентов и океанов, размерность  $D$  оказывается неверной, а значит, соответствие следует признать неудовлетворительным.

С другой стороны, тектоника плит (теория раскола и дрейфа континентов) позволяет перенести наш тест на адекватность на 200 миллионов лет в прошлое, на только что сформировавшуюся Землю. Так как свидетельства очевидцев мы в этом случае не располагаем, вероятность того, что наш тест провалится, резко уменьшается. Согласно Вегенеру — а его взгляды находят довольно широкую поддержку (см., например, [605]) — вся суша была некогда объединена в один большой континент, *Пангею*, а океаны образовывали один сверхокеан, *Панталасию*.

Подобно Пангее, рельеф, изображенный на рис. 375, представляет собой некое пятно суши, изрезанное здесь и там обширными полостями. Сходство это, однако, поверхностно и обманчиво. Броуновский рельеф на сфере демонстрирует, на первый взгляд, тенденцию к чрезмерному усилению очень крупномасштабных деталей, и происходит это в результате комбинации геометрических особенностей сферы и того факта, что броуновские правила для случая сферы предполагают сильную положительную корреляцию для углов, меньших  $60^\circ$ , и сильную отрицательную корреляцию между диаметрально противоположными (антиподальными) точками. При внимательном рассмотрении, сосредоточенном на менее глобальных особенностях, соответствие между моделью и реальностью еще более ослабевает; для углов, скажем, меньших  $30^\circ$ , броуновская береговая линия на сфере становится неотличимой от броуновской береговой линии на плоскости — со всеми сопутствующими последней недостатками.

Фрактальные хлопья, в которых функция высоты совпадает с функцией высоты описанной выше Пангеи (за исключением того, что здесь масштаб порядка величины составляет половину радиуса), похожи на отличающиеся иррегулярными формами спутники внешних планет. В противоположность фигурам, изображенным на рис. 25 и 26, такие хлопья не окружены «плавающими обломками», и следовательно, размерность  $D$  является в этом случае только мерой иррегулярности, но не фрагментации.

## ДРОБНЫЙ БРОУНОВСКИЙ РЕЛЬЕФ НА ПЛОСКОЙ ЗЕМЛЕ [384]

Главным недостатком двух представленных броуновских моделей рельефа является то, что их размерность  $D = 3/2$  слишком велика для верного описания береговых линий. Как следствие, наши поиски более широко применимой модели приобретают неожиданный оттенок. Давным-давно, в главах 5 и 6, мы провозгласили возможность справедливости неравенства  $D > 1$  и тут же принялись искать способы заставить размерность  $D$  *превысить* 1. Теперь же перед нами обратная задача — добиться того, чтобы  $D$  оказалась *меньше*  $3/2$ . Для получения более гладких берегов нам необходим более гладкий рельеф и более гладкие вертикальные сечения.

К счастью, в предыдущей главе мы получили хорошую подготовку. Для построения модели вертикальных сечений я заменил броуновскую функцию из прямой в прямую ее дробным вариантом и убедился в том, что существуют случайные функции  $B_H(P)$  из плоскости в прямую, обладающие такими сечениями. Размерность  $D$  поверхностей в этом случае равна  $3 - H$  (см. [3]), а для линий уровня и вертикальных сечений  $D = 2 - H$ .

Таким образом, мы оказываемся избавлены от каких бы то ни было трудностей в моделировании и можем получить любую размерность, каку бы ни потребовали эмпирические данные.

**Определение  $D$ .** Исходя из данных Ричардсона (см. главу 5), можно ожидать, что размерность «типичной» береговой линии будет близка к 1,2, а размерности рельефа — к 2,2. Следовательно, в большинстве случаев нас вполне удовлетворит параметр  $H$ , равный 0,8, — пример такого рельефа можно видеть на рис. 371. Однако для описания некоторых конкретных участков земной поверхности понадобятся и другие значения. Значения  $D \sim 2,05$  описывают рельеф, в котором преобладают очень медленно изменяющиеся компоненты. Когда такой

компонент представляет собой широкий склон, рельеф имеет вид неровного наклонного плато, а береговая линия отличается от прямой лишь наличием незначительных неправильностей. Вблизи вершины горы рельеф похож на неровный конус, а береговая линия — на несколько неправильный овал.

Потенциальной полезностью обладают и рельефы с размерностью  $D$ , близкой к 3, однако их довольно трудно подобающим образом передать на рисунке. Достаточно заметить, что изображенная на рис. 377 береговая линия с  $D \sim 3$  напоминает затопленную аллювиальную равнину. Очевидно, что в инструментарии строителя статистических моделей найдется место для всех значений параметра  $H$ .

## КОСМОГРАФИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ

Космографический принцип из главы 22 можно переформулировать применительно к рельефу. Усиленный космографический принцип сочетает в себе вероятностные понятия стационарности и изотропии. Следовательно, можно считать, что рельеф  $Z(x, y)$  на поверхности плоской Земли отвечает усиленному космографическому принципу, если порождающие этот рельеф правила одинаковы во всех системах отсчета, в которых начало координат  $(x_0, y_0, z_0)$  удовлетворяет условию  $z_0 = 0$ , а ось  $z$  вертикальна. В частности, указанные правила должны оставаться инвариантными при изменении значений  $x_0$  и  $y_0$  и при вращении горизонтальных осей. Мой броуновский рельеф на плоской Земле, равно как и его дробная версия, этому принципу не удовлетворяют.

Однако они удовлетворяют «условной» версии космографического принципа, в которой начало координат выбирается таким образом, чтобы удовлетворять условию  $z_0 = B(x_0, y_0)$  (начало координат лежит на поверхности Земли).

Предпринимались попытки согласовать рельеф посредством стационарного процесса. При этом на плоскость  $z = 0$  накладывается правильная решетка, а высотам внутри каждой отдельной ячейки этой решетки приписываются значения, представляющие собой независимые случайные величины. Такие модели не могут объяснить ни одного из рассмотренных в этой главе скейлинговых законов.

Броуновский рельеф на поверхности шарообразной Земли находится в соответствии с космографическим принципом в его усиленной форме, особенно когда речь идет о крупных участках поверхности — в этом случае усиленная форма наиболее удобна. Условный принцип здесь выполняется тем более, его предпочтительнее применять к локальным эффектам.

## ГОРИЗОНТ

Для наблюдателя, расположенного на некоторой конечной высоте над поверхностью Земли, горизонт состоит из нескрытых точек наибольшей видимой высоты, образующих вокруг наблюдателя замкнутую кривую.

Когда рельеф представляет собой возмущение на сферической поверхности Земли, горизонт, очевидно, расположен на некотором конечном расстоянии от наблюдателя.

Когда рельеф есть броуновское или дробное броуновское возмущение на плоской горизонтальной поверхности, существование горизонта перестает быть столь очевидным: на каждую высокую гору может найтись более высокая гора, расположенная несколько дальше, и так далее до бесконечности. В действительности же относительная высота горы, расположенной на расстоянии  $R$  от наблюдателя, является величиной порядка  $R^H$ , так что тангенс угла наклона прямой (соединяющей наблюдателя с вершиной горы) над горизонтальной плоскостью равен приблизительно  $R^{H-1}$  и стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Следовательно, горизонт определен и здесь.

Задавшись целью достичь более глубокого понимания сути явления, разделим расстояние от наблюдателя до горизонта на его среднее значение. На плоской Земле эта функция статистически независима от высоты, на которой находится наблюдатель. В случае же шарообразной Земли, по мере увеличения высоты наблюдателя линия горизонта устремляется к окружности. Кроме того, горизонт плоской Земли расположен *над* плоскостью, проходящей через наблюдателя, независимо от его высоты. Что касается горизонта шарообразной Земли, то он находится *ниже* упомянутой плоскости — при условии, что наблюдатель расположен достаточно высоко. В общей сложности, наблюдаемые свойства горизонта подтверждают сферическую форму Земли. Страшно подумать, что было бы, окажись это не так.

## «ХОРОШО МОТИВИРОВАННАЯ» ДРОБНАЯ БРОУНОВСКАЯ МОДЕЛЬ ЗЕМНОГО РЕЛЬЕФА

Как обычно, остается только удивляться, почему модели, выбранные за простоту, оказываются столь притягательными с позиций применимости. У меня есть некоторые соображения на этот счет, однако я не питаю иллюзий относительно их убедительности (см. главу 42).

⟨ Прежде всего, можно построить функцию  $B_H(P)$  так же, как мы строили  $B(P)$  — путем наложения друг на друга прямолинейных раз-

ломов (см. [380]). Однако разломы эти больше не могут иметь отвесных стен; по мере приближения к дну разлома уклон стены должен увеличиваться. К сожалению, поперечное сечение такого разлома представляет собой довольно надуманную конструкцию, а стало быть, такой подход не годится.

Более предпочтительным представляется начать с броуновской модели, а затем попытаться уменьшить размерность, как это было сделано при моделировании речного стока в главе 27. Исключительно локальное сглаживание преобразует поверхность с бесконечной площадью в поверхность, площадь которой конечна. С другой стороны, эта процедура совершенно не затрагивает крупные элементы поверхности. Таким образом, локальное сглаживание заменяет объекты, имеющие одинаковую во всех масштабах вполне определенную размерность, объектами, которые демонстрируют глобальную эффективную размерность  $5/2$  и локальную эффективную размерность 2.

Вообще, после  $K$  различных сглаживаний с различными основными масштабами мы получаем  $K + 1$  зону с разными размерностями, связанные переходными зонами. Однако целое в этом случае может стать неотличимо от фрактала с некоторой промежуточной размерностью. Иными словами, наложение феноменов, каждый из которых обладает вполне определенным масштабом, может имитировать масштабную инвариантность.

С другой стороны, масштабно-инвариантный феномен часто самопроизвольно разлагается воспринимающим его сознанием в некую иерархию, каждый уровень которой имеет свой масштаб. Например, описанные в главе 9 скопления галактик вовсе не обязательно соответствуют реальности, как будет показано в главах 32–35. А значит, не стоит спешить следовать рекомендации Декарта и делить всякую сложную проблему на части. Хотя наш мозг самопроизвольно представляет геоморфологические конфигурации в виде совокупности элементов с резко различными масштабами, это вовсе не означает, что так оно и есть в действительности.

К счастью, опорной поверхностью земного рельефа является сфера, а следовательно, ему присущ конечный внешний порог. Таким образом, мы совершенно спокойно можем допустить, что всевозможные перестройки, которым подвергалась Земля за свою долгую геологическую историю, предполагают порядок пространственных масштабов, не превышающий размеров континентов. Еще одно реалистическое допущение, заключающееся в том, что различные участки поверхности характеризуются различной величиной параметра  $H$ , позволяет этим перестройкам различаться по относительной интенсивности. ►

## РАЗБИТЫЕ КАМНИ, ВЗЛЕТНЫЕ ПОЛОСЫ И ТРИБОЛОГИЯ

Очень давно, еще в первой главе, упоминалось о том, что термин *фрактальный* я произвел от латинского слова *fractus*, которое описывает внешний вид скола разбитого камня — неправильный и фрагментированный. Одна только этимология, разумеется, не делает поверхность реального каменного скола фракталом, однако эта поверхность явно не является стандартной, а если она еще и масштабно-инвариантна, то она должна быть фрактальной.

Аргумент в пользу масштабной инвариантности: камень состоит из гранул, объединенных в иерархически организованные домены, причем большие домены соединяются друг с другом не так прочно, как их меньшие составляющие. Энергия, затраченная при ударе о камень, с наибольшей легкостью потратилась бы на разделение больших доменов, однако нет причин ожидать, что такое разделение осуществимо геометрически, а значит, поверхность разлома скорее всего будет сочетать в себе участки, принадлежащие междоменным границам различных иерархических уровней.

Наука об износе и трении называется *трибологией*. Название происходит от греческого слова *τριβω* «тереть, растирать». Данные работы [509] (после коррекции неверного анализа; см. [25]) укрепляют нас в предположении, что с помощью *дробных* броуновских поверхностей можно представить в первом приближении взлетно-посадочные полосы в аэропортах (а также многие естественные негладкие поверхности). Экспериментальные значения  $D$  (полученные из графика  $7 - 2D$  в [509], рис. 1) изменяются в интервале от 2 до 3.

## ПРОСТРАНСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕФТИ И ДРУГИХ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Теперь, когда мой «принцип», провозглашающий масштабную инвариантность рельефа, выдержал всесторонние испытания, настала пора рассмотреть одно следствие из него. Как будет показано в главе 38, можно ожидать, что любая величина, так или иначе связанная с этим рельефом, будет следовать гиперболическому распределению вероятностей (такому, например, как закон Ципфа или закон Парето). Так и в самом деле происходит довольно часто. По правде говоря, моему исследованию береговых линий (см. главу 5), в котором было высказано предположение о том, что рельеф Земли масштабно-инвариантен, предшествовала работа 1962 г. [338], в которой я обнаружил, что распределе-



ния, связанные с нефтью и другими природными ресурсами, являются гиперболическими. Этот результат противоречит общепринятому мнению, согласно которому распределение указанных величин следует логарифмически нормальному закону. Различие чрезвычайно значительно, так как при гиперболическом распределении получается гораздо больше ресурсов, чем при логарифмически нормальном. В 1962 г. меня мало кто услышал, однако я пока не сдаюсь.

О минералах мы еще поговорим в главе 39, в разделе НЕЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЫ.

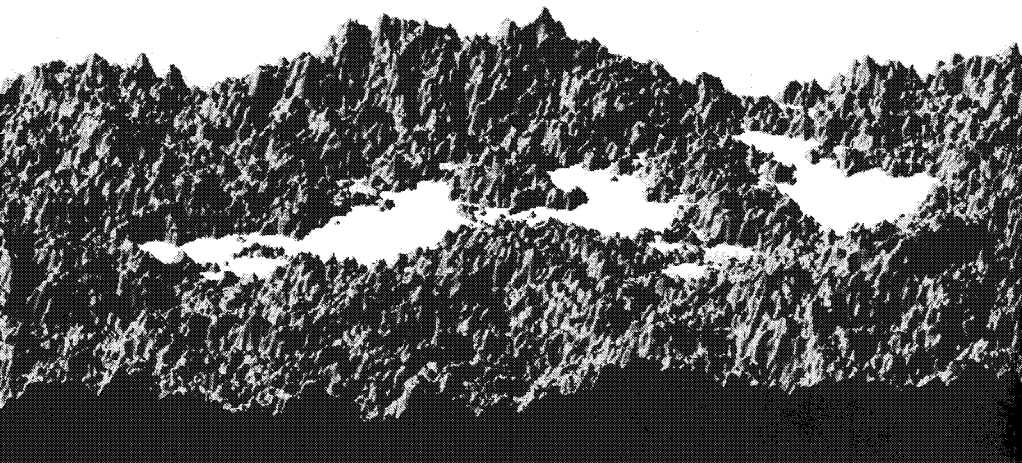
## УПРОЩЕНИЯ: ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ПОВЕРХНОСТИ СРЕДИННОГО СМЕЩЕНИЯ

Поскольку мои броуновские и дробные броуновские рельефы основываются на весьма сложных алгоритмах, возникает необходимость в приближениях или упрощениях. Так, например, на рис. 374, 377 и 379 вы видите пуассоновское приближение нашего гауссова процесса. А на рис. 370–373 и C5–C15 непериодическая функция от  $x$  и  $y$  заменена периодической функцией, вычисленной с помощью методов быстрого преобразования Фурье и затем «обрезанной» так, чтобы ее центральный участок остался не затронут периодичностью.

Кроме того, для генерации фрактальных поверхностей, которые мы обозначим через  $B_H^*(x, y)$ , я использовал срединное смещение (как в главе 26). Такие поверхности легче всего реализовать, применяя в качестве инициатора равносторонний треугольник  $\mathcal{J}$ . Так как значения  $B_H^*(x, y)$  на вершинах треугольника  $\mathcal{J}$  заданы, на первом этапе функция интерполируется по отдельности на каждую из трех срединных точек сторон треугольника  $\mathcal{J}$  посредством того же процесса, какой мы применяли к координатным функциям броуновской функции  $B_H^*(t)$ . На следующем этапе интерполируем на девять срединных точек второго порядка и так далее.

Результат, можете быть уверены, получается куда более реалистичным, нежели любая нефрактальная поверхность или большинство фрактальных случайных поверхностей. Однако стационарен ли он? Приращение  $\Delta B_H^* = B_H^*(x, y) - B_H^*(x + \Delta x, y + \Delta y)$  должно зависеть только от расстояния между точками  $(x, y)$  и  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . В нашем же случае  $\Delta B_H^*$  явно зависит от  $x, y, \Delta x$  и  $\Delta y$ . Следовательно, поверхность  $B_H^*$  нестационарна, даже если  $H = 1/2$ .

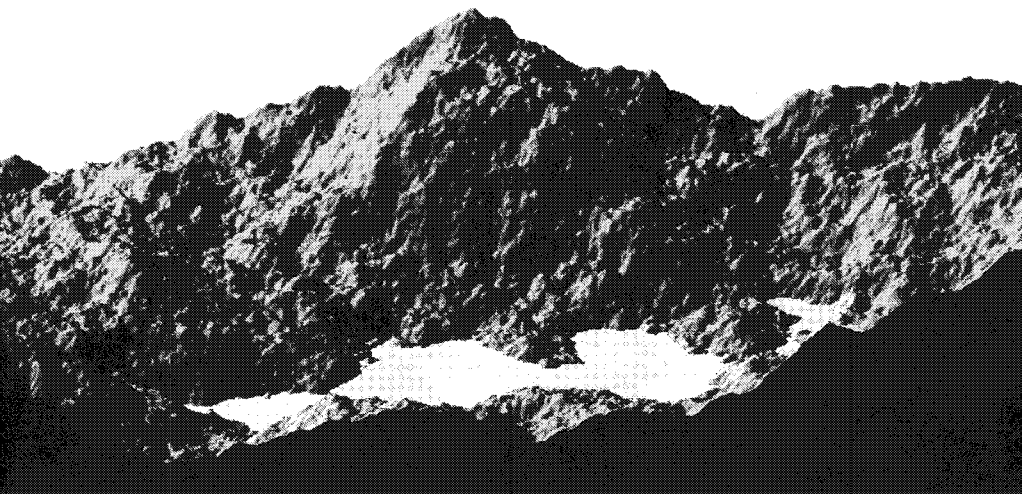
Я также рассмотрел и сравнил друг с другом дюжину других упрощений (на этот раз *стационарных*) и надеюсь вскоре опубликовать результаты сравнения.



**Рис. 370 и 371. БРОУНОВСКИЕ ОЗЕРНЫЕ ЛАНДШАФТЫ,  
ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДРОБНЫЕ (РАЗМЕРНОСТИ ОТ  $D \sim 2,1$   
ДО  $D = 5/2$ , ПО ЧАСОВОЙ СТРЕЛКЕ)**

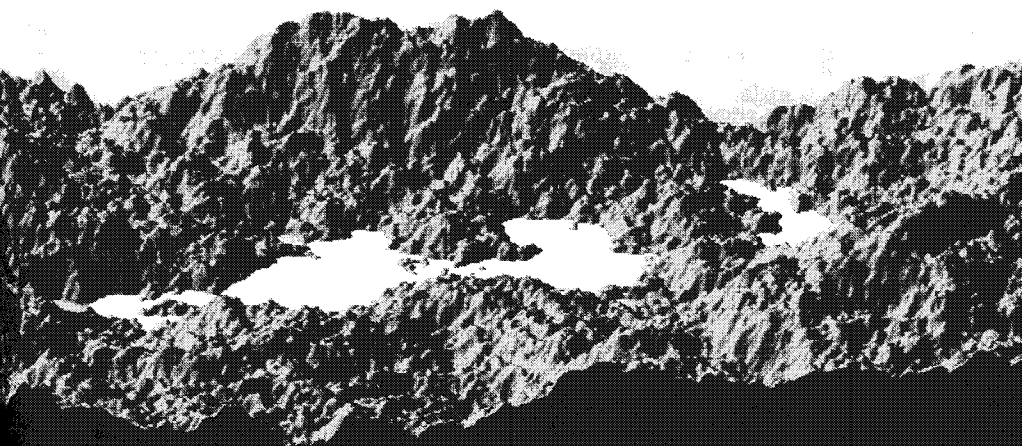
Верхний пейзаж на рис. 371 представляет собой пример дробного броуновского рельефа, размерность которого довольно близка к 2 — это моя модель рельефа поверхности Земли. Остальные пейзажи экстраполируют эту модель на более высокие значения размерности  $D$ , вплоть до верхней части рис. 370, где изображен обыкновенный броуновский рельеф из плоскости в прямую. Определяющей характеристикой последнего является то, что любой из его вертикальных срезов представляет собой обыкновенную броуновскую функцию из прямой в прямую, как



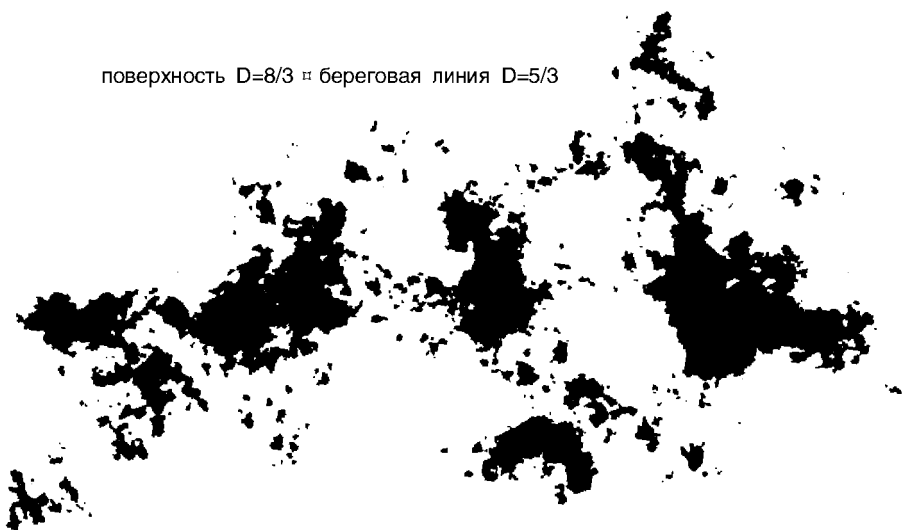


на рис. 338. Броуновский рельеф не годится для моделирования поверхности Земли, так как его элементы слишком иррегулярны, что заметно невооруженным глазом. Это неудовлетворительное соответствие можно выразить и количественно: размерность поверхности ( $D = 5/2$ ) и береговой линии ( $D = 3/2$ ) оказываются слишком велики.

В каждом пейзаже высота вычисляется для точек пересечения широт и долгот, образующих квадратную решетку. Программой предусматривается также моделирование освещения от источника, располагающегося слева под углом  $60^\circ$  к горизонту; наблюдение осуществляется из точки, приподнятой на  $25^\circ$  над уровнем моря. Более подробное описание можно найти в пояснениях к цветным иллюстрациям.



поверхность  $D=8/3$  и береговая линия  $D=5/3$



### Рис. 372 и 373. БРОУНОВСКИЕ БЕРЕГОВЫЕ ЛИНИИ И «ГРЯДЫ» ОСТРОВОВ

Первоначально эти иллюстрации были призваны подчеркнуть один только что обнаруженный важный эффект. Когда размерность  $D$  рельефа достигает значения 2,5 и превосходит его, океан начинает демонстрировать явную и усиливающуюся тенденцию к разделению на отдельные округлые «моря». Эти моря сообщаются друг с другом, но вместе с тем каждое сохраняет выраженную индивидуальность. Острова при этом выстраиваются в «гряды». Тот же эффект (хотя и не так явственно) наблюдается и в горных хребтах, присутствующих на всех «пейзажах» на рис. 370, 371 и 379.

Это отсутствие изотропии в выборках полностью согласуется с изотропией порождающего механизма.

Фигуры, изображенные на этих рисунках, эквивалентны (за исключением затравки) плоским сечениям хлопьев на рис. 25 и 26 (которые объясняются в конце главы 30). Здесь, как и на рис. 25 и 26, мы используем усеченную версию одного периода периодического варианта ожидаемого процесса. Это уменьшает зависимость общих очертаний от  $D$ . Общие очертания действительно броуновских береговых линий различаются сильнее, чем показано на наших иллюстрациях.

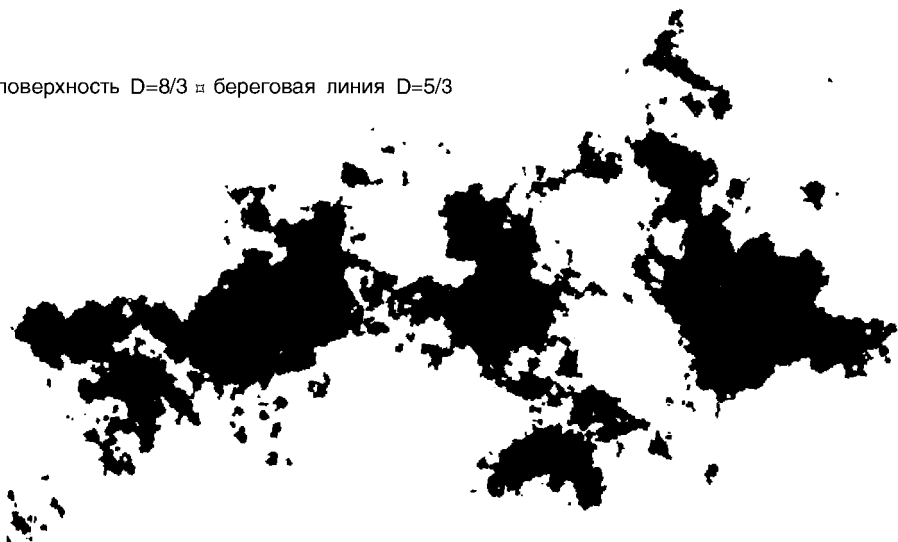
В главах 34 и 35 обсуждается эффект, связанный с упомянутыми грядами.



поверхность  $D=8/3$   $\neq$  береговая линия  $D=5/3$



поверхность  $D=8/3$   $\neq$  береговая линия  $D=5/3$



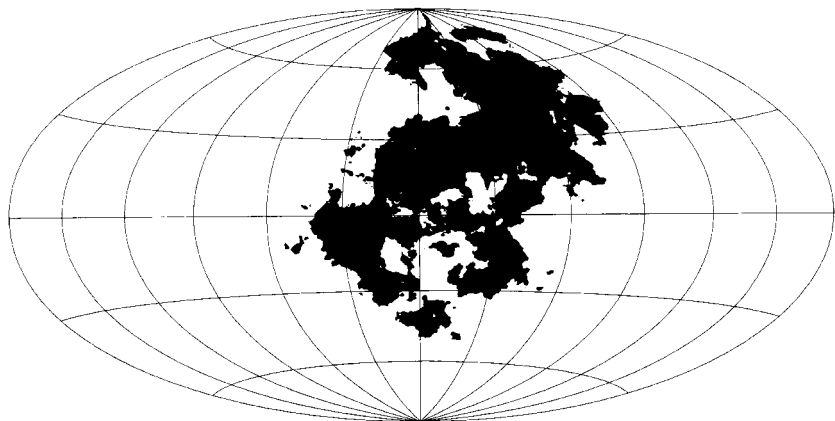


**Рис. 374. ЛИНИИ УРОВНЯ В ДРОБНЫХ БРОУНОВСКИХ ЛАНДШАФТАХ**

На каждом из рисунков этой страницы представлены по две-три линии уровня (береговые линии показаны жирными линиями) для дробных броуновских функций. При построении этих фигур использовались одинаковые программа и заставка, но различные размерности:  $D \sim 1,3333$  (верхняя фигура) и  $D \sim 1,1667$  (нижняя фигура). Тщательно рассмотрев оба рисунка, можно убедиться, что с географической точки зрения они выглядят вполне правдоподобно: верхний сойдет за побережье горного озера, нижний же соответствует более равнинной местности.

Эти кривые выглядят гораздо менее «изрезанными», чем кривые с той же размерностью  $D$  на рис. 373. Причина заключается в том, что на тех иллюстрациях каждое сечение демонстрирует ярко выраженный максимум; сколько-нибудь систематических уклонов там почти нет. Здесь же, напротив, перед нами *склон* огромной горы, который имеет выраженный общий уклон. Благодаря их «общему» виду, фигуры на этой странице можно рассматривать как увеличенные версии какого-нибудь особенно изрезанного малого участка береговой линии с рис. 373.

Сравнение этих различных линий уровня дает лучшее понимание того, насколько широки рамки допустимых взаимодействий между иррегулярностью и фрагментацией даже при фиксированном значении размерности  $D$ . ■



**Рис. 375 и С11 (вверху). БРОУНОВСКАЯ ПАНГЕЯ  
(РАЗМЕРНОСТЬ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ  $D = 3/2$ )**

На поверхности «далекой планеты», изображенной на рис. С11 (вид из космоса), мы видим очертания воображаемой фрактальной Пангеи. Ее рельеф был получен посредством компьютерной реализации (насколько мне известно, это было проделано впервые) случайной поверхности, которой мы обязаны Полло Леви: броуновской функции из точек на сфере (широта и долгота) в скалярные величины (высота). Уровень моря был выбран таким образом, чтобы три четверти общей площади оказалось под водой. Береговую линию получили интерполяцией.

На этом рисунке та же Пангея изображена на хаммеровской карте — проекция, предпочитаемая приверженцами вегенеровской теории континентального дрейфа.

Насколько эта модельная Пангея похожа на «настоящую»? Мы вовсе не надеемся, что совпадут какие-то конкретные локальные детали; нас интересует лишь совпадение степеней извилистости — как локальной, так и глобальной. Как и следовало ожидать, до совершенного сходства наша модель не дотягивает. В самом деле, размерность  $D$  береговой линии модельной Пангеи составляет  $3/2$ , в то время как гипотетические рисунки в учебниках геологии приписывают реальной Пангее то же значение  $D$ , что наблюдается в очертаниях современных континентов, т. е.  $D \sim 1, 2$ . Если вдруг появятся какие-то новые данные, совместимые с  $D = 3/2$ , то мы получим возможность объяснить геометрию Пангеи, основываясь на весьма элементарных тектонических допущениях.

**Фракталы в неевклидовом пространстве.** В неевклидовой геометрии Римана роль плоскости выполняет сфера. Неевклидовы геометрии, таким образом, неевклидовы только наполовину: они занимаются евклидовыми фигурами на неевклидовых носителях. Большая часть настоящего эссе демонстрирует аналогичную «половинчатость»:

мы изучаем неевклидовы фигуры в евклидовом пространстве. Представленная на рисунке Пангея объединяет наши подходы, поскольку представляет собой пример неевклидовой фигуры на неевклидовом же носителе.

■

---

### Рис. 377. ПЕРВЫЕ ИЗВЕСТНЫЕ ПРИМЕРЫ БРОУНОВСКИХ БЕРЕГОВЫХ ЛИНИЙ (ОБЫКНОВЕННЫХ И ДРОБНЫХ)

Мое утверждение о том, что с помощью должным образом выбранных дробных броуновских функций можно достаточно правдоподобно моделировать земной рельеф, основывалось первоначально на вот этих четырех моделях береговых линий. Руководствуясь исключительно сентиментальными соображениями, я перенес их (вместе с рис. 375) сюда из французского эссе 1975 г. почти без изменений, разве что черные области закрашены теперь более аккуратно, благодаря чему оказалось возможным передать исходное построение более точно.

Когда значение  $D$  близко к единице (верхний рисунок), береговая линия слишком прямолинейна, чтобы выглядеть реалистичной.

А вот очертания берегов со второго сверху рисунка ( $D = 1,3000$ ) вполне могли бы занять достойное место на карте из настоящего атласа. Большой остров слева явно напоминает Африку или Южную Америку (в зеркальном отражении), а большой остров справа очень похож на Гренландию (если повернуть страницу на  $90^\circ$  против часовой стрелки). Наконец, если повернуть страницу на  $90^\circ$  по часовой стрелке, то из обоих островов вместе получаются слегка исхудавшая Новая Зеландия и сдвоенный остров Баунти.

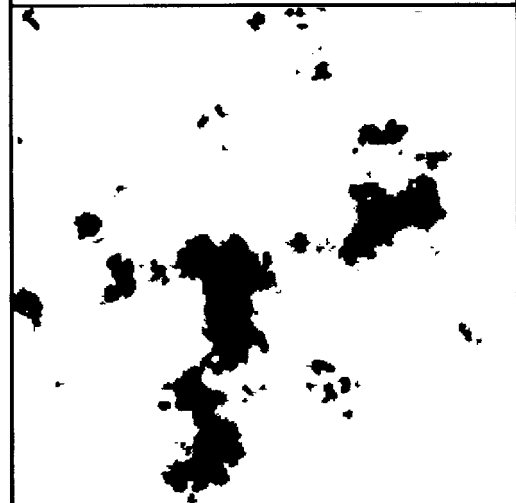
Когда  $D$  увеличивается до  $3/2$  (третий рисунок сверху), игра в географические загадки становится немного сложнее.

При дальнейшем увеличении  $D$  до значений, близких к 2 (нижний рисунок), сложность географических загадок возрастает весьма значительно (возможно, они просто становятся слишком специализированными: что это у вас тут? Миннесота? Финляндия?). В конце концов всякое сходство с реальностью пропадает.

Другие затравки дают точно такой же результат. Согласно результатам аналогичных тестов, основанных на более точных графических построениях, наиболее реалистичным значением фрактальной размерности береговых линий следует признать  $D \sim 1,2$ .

■





### **Рис. 379. ПЕРВЫЕ ИЗВЕСТНЫЕ ПРИМЕРЫ ДРОБНЫХ БРОУНОВСКИХ ОСТРОВОВ (РАЗМЕРНОСТЬ $D = 2,3000$ )**

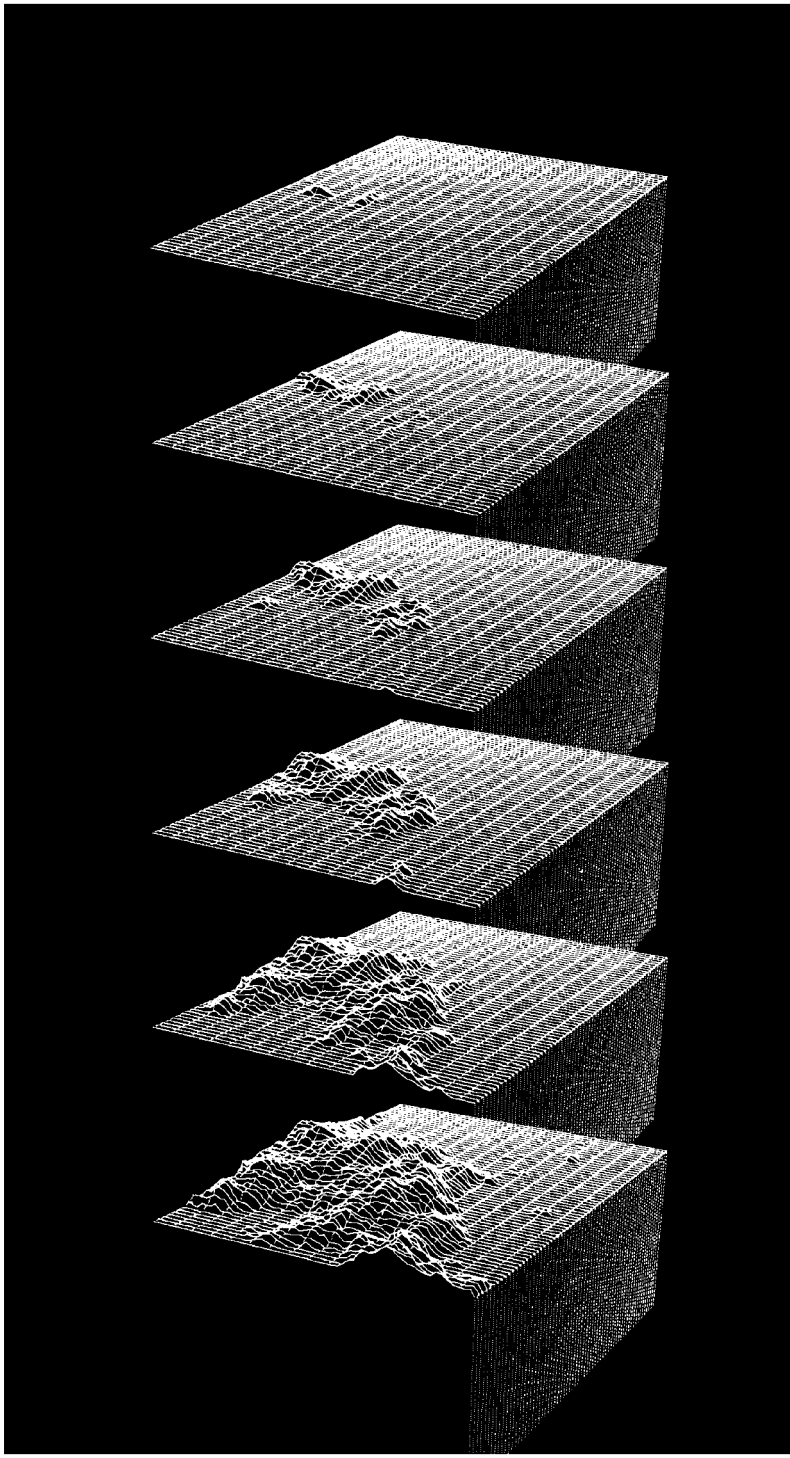
Присутствие здесь этой иллюстрации, несомненно, можно считать сентиментальным перегибом, поскольку она не несет в себе ничего такого, что не было бы лучше выражено на других иллюстрациях. В свое оправдание скажу лишь, что эти островные виды с изменяющимся уровнем моря были опубликованы в работе [384] и в эссе 1975 г., и я просто не могу на них спокойно смотреть. Они являются частью более обширной серии изображений дробных броуновских островов с различными значениями  $D$  и различными уровнями моря — насколько мне известно, прежде никто подобных изображений не создавал. (В 1976 г. мы сделали фильм об этом необычном острове, поднимающемся из моря; в 1981 г. фильм выглядит до смешного примитивно, однако он еще может стать антикварной редкостью.)

Я часто думаю, где же я мог в действительности видеть пейзаж, изображенный на нижнем рисунке: эти маленькие островки, рассыпанные, точно семена, у оконечности узкого и длинного полуострова.

Оригинальная картинка была сфотографирована с электронно-лучевой трубки, у которой были проблемы с резкостью, поэтому данные пришлось обрабатывать заново. Здесь (в противоположность рис. 370, 371 и С11–С17) не требуется искусственно моделировать боковое освещение. Так получилось, что наш древний графический процесс создает у зрителя впечатление, что море у горизонта словно бы мерцает.

Читатель, несомненно, заметит, что по сравнению с более поздними ландшафтами размерность, заявленная для изображенных здесь поверхностей, на удивление высока. Причина заключается в том, что тогдашние графические методы были не способны показать мелкие детали, поэтому размерности ранних ландшафтов кажутся меньше, чем реальные значения  $D$ , задаваемые генерирующим эти ландшафты программам. Для компенсации мы выбирали большие значения  $D$ , чем это было необходимо, исходя из данных наблюдений. Однако с улучшением качества графики этот сдвиг стал слишком заметным, т. е. не только ненужным, но и вредным. Сегодня необходимости в такой компенсации нет, и, задавая генерирующей программе значения размерности, соответствующие данным Ричардсона, мы получаем в высшей степени реалистичные ландшафты.





## 29 ◊ ПЛОЩАДИ ОСТРОВОВ, ОЗЕР И ЧАШ

Ниже мы более подробно исследуем броуновскую модель рельефа, предложенную в предыдущей главе. Ее выводы касательно площадей островов представляются вполне приемлемыми; однако те, что относятся к озерам и чашам, *никуда не годятся*. Для исправления этого несоответствия предложим усовершенствованную модель.

### ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОЩАДИ ОСТРОВОВ

Как указано в главе 13, изменчивость проективных площадей  $A$  океанических островов является очевидной характеристикой каждой карты, часто даже более выразительной, нежели очертания береговых линий. Мы отметили также, что Корчак [279] полагает распределение площадей  $A$  гиперболическим:  $\Pr(A > a) = Fa^{-B}$ . (Теперь нам уже ничто не препятствует заменять  $\text{Nr}$  на  $\text{Pr}$ .) Наконец, мы показали, что это эмпирическое заключение верно в том случае, когда береговая линия самоподобна. Теперь мы можем добавить: тем более достаточно предположить, что самоподобен рельеф.

Нет никакого сомнения, что соотношение  $2B = D$  применимо не только к случайным коховым побережьям, рассмотренным в главе 13, но и к дробным броуновским нуль-множествам. Однако доказательство этого факта остается на данный момент отчасти эвристическим. Распределение же, соответствующее дробному броуновскому рельефу с  $H = 0,800$ , и впрямь подходит очень близко к эмпирическим данным относительно всей Земли.

Размерность  $D_c$  каждого отдельно взятого дробного броуновского острова пока не известна.

### ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОЩАДИ ОЗЕР

Утверждается, что площади озер также подчиняются гиперболическому распределению, то есть может возникнуть искушение оставить озера в покое, так как ничего нового они нам не поведают. По более зрелом размышлении, однако, можно заметить, что определения озер и океанических островов ни в коем случае не являются симметричными.

Специальный анализ, вкратце описываемый в этой главе, проясняет многие вопросы, связанные с двумя озерными суррогатами — «глухими долинами» и «чашами», и ставит нас перед фактом, что реки и деревья водоразделов в природе асимметричны, чего не скажешь о моих брουνсовских моделях. Отсюда следует еще один довод в пользу упомянутой усовершенствованной модели.

Однако распределение площадей озер все еще остается загадочным. Возможно, его гиперболичность проистекает из «устойчивости» гиперболического распределения к всевозможным неприятностям (см. [342] и главу 38). Например, произведение случайного гиперболического множимого на в основном произвольный множитель само является гиперболическим. Причины гиперболичности множимого, возможно, следует искать в том состоянии, в котором пребывала первобытная Земля, когда и рельеф, и все вокруг было гиперболическим. А произвольностью множителя мы, скорее всего, обязаны тысяче геологических и тектонических факторов, повлиявших на очертания береговых линий озер. Как бы то ни было, такое «объяснение», по сути дела, есть не что иное, как отговорка.

## ПОНЯТИЕ ГЛУХОЙ ДОЛИНЫ

Это понятие симметрично понятию океанического острова и обозначает некоторую окруженную сушей область, расположенную ниже уровня моря. Мы будем называть такие области не требующим дополнительных объяснений составным термином «*глухие долины*». Некоторые из них заполнены водой (уровень которой, как правило, ниже уровня моря) — такие, например, как впадины Мертвого моря (уровень воды  $-390,15$  м), Каспийского моря ( $-28,04$  м) и озера Солтон-Си ( $-71,63$  м). Другие глухие долины остаются сухими — такие, как Долина Смерти (уровень дна  $-85,95$  м) или Катарская впадина ( $-132,89$  м). Сюда же можно отнести и расположенную в южной части Шотландии низменность, по которой проходит граница между Шотландией и Англией.

У меня нет никаких данных о проективных площадях, ограниченных линиями уровня глухих долин на уровне моря. Однако, изучив географические карты, можно предположить, что глухих долин на поверхности Земли меньше, чем островов. В контексте той модели, которая полагает Землю плоской за исключением добавленного к плоскости брουνсовского рельефа из плоскости в прямую, такая асимметрия не является чем-то неожиданным. Одинаковость показателей распределений островов и глухих долин означает, что площади, например, десятых по величине острова и озера относятся друг к другу так же, как и площади двадцатых по величине острова и озера. Кроме того, в закон Корчака входит некий «префактор»  $F$ , который устанавливает абсолютное значение

площади десятого по величине острова либо озера. Внимательное изучение приведенных в книге рисунков покажет вам, что в случае континента, окруженного водой, префактор для островов больше, чем для глухих долин (в случае внутреннего моря верно обратное). А в рамках модели броуновского рельефа из сферы в прямую меньшая площадь (Пангея) в большей степени раздроблена, нежели большая площадь (Панталассия).

Как бы то ни было, предыдущее рассуждение ничего не говорит об озерах — за исключением редких и несущественных исключений (таких, как участки рядом с морским берегом, заполненные просочившейся сквозь грунт морской водой) понятия глухих долин и озер не совпадают. Высота дна озера не обязана удовлетворять неравенству  $z < 0$ , а высота уровня его поверхности — равенству  $z = 0$ . Еще одна сложность: большинство озер заполняются в точности до краев (т. е. до уровня, находящегося чуть выше уровня седловой точки), однако из этого правила имеются исключения (например, Большое Соленое озеро и озера, заполняющие придонные области глухих долин, перечисленных в начале этого раздела).

## ПОНЯТИЕ ЧАШИ

Рассмотрим теперь второй озерный суррогат — тот, что мы обозначили нейтральным геометрическим термином *чаша*.

Для определения этого понятия представим себе некий ландшафт из водонепроницаемого материала, каждое углубление в котором заполнено водой точно до краев. Для того, чтобы выбраться из углубления, капле воды приходится двигаться вверх, а затем вниз. Однако если капля *добавляется извне*, то она вполне может ускользнуть, вовсе не двигаясь вверх, — только по горизонтали или вниз. Каждое углубление обладает некоторой положительной площадью, следовательно, количество углублений либо конечно, либо бесконечно, но счетно. Ничто не мешает нам допустить, что различные стоки могут быть расположены на разной высоте. Линия уровня рельефа на точной высоте стока состоит из определенного количества непересекающихся замкнутых кривых и еще одной замкнутой кривой, содержащей точку самокасания. На чуть большей высоте самокасание пропадает. А на чуть меньшей высоте петля распадается на две петли, одна из которых вложена в другую.

Углубления из вышеописанного построения, заполненные водой, мы будем называть чашами.

## ЧЕРТОВЫ ТЕРРАСЫ

Допустим, что перед нами броуновский рельеф с параметром  $0 < H < 1$ . Самоподобие такого рельефа не оставляет сомнений в гипотезе о распределении площадей отдельных чаш. Если размер-

ность рельефа  $D$  не намного превышает 2, то показатель распределения площадей оказывается близок к единице.

Говоря конкретнее, суть моего предположения заключается в том, что капля воды, падая в случайно выбранную точку нашего рельефа, почти наверное попадает в какую-либо чашу. Если это предположение верно, то совокупность поверхностей чаш представляет собой в некотором роде экстраполяцию террасированных полей, распространенных в Юго-Восточной Азии. Я предлагаю называть такой рельеф *чертовыми террасами*. Точки, не попадающие в чаши, образуют совокупную береговую линию чаш и представляют собой разветвленную сеть или случайную разновидность салфетки Серпинского. На тот случай, если я не прав и совокупная граница чаш обладает в действительности положительной, а вовсе не нулевой, площадью (см. главу 15), у меня есть запасное предположение, заключающееся в том, что существует некая чаша, произвольно близкая к любой точке, не принадлежащей ни одной из чаш.

## БРОУНОВСКАЯ МОДЕЛЬ С УЧЕТОМ ВЫВЕТРИВАНИЯ: ГОРНЫЕ ХРЕБТЫ И ПЛОСКИЕ ДОЛИНЫ

Возможно, кто-то из читателей уже испытывает неодолимое искушение модифицировать мои броуновские модели, предположив, что каждая из чаш броуновского материка  $B_H$  заполнена грунтом и образует плоскую равнину. Нет нужды графически иллюстрировать получающуюся при этом функцию  $B_H^*$ , так как во всех представляющих для нас интерес случаях (т. е. когда  $D$  не намного больше 2) заполнение малых чаш не приведет к сколько-нибудь заметным изменениям во внешнем виде рельефа.

Для того чтобы у нас было чем заполнять чаши, следует допустить наличие выветривания, сглаживающего горы; как мы вскоре убедимся, количество требуемого грунта не так уж и велико (если  $D$  не намного превышает 2), поэтому разумно будет предположить, что форма гор изменяется не слишком сильно. То обстоятельство, что выветривание сглаживает также и седловые точки, через которые чаши опустошаются, мы пока учитывать не будем.

С позиций настоящего эссе, главное достоинство предлагаемой модификации заключается в том, что при правильно подобранном уровне моря выветренный броуновский рельеф на плоской Земле остается масштабно-инвариантным. Как же такая эрозия влияет на размерность? Имеются данные, согласно которым значение размерности функции  $B_H^*$  находится в интервале между 2 и 3 —  $H$  (размерность функции  $B_H$ ).

Докажем, что относительное количество грунта, необходимое для заполнения всех чаш, невелико при  $D = 2 + \epsilon$ . Порядок величины объема

материка равен типичной длине проекции материка в степени  $2 + H$ , что прямо пропорционально площади материка в степени  $1 + H/2$ , а объем чаши по отношению к объему материка равен относительной площади чаши в степени  $1 + H/2$ . Поскольку относительная площадь демонстрирует гиперболическое распределение с показателем, близким к единице, и поскольку сумма всех относительных площадей равна 1, можно заключить, что величина  $\sum (\text{относительная площадь чаши})^{1+H/2}$  весьма мала. Исключения из общего правила возникают тогда, когда наибольшая чаша чрезвычайно велика; такие чаши заполнять обязательно, как это и произошло в случае Большого Соленого озера.

## РЕКИ И ВОДОРАЗДЕЛЫ

В первом приближении (играющем центральную роль в главе 7) я предположил, что реки и водоразделы образуют сопряженные заполняющие плоскость древовидные фигуры. Вообще говоря, такое описание можно применить только к картам; как только мы вводим высоту, замечательная симметрия между деревьями рек и водоразделов нарушается. В самом деле, если пренебречь озерами, то точки, принадлежащие дереву водораздела, *всегда* являются либо локальными максимумами (холмами), либо локальными седловыми точками (перевалами), тогда как точки дерева реки *никогда* не бывают ни локальными минимумами, ни седловыми точками. А поскольку в броуновских и дробных броуновских моделях локальные минимумы *безусловно* присутствуют, можно с полной уверенностью сказать, что деревьев рек в них *нет*, — и это еще один удар по моим броуновским моделям.

После того, как чаши заполнены, рек, как таковых, уже не остается — лишь ветвящиеся цепочки озер (бесконечно мелких), похожие на кактусы с дисковидными ветвями. Что касается водоразделов, то они образуют дерево; я полагаю, что это дерево представляет собой ветвящуюся кривую с размерностью  $D < 2$ , однако оно может оказаться и кривой с положительной площадью и, как следствие, размерностью  $D = 2$ . Возможны также и другие, самые различные, варианты, но их лучше приберечь до более подходящего случая.

## СВОЙСТВА ЧАШ

Взглянем на высказанные ранее утверждения в более широкой перспективе, для чего рассмотрим сначала простой, одномерный случай — дробную броуновскую функцию  $B_H(x)$  из прямой в прямую. Островом в таком рельефе будет интервал  $[x', x'']$ , в котором  $B_H(x) > 0$  при  $x' < x < x''$ , а  $B_H(x') = B_H(x'') = 0$ . Обозначим через  $x = x_0$  точку, в которой значение функции  $B$  достигает максимума (вероятность



существования нескольких максимумов  $x_0$  исчезающе мала), и определим функцию  $B_H^*(x)$  следующим образом:

$$B_H^*(x) = \max_{x' \leq u \leq x} B_H(x), \quad \text{если } x \text{ находится в интервале } [x', x_0],$$

$$B_H^*(x) = \max_{x \leq u \leq x''} B_H(x), \quad \text{если } x \text{ находится в интервале } [x_0, x''].$$

Очевидно, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы капля, отправившись в путь из точки  $(x, z)$ , добралась до океана, двигаясь все время по невосходящей траектории, является справедливость неравенства  $z \geq B_H^*(x)$ . Капли, для которых верно неравенство  $B_H(x) < z < B_H^*(x)$ , остаются в чашах навсегда, а значение  $z = B_H^*(x)$  соответствует уровню воды, достигаемому после заполнения всех чаш. Эта наша функция  $B^*$  представляет собой не что иное, как чертову лестницу Леви (см. рис. 399 и 400), идущую вверх от точки  $x'$  до точки  $x_0$  и объединенную с другой лестницей, идущей вниз от  $x_0$  до  $x''$ . Она непрерывна, но недифференцируема, и изменяется на множестве нулевой длины. Любая капля воды, добавленная вблизи высочайшей точки материка, вскоре вольется в океан, двигаясь только по плоским областям, чередующимся с «водопадами».

Капли, которые не могут утечь в океан, заполняют область  $B_H(x) < z \leq B_H^*(x)$ . Эта область несвязна, так как она не содержит точек, в которых  $B_H^* = B_H$ , а ее связные участки представлены расположенными на материке чашами. Длина чаши определяется как расстояние между двумя последовательными нулевыми значениями разности  $B_H^* - B_H$ . Благодаря масштабной инвариантности функции распределение этой длины следует гиперболическому закону; известно, что при  $H = 1/2$  показатель распределения также равен  $1/2$ , и я убежден, что этот показатель всегда совпадает со значением параметра  $H$ . Отношение наибольшей длины чаши к  $|t' - t''|$  имеет наибольшее значение при  $H \rightarrow 0$  и наименьшее — при  $H \rightarrow 1$ .

Вернемся к броуновскому материка  $B_H(x, y)$  на плоской Земле. И в этом случае функция  $B_H^*(x, y)$  определяется с помощью аналогичного условия: капля воды, отправившись в путь из точки, расположенной на высоте  $z > B_H^*(x, y)$ , может добраться до океана по невосходящей траектории, любая точка которой находится выше материка. Как и ранее, пространственная область, внутри которой справедливо неравенство  $B_H(x, y) < z \leq B_H^*(x, y)$ , распадается на отдельные связные открытые области, определяющие чаши.

Сравним эти чаши с чашами на очень тонком срезе материка, ограниченном параллельными стенами  $y = 0$  и  $y = \varepsilon$ , применяя введенные ранее обозначения  $B_H(x)$  и  $B_H^*(x)$ . Согласно определению функции  $B_H^*(x)$ , пути утекания воды ограничиваются траекториями, которые находятся между упомянутыми стенами, тогда как определе-

ние  $B_H^*(x, 0)$  допускает гораздо более широкий выбор возможных путей утекания. Следовательно,  $B_H^*(x, 0) < B_H^*(x)$  почти при любом  $x$ . То есть функция  $B_H^*(x, 0)$ , равно как и любое другое вертикальное сечение функции  $B_H^*(x, y)$ , представляется намного более интересной, нежели функция  $B_H^*(x)$ . Эти сечения представляют собой чертовски террасированные сингулярные функции с бесконечным количеством пикообразных локальных максимумов и плоских локальных минимумов. Если верно мое наиболее правдоподобное предположение, то последние покрывают почти все точки материка.

Так как сумма площадей чаш не может быть больше площади материка, чаши можно расположить в порядке убывания площади, а это означает, что множество чаш счетно. Следовательно, береговая линия материка  $B_H$ , соответствующая некоторому случайному значению  $z_0$ , почти наверняка не содержит двойных точек.

Значит, совокупную границу всех чаш можно получить следующим образом: возьмем некоторое счетное множество значений  $z_m$  — сюда почти наверное не войдет значение, при котором береговая линия образует петлю. Цензурируем множество береговых линий посредством удаления из всех значений  $z_0 = z_m$  тех, что соответствуют береговым линиям глухих долин. К полученному объединению цензурированных береговых линий добавим его предельные точки.

$\triangleleft$  Для любого  $M > 2$  возможно непосредственное обобщение в броуновскую функцию от  $M$ -мерной переменной  $x = \{x_1 \dots x_M\}$ . Из приведенного выше рассуждения для случая  $M = 2$  можно видеть, что при заданной функции  $B_H(x)$  разница между  $B_H^*$  и  $B_H$  уменьшается по мере увеличения  $M$ . В пределе, когда  $M = \infty$ , а  $B_H$  — есть броуновская функция в гильбертовом пространстве, из классических результатов, полученных Полем Леви, следует, что  $B_H^* - B_H \equiv 0$ . Останется ли это тождество истинным для всех  $M > M_{\text{крит}}$ , где  $M_{\text{крит}} < \infty$ ?  $\blacktriangleright$

## 30 ◊ ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Кульминацией настоящей главы станет объяснение иллюстраций 25 и 26, а ее главной темой — дробные броуновские функции от трех переменных с антиперсистентным показателем  $H < 1/2$ . Особо подробно мы остановимся на случае  $H = 1/3$ , а отправной точкой нам снова послужит значение  $H = 1/2$ .

### ИЗОПОВЕРХНОСТИ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Когда жидкость турбулентна, изотермальная поверхность, где температура в точности равна, скажем,  $45^\circ\text{F}$ , топологически представляет собой совокупность сфер. Однако здравый смысл подсказывает нам, что такая поверхность должна быть гораздо более иррегулярной, чем сфера или граница любого тела, описанного в евклидовой геометрии.

В голову приходит приведенная во второй главе цитата из Перрена, описывающая форму коллоидных чешуек, которые образуются при добавлении соли в раствор мыла. Сходство между этими двумя явлениями вполне может выйти за пределы простых геометрических аналогий. Может оказаться так, что чешуйка заполняет зону, в которой концентрация мыла превышает некоторый порог; кроме того, эта концентрация может выступать в качестве инертного индикатора очень развитой турбулентности.

Как бы то ни было, исходя из аналогии с коллоидными чешуйками, можно предположить, что изотермальные поверхности представляют собой поверхности, близкие к фрактальным. Неплохо было бы выяснить, в самом ли деле это так, и — если так, то оценить их фрактальную размерность. Для этого нам необходимо знать, как распределяются температурные изменения в жидкости. Коррзин [87], как и многие другие, сводит эту задачу к классической задаче, которой занимались в 40-х гг. Колмогоров и его коллеги. В некотором смысле эти исследователи блестяще справились с поставленной задачей; с другой стороны, можно сказать, что их постигла неудача. Для неспециалистов я привожу ниже краткий обзор упомянутых классических результатов.

## ДЕЛЬТА-ДИСПЕРСИЯ БЮРГЕРСА

Дельта-дисперсия величины  $X$  определяется в главе 21 как дисперсия приращения  $X$ . Й. М. Бюргерс предположил, что дельта-дисперсия скорости между двумя заданными точками  $P$  и  $P_0 = P + \Delta P$  пропорциональна  $|\Delta P|$ . Этим простым приближенным постулатом определяется *турбулентность Бюргерса*.

Точной математической моделью функции Бюргерса является функция Пуассона, которая строится из бесконечно большого набора скачков направления движения, величин сдвига и интенсивности, задаваемых тремя бесконечными последовательностями взаимно независимых случайных величин. Что-то напоминает, не правда ли? Если не считать добавления переменной  $z$  к  $x$  и  $y$  и замены одномерной высоты трехмерной скоростью, то гауссова функция Бюргерса в точности совпадает с функцией, на которой построена моя обыкновенная броуновская модель земного рельефа, описанная в главе 28.

## ДЕЛЬТА-ДИСПЕРСИЯ КОЛМОГОРОВА

В качестве модели турбулентности дельта-дисперсия Бюргерса не выдерживает никакой критики, причем самым убийственным из ее недостатков является то, что она не соответствует действительности с точки зрения анализа размерностей. Согласно выдержанной в размерностном духе аргументации, выдвинутой Колмогоровым (а также, одновременно с ним, Обуховым, Онсагером и фон Вайцзекером), возможны только два варианта: либо дельта-дисперсия универсальна, т. е. одинакова независимо от условий эксперимента, либо в ней нет никакого смысла. Для того чтобы быть универсальной, дельта-дисперсия должна быть пропорциональна  $|\Delta P|^{2/3}$ . Подобные выводы можно встретить во многих источниках, а их геометрическую природу подчеркивал еще Биркгоф [37].

После первоначальных сомнений было установлено, что колмогоровская дельта-дисперсия удивительно хорошо объясняет турбулентность в океане, атмосфере и других больших объемах. (См. [174].) Это подтверждение знаменует собой триумфальную победу абстрактного априорного мышления над беспорядочностью сырых данных. Такая победа, несомненно, заслуживает (невзирая на многочисленные оговорки, к которым мы в главе 10 добавили несколько своих) того, чтобы о ней знал не только узкий круг специалистов.

Гауссова функция с колмогоровской дельта-дисперсией также выглядит подозрительно знакомой. В настоящем контексте, относящемся к скалярной (одномерной) температуре, эта гауссова функция представляет собой дробную броуновскую функцию из 3-пространства в прямую с параметром  $H = 1/3$ . Таким образом, колмогоровское поле подразуме-

ваит антиперсистентность, тогда как земному рельефу больше по душе персистентность. Есть и более фундаментальное различие: в то время как параметр  $H$ , необходимый для представления земного рельефа, является пока чисто феноменологическим, колмогоровское  $H = 1/3$  уходит корнями в геометрию пространства.

## В ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ИЗОПОВЕРХНОСТИ ФРАКТАЛЬНЫ [380]

Несмотря на свой триумф в предсказании равенства  $H = 1/3$ , подход Колмогорова обладает одним существенным недостатком: распределение разностей скорости или температуры в жидкости остается неизвестным, известно лишь то, что оно не может быть гауссовым.

Подобные негативные результаты, конечно, вызывают некоторые неудобства, однако редко кто отказывается от удобного во всех остальных отношениях допущения по столь незначительным причинам. В лучшем случае исследователи турбулентности просто ведут себя более осторожно при работе с гауссовой моделью: если (и когда) результаты вычислений оказываются логически невозможными, значит, модель неприемлема, если же все в порядке, то движемся дальше.

В работе [380] — тут мы возвращаемся к температуре — я сочетаю гауссово допущение с дельта-дисперсиями Бюргерса и Колмогорова. Можно, очевидно, надеяться, что выводы останутся верными и без учета гауссова допущения, поскольку они основываются не только на непрерывности и самоподобии.

В четырехмерном пространстве координат  $x, y, z, T$  температура  $T$  определяет функцию  $T = T(x, y, z)$ . График дробной броуновской функции — это фрактал размерности  $4 - H$ , причем многие из его сечений меньшей размерности представляют собой следующие хорошо нам известные фрактальные множества.

**Линейные сечения.** Изотерма при фиксированных  $y_0, z_0$  и  $T_0$  состоит из точек, расположенных вдоль пространственной оси, на которой наблюдается некоторое значение  $T$ . Точки образуют дробное броуновское нуль-множество, их фрактальная размерность равна  $1 - H$ .

**Плоские сечения.** При фиксированных  $y_0$  и  $z_0$  кривая, отражающая изменение температуры вдоль оси  $x$ , является дробной броуновской функцией из прямой в прямую, и ее размерность равна  $2 - H$ . При фиксированных  $z_0$  и  $T_0$  изотерма на плоскости определяется неявным уравнением  $T(z_0, x, y)$ . Такие изотермы также имеют размерность  $D = 2 - H$ . Если не считать значения  $D$ , они идентичны береговым линиям, рассмотренным в главе 28.

**Пространственные сечения.** При фиксированном  $z_0$  сечение представляет собой график функции  $T(x, y, z_0)$ , фрактал размерности  $3 - H$ . При  $H = 1/2$  он, по определению, идентичен броуновскому рельефу на иллюстрациях в главе 28. При  $H = 1/3$  — это дробный броуновский рельеф на тех же иллюстрациях.

## ОБЪЯСНЕНИЕ ИЛЛЮСТРАЦИЙ 25 И 26

При фиксированном  $T_0$  изоповерхность, определяемая неявным уравнением  $T(x, y, z) = T_0$ , представляет собой трехмерное обобщение береговой линии и демонстрирует нам новый вид фрактального множества с размерностью  $D = 3 - H$ . Так,  $D = 3 - 1/2$  в гауссовой неперсистентной турбулентности Бюргера и  $D = 3 - 1/3$  в гауссовой антиперсистентной турбулентности Колмогорова.

Такие поверхности представлены на рис. 26, тайну происхождения которого можно, наконец, объяснить. Для контраста на рис. 25 изображена изоповерхность персистентной функции  $T(x, y, z)$  с  $H = 0,75$ . Поверхности, из-за огромного количества вычислений, пришлось весьма сильно сгладить. Тот факт, что различие в значении  $D$  оказывает на общую форму поверхностей вовсе не такое радикальное влияние, как можно было ожидать, объясняется на с. 372.



# Х ◇ СЛУЧАЙНЫЕ ТРЕМЫ. ТЕКСТУРА

---

## 31 ◇ ТРЕМЫ В ИНТЕРВАЛЕ. ЛИНЕЙНАЯ ПЫЛЬ ЛЕВИ

Структура этой группы глав несколько запутана. Понятия *случайных трем* и *текстуры* сойдутся вместе только в главе 35, где будет показано, как можно управлять текстурой. В главе 34 понятие текстуры вводится вне особой связи с тремами; здесь описаны факты, которые можно было бы разбросать по нескольким предыдущим главам, однако ради сохранения целостности рассмотрения я предпочел собрать их в одном месте.

Что касается глав 31–33, то текстура в них совсем не упоминается, а тремы активно используются для построения случайных фракталов, многие из которых встретятся нам впервые. Новые фракталы (как и те, что рассматривались в предыдущих — броуновских — главах) свободны от временных и/или/ пространственных решеток.

В настоящей главе мы поговорим о случайных пылевидных множествах, ограниченных прямой, и попытаемся применить их к решению проблемы шума, с которой мы впервые столкнулись в главе 8, а также подготовим почву для их обобщения на плоскость и пространство; различные варианты такого обобщения будут описаны дальше, в главах 32 и 33.

Главная практическая цель глав 32, 33 и 35 — внести вклад в построение модели скопления галактик; впервые возможности решения этой проблемы мы обсуждали в главе 9.

## УСЛОВНО СТАЦИОНАРНЫЕ ОШИБКИ [21]

В главе 8 мы с восторгом обнаружили, что канторова пыль представляет собой вполне приемлемую модель главных характерных особенностей некоторых избыточных шумов в первом приближении. Однако мы даже не попытались проверить действительное соответствие модели реальным данным. Причина, очевидно, заключается в том, что мы заранее

знали — никакого соответствия здесь нет и в помине. Канторова пыль слишком правильна для того, чтобы служить точной моделью любого из известных мне естественных иррегулярных феноменов. В частности, коэффициенты самоподобия канторовой пыли ограничены величинами вида  $r^k$ . Кроме того, способ построения канторовой пыли также накладывает свой отпечаток (весьма неудачный, надо сказать): канторово множество не может быть совмещено само с собой посредством сдвига — иными словами, оно не является инвариантным относительно сдвига.

Иррегулярность можно легко привести — для этого существует рандомизация. Что касается инвариантности при сдвигах, то от нашей искомой замены канторову множеству потребуется лишь инвариантность в статистическом смысле. В рамках вероятностной терминологии это означает, что множество должно быть стационарным или, по меньшей мере, удовлетворять некоторому подходящим образом смягченному условию стационарности.

В главе 23 было предложено весьма простое средство для частичного достижения этой цели. В настоящей главе мы продвинемся еще на три шага вперед.

Первый шаг можно позаимствовать из самой ранней реалистичной модели перемежаемости. В работе [21] мы начали с некоторого конечного приближения канторовой пыли с порогами  $\varepsilon > 0$  и  $\Omega < \infty$ , а затем случайным образом перемешали пустоты, чтобы добиться их статистической независимости друг от друга. Интервалы длины  $\varepsilon$  между последовательными пустотами мы оставили неизменными. В главе 8 показано, что относительное количество пустот, длина которых превышает  $u$ , задается в канторовой пыли почти гиперболической ступенчатой функцией. Рандомизация по-новому интерпретирует эту функцию в качестве распределения вероятностей больших отклонений  $\text{Pr}(U > u)$ .

В результате получаем рандомизированную канторову пыль с  $\varepsilon > 0$ . К сожалению, ступени распределения  $\text{Pr}(U > u)$  все еще сохраняют в себе следы исходных значений  $N$  и  $r$ . Поэтому в [21] мы сгладили эти ступени: мы положили, что длины последовательных пустот, измеренные в единицах  $\varepsilon$ , представляют собой статистически независимые целые числа  $\geq 1$ , причем их распределение имеет следующий вид:

$$\text{Pr}(U > u) = u^{-D}.$$

Соответствие этой модели действительности оказалось на удивление хорошим: немецкие государственные телефонные линии показали  $D \sim 0,3$ , а согласно сообщениям других авторов, исследовавших позднее другие каналы, значение  $D$  варьируется от 0,1 до почти 1.

Длительности последовательных пустот в нашей с Бергером модели независимы; следовательно, ошибки представляют собой то, что в теории вероятности называется «процессом восстановления» или «возвратным процессом» (см. [147]). Каждая ошибка — это точка возврата,



где прошлое и будущее статистически независимы друг от друга и следуют одинаковым для всех ошибок правилам.

## ЛИНЕЙНАЯ ПЫЛЬ ЛЕВИ

К сожалению, множество, полученное перемешиванием пустот усеченной канторовой пыли (и сглаживанием их распределения), также не избавлено от недостатков: а) соответствие формулы данным наблюдения по избыточным шумам все еще не полно; б) ограничение  $\varepsilon > 0$ , возможно, вполне приемлемо для физиков, однако весьма досадно с эстетической точки зрения; в) построение остается неуклюжим и произвольным; и, наконец, г) оно слишком далеко по духу от оригинального построения Кантора.

В [347], воспользовавшись множеством, предложенным Полем Леви, я построил усовершенствованный вариант искомого множества, лишенный недостатков (а) и (б). Позвольте мне назвать такое множество *пылью Леви*. При заданном значении  $D$  пыль Леви является единственным множеством, сочетающим в себе два желаемых свойства. Как и в рандомизированной усеченной канторовой пыли, прошлое и будущее, рассматриваемые из принадлежащей этому множеству точки, независимы друг от друга. Как и канторова пыль, пыль Леви представляет собой самоподобный фрактал. Однако пыль Леви статистически тождественна самой себе при уменьшении с *произвольным* коэффициентом подобия  $r$  в интервале от 0 до 1 — ничем подобным канторова пыль похвастаться не может.

Оказывается, нуль-множество броуновского движения (глава 25) представляет собой пыль Леви с  $D = 1/2$ .

К сожалению, метод, использованный Леви при введении своего множества, сохраняет вышеупомянутые недостатки (в) и (г). К тому же, он весьма деликатен в формальном смысле: требуется, чтобы значение  $u$  было не просто целым числом  $\geq 1$ , но и могло принимать любые положительные вещественные значения с  $\text{Pr}(U > u) = u^{-D}$  вплоть до  $u = 0$ . Так как  $0^{-D} = \infty$ , общая «вероятность» также бесконечна. Метод, используемый для устранения этой, по всей видимости, нелепой возможности, весьма важен и интересен, однако никакого иного отношения к нашей работе не имеет.

К счастью, от этих трудностей легко избавиться, приняв более естественный способ построения «трем», предложенный в [371].

## ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ТРЕМЫ

Предварительное замечание: я утверждаю, что было бы очень полезно описать исходную канторову пыль с помощью сочетания «дей-

ствительных» и «виртуальных» трем. Начинаем — как обычно — с интервала  $[0, 1]$  и вырезания его средней трети  $]^{1/3}, ^{2/3}[$ . После этого этапа сущность построения остается той же, однако формальное описание изменяется. Мы делаем вид, что средние трети на втором этапе вырезаются из *каждой* трети исходного интервала  $[0, 1]$ . Хотя вырезание средней трети из уже вырезанной средней трети не оказывает сколько-нибудь заметного воздействия, виртуальные тремы вскоре окажутся весьма удобными. Далее аналогичным образом вырезаем средние трети из *каждой* девятой части интервала  $[0, 1]$ , затем из *каждой* 27-й и т. д. Заметим, что распределение количества трем, длина которых превосходит  $u$ , задается теперь ступенчатой функцией, общий характер изменения которой пропорционален уже не  $u^{-D}$ , а  $u^{-1}$ . Характер зависимости от  $u$  сохраняется неизменным при различных правилах створаживания; от метода построения зависят только расположение ступеней и коэффициент пропорциональности.

## ТРЕМЫ В ИНТЕРВАЛЕ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПУСТОТЫ [371]

В работе [371] я рандомизировал канторово построение путем сглаживания ступеней распределения и выбором расположения трем и их длин случайным образом, независимо друг от друга. Наконец, для реализации пропорциональности  $u^{-1}$  предполагается, что количество трем, длина которых превышает  $u$ , а центр приходится на некий интервал длины  $\Delta t$ , имеет математическое ожидание, равное  $(1 - D_*)\Delta t/u$ , и пуассоновское распределение. Причина введения обозначения  $1 - D_*$  вскоре прояснится.

Будучи независимыми, тремы могут пересекаться, чем они и занимаются с большим удовольствием: вероятность того, что какую-либо трему ни разу не пересечет другая трема, равна нулю. Иными словами, понятия *тремы* и *пустоты* (или *паузы*) больше не совпадают: термином *пустота* мы теперь обозначаем интервалы, образованные перекрывающимися тремами. Возникает вопрос: сливаются ли все тремы в конце концов в одну гигантскую пустоту, или в интервале остаются непокрытые ими точки? Мы сначала объявим ответ, а затем, в следующем разделе, обоснуем его с помощью наглядного рассуждения на примере процесса рождения и покажем, что непокрытые точки образуют *невывужденные* кластеры.

Рассмотрим интервал, не покрытый полностью тремами с длиной больше  $\varepsilon_0$ , и введем меньшие тремы, длина которых превышает движущийся порог  $\varepsilon$ , убывающий с  $\varepsilon_0$  до 0. Устремив при  $D_* \leq 0$  порог  $\varepsilon$  к 0, мы почти наверняка (вероятность стремится к 1) получим интервал, в котором не остается непокрытой *ни одна* точка. При  $0 < D_* < 1$  *может* получиться то же самое, однако *почти полной* уверенности тут уже нет.

Даже в пределе существует некоторая положительная вероятность, что какой-то участок («трема-фрактал») останется непокрытым. В [371] доказывается, что этот трема-фрактал представляет собой не что иное, как пыль Леви с размерностью  $D = D_*$ .

Короче говоря,  $D = \max(D_*, 0)$ .

## ПРОЦЕСС РОЖДЕНИЯ И НЕВЫНУЖДЕННАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ В ПЫЛИ ЛЕВИ

При построении, описанном в главе 8, канторовы ошибки поступают иерархическими пакетами или «кластерами», причем интенсивность кластеризации находится в соответствии с показателем  $D$ . Это свойство сохраняется и тогда, когда паузы перемешаны случайным образом, однако доказательство этого утверждения весьма запутано и мало что проясняет.

Напротив, доказательство того же результата для пыли со случайными тремами является очень простым и представляет подлинный интерес.

Суть, опять же, заключается в том, чтобы начать с трем, длина которых несколько больше порога  $\varepsilon$ , затем многократно умножать  $\varepsilon$  на некоторый коэффициент  $r < 1$  (скажем,  $r = 1/3$ ) с тем, чтобы значение  $\varepsilon$  устремилось к нулю. Начинаем с межпаузного интервала, не содержащего трем, ограниченного двумя « $\varepsilon$ -паузами». Добавление трем с длинами между  $\varepsilon/3$  и  $\varepsilon$  приводит иногда к совершенно опустошительному результату: стирается весь интервал. Существует, однако, неплохая вероятность того, что воздействие будет значительно более мягким: а) ограничивающие  $\varepsilon$ -паузы растягиваются в более длинные ( $\varepsilon/3$ )-паузы и б) внутри нашего межпаузного интервала появляются дополнительные малые ( $\varepsilon/3$ )-паузы. Заново определенные межпаузные интервалы неизменно выглядят как кластеризованные. Аналогичным образом порождаются и подкластеры, только ( $\varepsilon/3$ ) нужно заменить на  $\varepsilon/9, \dots, 3^{-n}\varepsilon, \dots$

Эволюция этих кластеров при  $n \rightarrow \infty$  управляется новым процессом — процессом рождения и гибели. Как и в классической теории (см. главу 23), кластеры гибнут или множатся независимо от других кластеров с тем же  $n$ , равно как и от истории их семей. Вероятность стирания длинного межпаузного интервала меньше, чем вероятность стирания короткого, и кроме того, длинный интервал порождает в среднем более многочисленное потомство. При возрастании величины  $1 - D_*$  интервалы между  $\varepsilon$ -паузами становятся короче, а некоторые интервалы между ( $\varepsilon/3$ )-паузами исчезают вовсе. Таким образом, ожидаемое количество потомков уменьшается двумя путями. Значение  $D_* = 0$  является критическим в том смысле, что при  $D_* \leq 0$  семейство почти наверное обречено на вымирание, тогда как при  $D_* > 0$  существует положительная вероятность того, что семья будет процветать и множиться вечно.

## СРЕДНЕЕ КОЛИЧЕСТВО ОШИБОК СОГЛАСНО МОДЕЛИ БЕРГЕРА – МАНДЕЛЬБРОТА

◁ Это техническое отступление призвано показать, что основные результаты, касающиеся распределения ошибок в модели, основанной на канторовой пыли, остаются истинными и после рандомизации. Более того, в этом случае рассуждения и выводы значительно упрощаются, особенно если принять  $\Omega = \infty$ . Мы продемонстрируем применение условного математического ожидания в самоподобных процессах на следующем примере.

Предположим, что в интервале  $[0, R]$  имеется, по меньшей мере, одна ошибка; значение  $R$  находится в диапазоне, определяемом неравенствами  $R \gg \eta$  и  $R \ll \Omega$ . Такое условие имеет вид  $M(R) > 0$ . Причина, по которой модель Бергера–Мандельброта называется *условно стационарной*, заключается в следующем: если интервал  $[t, t + d]$  целиком находится внутри интервала  $[0, R]$ , то распределение условного количества ошибок, определяемого выражением  $\{M(t+d) - M(t) | M(R) > 0\}$ , не зависит от  $t$ . Следовательно, достаточно рассмотреть его при  $t = 0$ . Кроме того, учитывая аддитивность математических ожиданий, из одной лишь условной стационарности следует, что

$$\langle M(d) | M(R) > 0 \rangle = (d/R) \langle M(R) | M(R) > 0 \rangle.$$

Самоподобие же подразумевает, что

$$\Pr\{M(d) > 0 | M(R) > 0\} = (d/R)^{1-D^*},$$

где  $D^*$  — константа, определяемая спецификой рассматриваемого процесса. Для доказательства этого утверждения достаточно ввести некоторую промежуточную величину  $d'$ , удовлетворяющую неравенству  $d < d' < R$ , и разложить нашу условную вероятность  $\Pr$  в виде

$$\Pr\{M(d) > 0 | M(d') > 0\} \Pr\{M(d') > 0 | M(R) > 0\}.$$

Объединив два последних равенства, получим

$$\langle M(d) | M(d) > 0 \rangle = (d/R)^{D^*} \langle M(R) | M(R) > 0 \rangle.$$

Таким образом, для того, чтобы показать, что

$$\langle M(d) | M(d) > 0 \rangle d^{-D^*} = \text{const},$$

вполне достаточно просто объединить условную стационарность с самоподобием. В данной конкретной модели  $D^* = D$ . Кроме того, из одного лишь самоподобия следует, что величины

$$\frac{\{\text{Момент возникновения первой ошибки} | M(R) > 0\}}{R} \quad \text{и} \\ \frac{\{M(R) | M(R) > 0\}}{\langle M(R) | M(R) > 0 \rangle}$$

являются случайными величинами, зависящими от  $D$ , но не зависящими от  $R$ , ни от  $\Omega$ .

В отличие от условной вероятности, абсолютная вероятность обесценивающего события  $M(R) > 0$  сильно зависит от  $\Omega$ . Однако если усечение до  $\Omega < \infty$  произведено должным образом, то получается следующее равенство:

$$\text{Pr}\{M(R) > 0\} = (R/\Omega)^{1-D}.$$

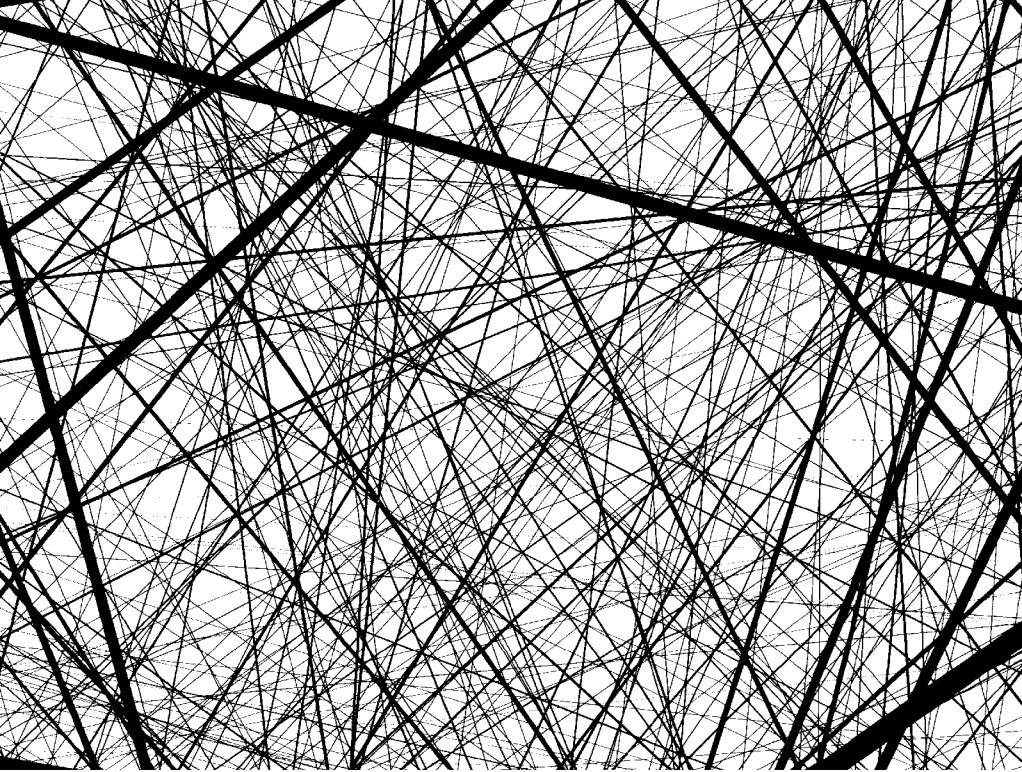
Поскольку последнее выражение можно вывести из выражения, приведенного в предыдущем абзаце, просто заменив  $R$  на  $L$ , а  $d$  на  $R$ , событие « $M(R) > 0$ , если известно, что  $L < \infty$ » можно рассматривать как событие « $M(R) > 0$ , если известно, что  $M(L) > 0$ ». В пределе  $\Omega \rightarrow \infty$  вероятность того, что интервал  $[0, R]$  целиком поместится в некоторой очень длинной паузе, стремится к единице, т. е. вероятность возникновения ошибки становится бесконечно малой. Однако на выведенную ранее условную вероятность количества ошибок это никак не влияет.

Предыдущее рассуждение можно рассматривать как дополнение к обсуждению условного космографического принципа в главе 22. ►

### Рис. 398. УЛИЦЫ, ПРОЛОЖЕННЫЕ СЛУЧАЙНЫМ ОБРАЗОМ

Как уже указывалось в главе 8, канторову пыль, к большому нашему сожалению, очень сложно изобразить непосредственно. Однако мы можем представить ее себе опосредованно, в виде пересечения тричной кривой Коха с ее основанием. Аналогичным образом можно опосредованно представить пыль Леви. На иллюстрации показаны черные полосы, напоминающие улицы и расположенные случайным образом; что особенно важно, их направления изотропны. Ширина «улиц» следует гомберболическому распределению и очень быстро уменьшается настолько, что их становится невозможно изобразить на рисунке. Площадь остаточного множества (участки белого цвета, или «кварталы») асимптотически приближается к нулю, а размерность  $D$  — к некоторой величине, меньшей 2.

Пока остаточные кварталы имеют размерность  $D > 1$ , их пересечение произвольной прямой представляет собой пыль Леви с размерностью  $D - 1$ . Если же  $D < 1$ , то пересечение почти наверное является пустым множеством. Этот вывод, однако, не представляется очевидным, так как на рисунке невозможно отобразить сколько-нибудь поздний этап построения.



В главе 33 имеется более удачная иллюстрация. В случае, когда вычитаемые из плоскости тремы представляют собой случайным образом расположенные диски случайного размера, как показано на рис. 424–427, пересечения трема-фракталов с прямыми суть не что иное, как пыль Леви. ■

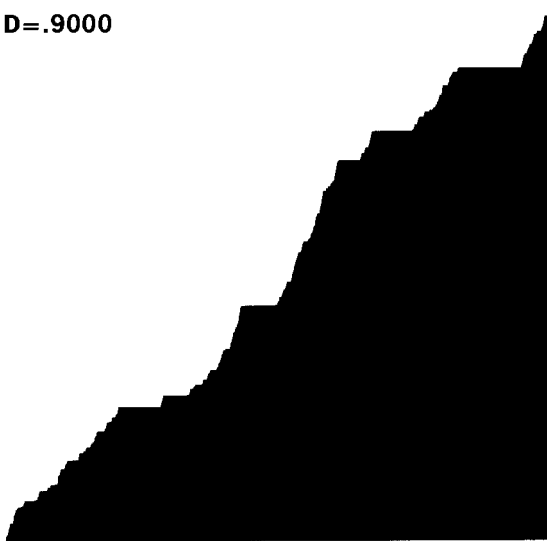
---

**Рис. 399 и 400. ДЬЯВОЛЬСКИЕ ЛЕСТНИЦЫ ПОЛЯ ЛЕВИ  
(РАЗМЕРНОСТЬ  $D = 1$ ; РАЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВ АБСЦИСС  
СТУПЕНЕЙ РАВНЫ, СООТВЕТСТВЕННО,  $D = 9/10$ ,  $D = 3/10$   
И  $D = 0,6309$ )**

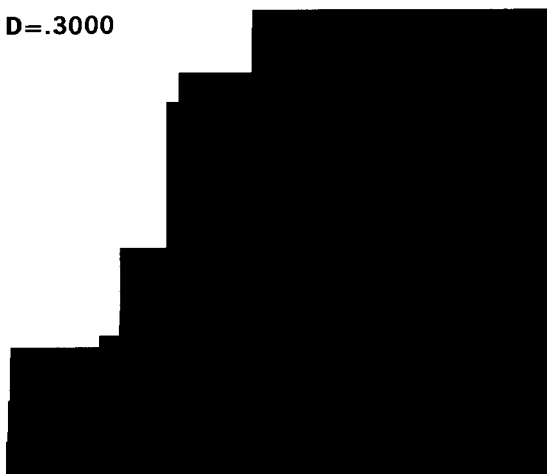
Эти графики представляют собой рандомизированные аналоги функции Кантора (иначе — чертовой лестницы) с рис. 125. Размерность наибольшей из этих лестниц Леви равна размерности канторова оригинала; размерности двух оставшихся лестниц либо намного меньше, либо намного больше.

Для того чтобы построить лестницу Леви, рассмотрим абсциссу как функцию от ординаты. На первом этапе будем увеличивать

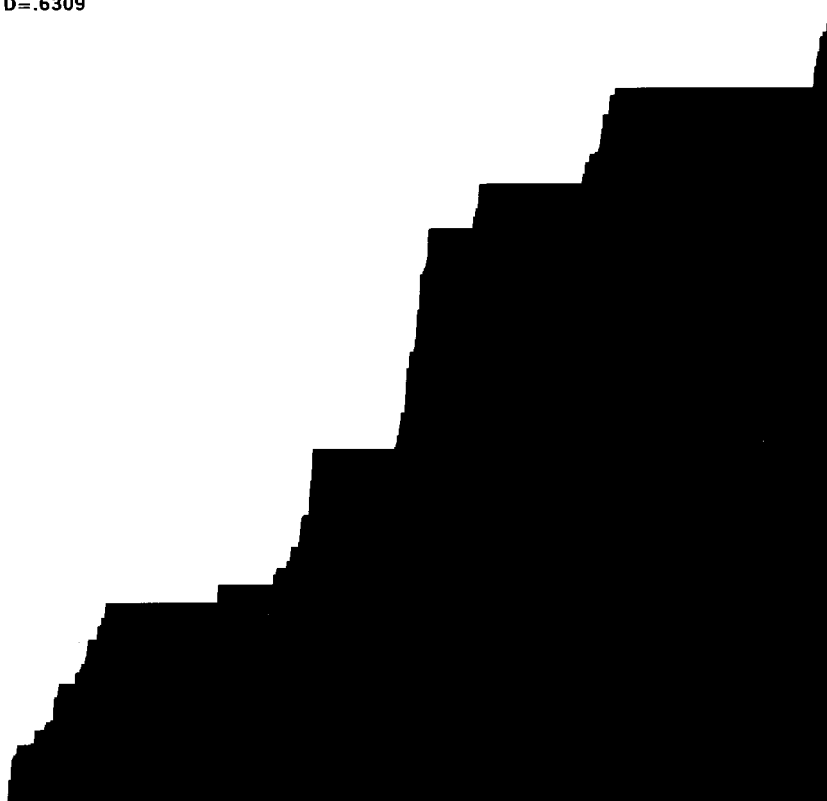
**D=.9000**



**D=.3000**



D=.6309



абсциссу на некоторую случайную величину согласно распределению  $\Pr(\Delta X > u) = u^{-D}$  при всяком увеличении ординаты на величину  $\Delta y$  (в наших примерах  $\Delta y = 0,002$ ). На втором этапе масштабируем абсциссу так, чтобы лестница заканчивалась в точке  $(1, 1)$ . Количество ступеней в маленькой лестнице с  $D = 0,3$  кажется меньше из-за чрезвычайно сильной кластеризации абсцисс ступеней.

■



## 32 $\diamond$ СУБОРДИНАЦИЯ. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ПЫЛЬ ЛЕВИ. УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГАЛАКТИКИ

Центральной темой этой и следующей глав являются скопления галактик (эту тему мы уже затрагивали в главах 9, 22 и 23). Пользуясь известными методами, мы обобщим пылевидные множества из предыдущей главы на плоскость и пространство. В настоящей главе мы будем в основном заниматься пространственной пылью Леви. Следуя Бохнеру, мы введем эти фракталы посредством «обработки» броуновского движения по методу «субординации». Вдобавок к пыли Леви мы познакомимся с полетом Леви, представляющим собой нестандартное случайное блуждание. Начинается глава с неформального предисловия, посвященного кластерам случайного блуждания. Далее, путем обобщения на неслучайные структуры объясняется и обосновывается метод субординации. Утверждения, сделанные в предисловии, обосновываются в последнем разделе.

### ПРЕДИСЛОВИЕ: КЛАСТЕРЫ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

Цель моей ранней модели скоплений галактик состояла в демонстрации распределения масс со следующими характерными особенностями: а) масса  $M(R)$ , заключенная в сфере, центр которой совпадает с центром распределения, удовлетворяет соотношению  $M(R) \propto R^D$ , где  $D < 2$ ; б) распределение удовлетворяет условному космографическому принципу в его статистической форме.

**Промежуточные остановки полета Рэлея.** В качестве предварительного шага рассмотрим конструкцию, ни фрактальная, ни топологическая размерность которой не совпадает с размерностями скоплений галактик. Начиная с некоторой точки  $\Pi(0)$  в пространстве, ракета, выполняющая полет Рэлея, совершает прыжок в некотором изотропном случайном направлении. Длительность каждого прыжка составляет  $\Delta t = 1$ , а расстояние  $U$  до следующей остановки  $\Pi(1)$  представляет собой случайную гауссову величину, удовлетворяющую усло-

вию  $\langle [\Pi(1) - \Pi(0)]^2 \rangle = 1$ . Далее ракета прыгает в точку  $\Pi(2)$  — такую, что величины

$$U_1 = \Pi(1) - \Pi(0) \quad \text{и} \quad U_2 = \Pi(2) - \Pi(1)$$

представляют собой независимые и тождественно распределенные векторы. И так далее.

Если предположить, что движение ракеты не ограничено ни началом, ни концом, следует добавить и предыдущие остановки  $\Pi(-1)$ ,  $\Pi(-2)$ , ... Однако изменение направления течения времени никак не влияет на случайное блуждание, а следовательно, достаточно изобразить две независимые траектории с началом в точке  $\Pi(0)$ .

След нашей ракеты (включая и «инверсионный след», который она оставляет при прыжках) представляет собой случайное множество. Таким же случайным множеством является и совокупность точек промежуточных остановок, рассмотренная без учета порядка их посещения. Оба множества следуют совершенно одинаковому распределению при рассмотрении с любой из точек  $\Pi(t)$ . Согласно терминологии, введенной в главе 22, оба множества удовлетворяют условному космографическому принципу в его должной статистической форме.

**Погрузка.** Тождественно распределенные и статистически независимые массы приписываются случайным образом к каждой промежуточной остановке полета Рэля, распространяя на массы условную стационарность.

**Размерность  $D = 2$ .** Широко известно, что расстояние, которое ракета Рэля преодолевает за  $K$  прыжков, возрастает пропорционально  $\sqrt{K}$ . Вследствие этого количество остановок, оказавшихся внутри сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $\Pi(t)$ , выражается формулой  $M(R) \propto R^2$ . Показатель здесь находится в соответствии с тем, что размерность множества промежуточных остановок  $\Pi(t)$  составляет  $D = 2$ . Глобальная плотность, в частности, обращается в нуль.

**Броуновское движение.** Интерполируя полет Рэля в непрерывном времени, получаем броуновский след, который (см. главу 25) представляет собой непрерывную кривую с размерностью  $D = 2$ . Таким образом, модель полета Рэля является, в сущности, фрактальной кривой ( $D_T = 1$ ,  $D = 2$ ), удовлетворяющей условному (а отнюдь не усиленному) космографическому принципу. Последнее заключение вполне удовлетворительно, однако значения  $D_T$  и  $D$  неприемлемы.

**Обобщенная плотность.** Если нагрузить броуновский след между точками  $\Pi(t_0)$  и  $\Pi(t)$  массой  $\delta |t_0 - t|$ , то массу  $M(R)$  можно представить как произведение времени, проведенного ракетой внутри сферы радиуса  $R$ , на равномерную обобщенную плотность  $\delta$ .

**Расширение Вселенной.** В рамках стандартных дискуссий исходное распределение имеет равномерную плотность  $\delta$ . По мере равномерного расширения Вселенной плотность  $\delta$  уменьшается, однако распределение остается равномерным. С другой стороны, общепринятое мнение состоит в том, что любое другое распределение при расширении изменяется. Равномерно нагруженный броуновский след конструктивно показывает, что это заключение *неверно*: плотность  $\delta$ , конечно же, изменяется при расширении, однако остается определенной и равномерной.

Таким образом, в вопросе о возможном расширении Вселенной, промежуточные остановки Рэля занимают промежуточную позицию. Это свойство остановок сохраняется и в том случае, когда размерность  $D$  уменьшается при замене полета Рэля на полет Леви, который мы сейчас и рассмотрим.

**Промежуточные остановки полета Леви. Нецелочисленные размерности  $D < 2$ .** Моя модель распределения галактик, основанная на случайных блужданиях, способна реализовать любую желаемую фрактальную размерность  $D < 2$  с помощью пыли, т. е. множества, топологическая размерность которого равна нулю. Для достижения этой цели я использую случайное блуждание, в котором математическое ожидание  $\langle U^2(t) \rangle$  бесконечно, поскольку величина  $U$  представляет собой гиперболическую случайную величину с внутренним пределом при  $u = 1$ . Так, при  $u \leq 1$  вероятность  $\text{Pr}(U > u) = 1$ , а при  $u > 1$  вероятность  $\text{Pr}(U > u) \propto u^{-D}$ , где  $0 < D < 2$ .

Важнейшим следствием такого рассуждения можно считать соотношение  $\langle M(R) \rangle \propto R^D$ , где  $R \gg 1$ . Именно этого соотношения мы, собственно, и добивались. Оно допускает любое значение  $D$ , какое только могут предложить теория или результаты наблюдений.

◁ **Отступление об устойчивости по Леви.** При  $t \rightarrow \infty$  масса, переносимая за временной интервал  $t$  (должным образом масштабированный), сходится к случайной величине, независимой от  $t$ ; эта случайная величина была впервые исследована Полем Леви, и поэтому называть ее лучше всего «устойчивой по Леви» (см. главу 39). Отсюда, кстати, и термин «полет Леви», предложенный мною для обозначения процесса, лежащего в основе моей модели.

Поскольку  $\langle U^2 \rangle = \infty$ , стандартная центральная предельная теорема здесь не годится, вместо нее следует применять специальную центральную предельную теорему. Эта замена влечет за собой довольно значительные последствия. Стандартная теорема «универсальна» в том смысле, что предел зависит только от величин  $\langle U \rangle$  и  $\langle U^2 \rangle$ . Нестандартная теорема *не является* универсальной. Через показатель  $D$  распределение  $M(R)$  явным образом зависит от распределения прыжков. ►

В оставшейся части главы мы построим пыль, которая играет в отношении полета Леви ту же роль, какую броуновское движение играет в

отношении полета Рэлея. Прямая интерполяция утомительно формальна, поскольку ей приходится придавать смысл распределению  $\text{Pr}(U > u) = u^{-D}$ , применяемому вплоть до  $u = 0$ , где оно расходится. Непрямой же подход может оказаться не только простым, но и точным, если использовать процесс субординации. Этот процесс представляет собой отдельный интерес и открывает пути для многочисленных очевидных обобщений.

## ПОЛЕТ КОШИ И $D = 1$

Воспользуемся для представления процесса субординации наглядным примером. Если исходной кривой является броуновский след с размерностью  $D = 2$ , то для получения размерности  $D = 1$  нам необходимо найти способ понизить  $D$  на единицу. Имея дело с классическими фигурами евклидовой геометрии, добиться такого понижения очень легко. В случае плоскости достаточно взять ее сечение прямой, в случае 3-пространства — его сечение плоскостью, а в случае 4-пространства — его сечение 3-пространством. Из главы 23 нам известно, что то же правило годится и для случайных фрактальных творогов, а из главы 25 — что размерность броуновской функции из прямой в прямую равна  $3/2$ , в то время как размерность ее нуля-множества и всех сечений, не перпендикулярных оси  $t$ , равна  $1/2$ .

Расширив этот метод вычитания 1 из  $D$  по формальной аналогии, можно заподозрить, что должным образом выбранные сечения броуновского следа должны, как правило, иметь размерность  $2 - 1 = 1$ . Это подозрение и в самом деле подтверждается (см. [148], с. 348). Более того, можно и нужно расширить упомянутый метод на плоские сечения следа в обычном 3-пространстве и на трехмерные сечения следа в 4-пространстве (обозначим его измерения через  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и «юмор»).

Возьмем в качестве исходного броуновский след из прямой в 4-пространство и рассмотрим точки, координата «юмор» которых равна 0. Можно представить, что эти «серьезные» точки порождаются в том порядке, в каком они посещаются соответствующим броуновским движением, и что расстояния между этими посещаемыми точками независимы и изотропны. Следовательно, серьезные точки можно рассматривать как промежуточные остановки случайного полета, правила построения которого существенно отличаются от правил построения броуновского движения. Такое блуждание мы будем называть движением (или полетом) Коши. При заданных моментах времени 0 и  $t$  плотность вероятности вектора из точки  $\Pi(0)$  в точку  $\Pi(t)$  представляет собой число, кратное значению выражения

$$t^{-E} [1 + |\Pi(t) - \Pi(0)|^2 t^{-2}]^{-E/2}.$$

Формальное допущение  $D = 1$  подтверждается в работах С. Дж. Тейлора [561, 562]. Полет Коши проиллюстрирован на одном из видов рис. 414.

## ПОНЯТИЕ СУБОРДИНАЦИИ

Рассмотрим внимательнее построение из предыдущего раздела. Броуновское движение из прямой в  $E$ -пространство посещает «серьезные» точки в те моменты времени, когда одна из его координатных функций из прямой в прямую обращается в нуль. Но каждая из координатных функций представляет собой одномерное броуновское движение. Нуль-множества такой функции образуют множество с размерностью  $D = 1/2$  (см. главу 25); вдобавок ко всему из взаимной независимости междулевыми интервалов следует, что рассматриваемое нуль-множество есть линейная пыль Леви. Вывод: движение Коши есть не что иное, как отображение линейной пыли Леви на броуновское движение. Вспомните об очаровательном римском обычае под названием «децимация», заключавшемся в казни каждого десятого из некоторой недружественной группы людей<sup>1</sup>, и вы увидите, что движение Коши — это результат своего рода фрактальной децимации. Первым этот процесс описал Бохнер [42], он же дал ему имя — *субординация*. (У Феллера [148] можно найти немало разрозненных, но весьма глубоких замечаний по поводу этого понятия.)

А пока заметим на будущее, что

$$D_{\text{следа Коши}} = D_{\text{броуновского следа}} \times D_{\text{броуновского нуль-множества}}.$$

## СУБОРДИНАЦИЯ ПРИМЕНИМА И К НЕСЛУЧАЙНЫМ ФРАКТАЛАМ

Для более глубокого понимания природы фрактальной субординации применим ее к некоторым фрактальным кривым Коха и Пеано. (Как это ни странно, но настоящее обсуждение является, по всей видимости, первым случаем упоминания субординации в *неслучайном* контексте.)

Идея заключается в модификации этих кривых посредством замены генератора (при неизменном инициаторе) на некоторое подмножество исходного генератора. Такая операция замещает предельное фрактальное множество (которое мы будем называть *субординандом*) на некоторое *субординатное* подмножество (или *субординат*). Рассмотрим сначала примеры, а затем введем весьма важное правило — *правило умножения размерностей*.

<sup>1</sup>См. также прим. к с. 302. — *Прим. перев.*

**Пример с  $D < 2$ .** Возьмем четырехзвенный генератор троичной кривой Коха (его мы применяли для построения фигуры на рис. 70). Если стереть второе и третье звенья, получится классический генератор троичной канторовой пыли (рис. 120). Таким образом, канторова пыль является субординатным подмножеством для трети коховой снежинки. Можно получить и другую субординатную пыль, не ограниченную прямой, если стереть, например, первое и третье из  $N = 4$  звеньев генератора Коха. В любом случае субординация изменяет размерность с  $\ln 4 / \ln 3$  на  $\ln 2 / \ln 3$ . Если стереть только одно звено генератора, то субординатная пыль *не* окажется подмножеством прямой, хотя ее размерность равна  $\ln 3 / \ln 3 = 1$ .

**Пример с  $D = 2$ .** Возьмем четырехзвенную ломаную, получаемую на втором этапе построения кривой Пеано–Чезаро (рис. 98), и удалим второе и третье звенья. Новый генератор представляет собой не что иное, как сам интервал  $[0, 1]$ ! Таким образом, прямолинейный интервал является субординатом кривой Пеано–Чезаро (самым что ни на есть тривиальным!) Удалив иной набор из двух звеньев, получим фрактальную пыль с размерностью  $D = 1$ . Удаление одного звена дает множество с размерностью  $\ln 3 / \ln 2$ .

## УМНОЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В главах 6 и 7 мы упоминали о том, что кривые Коха и Пеано можно рассматривать как следы «движений», временной параметр  $t$  которых лежит в интервале  $[0, 1]$ . Если в качестве примера взять генератор снежинки Коха, то это время определяется следующим образом: четыре звена генератора покрываются в те моменты времени, значения которых, разложенные по основанию 4, начинаются, соответственно, с 0, 1, 2 и 3. А, скажем, вторая четверть третьей четверти генератора покрывается в те моменты времени, значения которых, разложенные по основанию 4, начинаются с 0, 21. Рассматриваемые в виде движений, кривые Коха и Пеано сами являются «фрактальными отображениями» интервала  $[0, 1]$ . В этом смысле воздействие упоминаемой ранее децимации звеньев генератора заключается в том, чтобы удалить те значения  $t$ , которые содержат цифры 1 и 2 (или 0 и 3), ограничив тем самым параметр  $t$  значениями, принадлежащими определенной канторовой пыли на интервале  $[0, 1]$ .

Следовательно, мы можем охарактеризовать наши субординатные подмножества кривых Коха и Пеано как *фрактальные отображения фрактального* подмножества моментов времени. Совершенно очевидно, что такое подмножество представляет собой канторову пыль; назовем его *субординатором*. Его размерность равна  $\ln N / \ln N' = \ln 2 / \ln 4 = 1/2$ . Обобщая, получаем следующее не требующее дополнительных

объяснений соотношение:

$$D_{\text{субордината}} = D_{\text{субординанда}} \times D_{\text{субординатора}}.$$

Это также обобщает и то соотношение, которое характеризует движение Коши. При рассмотрении сечений и пересечений мы уже встречались с суммами размерностей. Теперь же оказывается, что в нашем замечательном «исчислении» смысл имеют не только суммы, но и произведения размерностей.

Разумеется, это правило имеет исключения, аналогичные тем, которые являются исключениями из правила о сложении коразмерностей при пересечении.

## ЛИНЕЙНАЯ ПЫЛЬ ЛЕВИ В РОЛИ СУБОРДИНАТОРА

Линейная пыль Леви из главы 31 была первым субординатором у Бохнера, и с тех пор чистая математика использует ее в качестве субординатора настолько широко, что соответствующую лестницу Леви часто называют устойчивой субординаторной функцией. Для получения самоподобных субординатных множеств применяется самоподобный субординанд — такой, как броуновское или дробное броуновское движение.

Заметим, что, хотя для броуновского движения характерна размерность 2, броуновское движение, ограниченное прямой, имеет размерность 1. Следовательно, правило из предыдущего раздела принимает несколько иной вид

$$D_{\text{субордината}} = \min\{E, 2 \times D_{\text{субординатора}}\}.$$

В общем случае для дробного броуновского движения характерна размерность  $1/H$ , однако

$$D_{\text{субордината}} = \min\{E, D_{\text{субординатора}}/H\}.$$

Таким образом, размерность  $E$  пространства, которое может быть полностью заполнено этим субординатным множеством, не превышает целой части числа  $1/H$ .

**Броуновское движение в роли субординанда.** Наиболее значительным субординандом является броуновский след. Броуновское отображение моментов времени, ограниченных линейной пылью Леви с размерностью  $D/2$ , лежащей в интервале между 0 и 1, представляет собой пространственную пыль с произвольной размерностью  $D$ , лежащей в интервале между 0 и 2. Представляется уместным назвать такое отображение пространственной пылью Леви.

Учитывая, что и паузы пыли-субординатора, и приращения субординанда статистически независимы, можно предположить, что приращения процесса субординации также статистически независимы. А учитывая, что длины пауз субординатора удовлетворяют соотношению  $\text{Pr}(W > w) = w^{-D/2}$  и что за время паузы продолжительностью  $w$  броуновское движение пройдет расстояние порядка  $u = \sqrt{w}$ , можно предположить, что паузы пространственной пыли, по всей видимости, удовлетворяют соотношению  $\text{Pr}(U > u) = \text{Pr}(W > u^2) = u^{-D}$ . Можно показать, что так оно в самом деле и есть.

## УПОРЯДОЧЕННЫЕ СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК

Из формулы  $\text{Pr}(U > u) = u^{-D}$  мы видим, что субординатная пыль реализует процесс, упомянутый в начале этой главы.

**Размерности.** Сама пыль имеет размерность  $D$ . Если отображения концевых точек каждой линейной паузы соединить интервалами, то получится след Леви; его размерность равна  $\max(1, D)$  (такую же размерность мы получили, исследуя деревья в главе 16).

**Корреляции.** След Леви способен линейно упорядочивать порождаемые им галактики; при этом каждая галактика взаимодействует только со своими непосредственными соседями. Каждая же пара соседей ведет себя независимо от других пар. В этом смысле полет Леви сродни ничем не оправданной замене нерешаемой задачи  $N$  тел на вполне удобоваримую совокупность многих задач двух тел. Результат мог бы оказаться донельзя нереалистичным, однако не оказался. В работе [383] (полное описание которой можно также найти в монографии П. Дж. Э. Пиблса [467], с. 243–249) я показал, что полет Леви приводит к двух- и трехточечным корреляциям на небесной сфере, тождественным тем, которые были получены Пиблсом и Гротом в 1975 г. методом подбора; см. [467].

■

### Рис. 409. В РОЛИ ХУДОЖНИКА — ОШИБКА В ПРОГРАММЕ, ОПУС 2

Авторство этой иллюстрации можно частично приписать ошибочному программированию. Ошибку вовремя распознали и исправили (*после* сохранения результата, разумеется!); конечным результатом вы можете полюбоваться на рис. 105.

Изменения, явившиеся результатом пустяковой ошибки в критическом месте, далеко превзошли наши наихудшие опасения.





Очевидно, что по замыслу в «правильном» рисунке 105 должен был наличествовать весьма строгий порядок. Здесь этот порядок оказался скрыт от глаз, причем никакого другого порядка также не наблюдается.

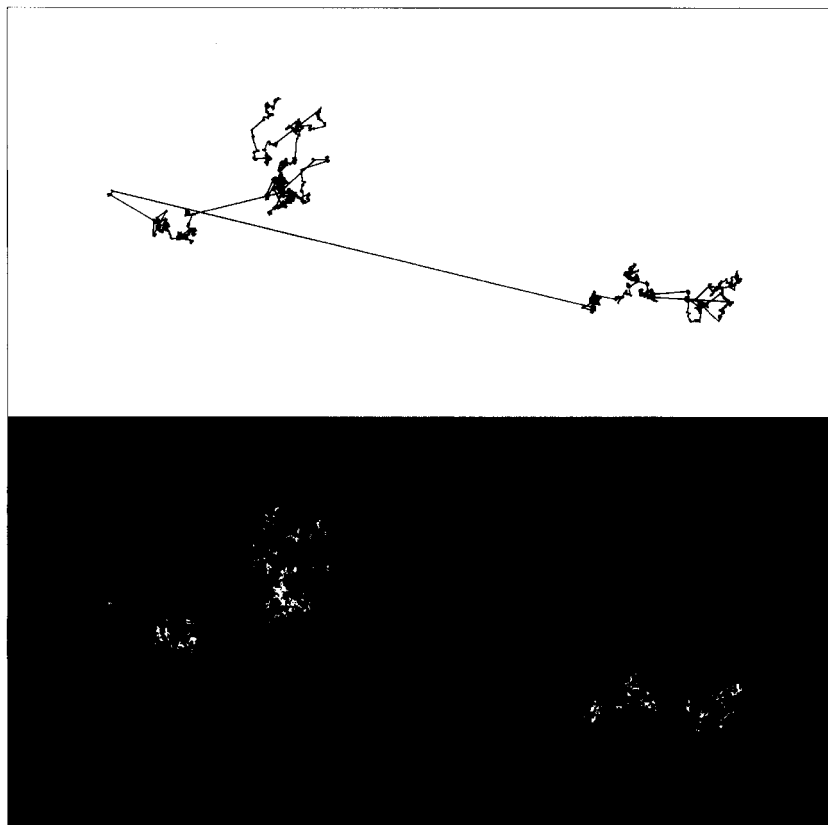
То, что эта иллюстрация — по крайней мере, на первый взгляд — вполне может сойти за произведение высокого искусства, явно не случайно. Свои соображения на этот счет я вкратце высказал в [399] и намерен изложить их в полном виде в самом ближайшем будущем. ■

---

**Рис. 410 и 411. СКОПЛЕНИЯ ГАЛАКТИК СОГЛАСНО РАННЕЙ  
МОДЕЛИ МАНДЕЛЬБРОТА (РАЗМЕРНОСТЬ  $D = 1,2600$ ).  
ПОЛЕТ ЛЕВИ И ЕГО ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ОСТАНОВКИ**

Полет Леви в грубом виде можно представить как последовательность скачков, разделенных остановками. Непосредственный интерес для нас в рамках этой главы представляют последние, однако и скачки являются необходимым элементом построения.

Например, изображенный на верхних (черных на белом) рисунках след движения включает в себя и «инверсионный след», оставляемый

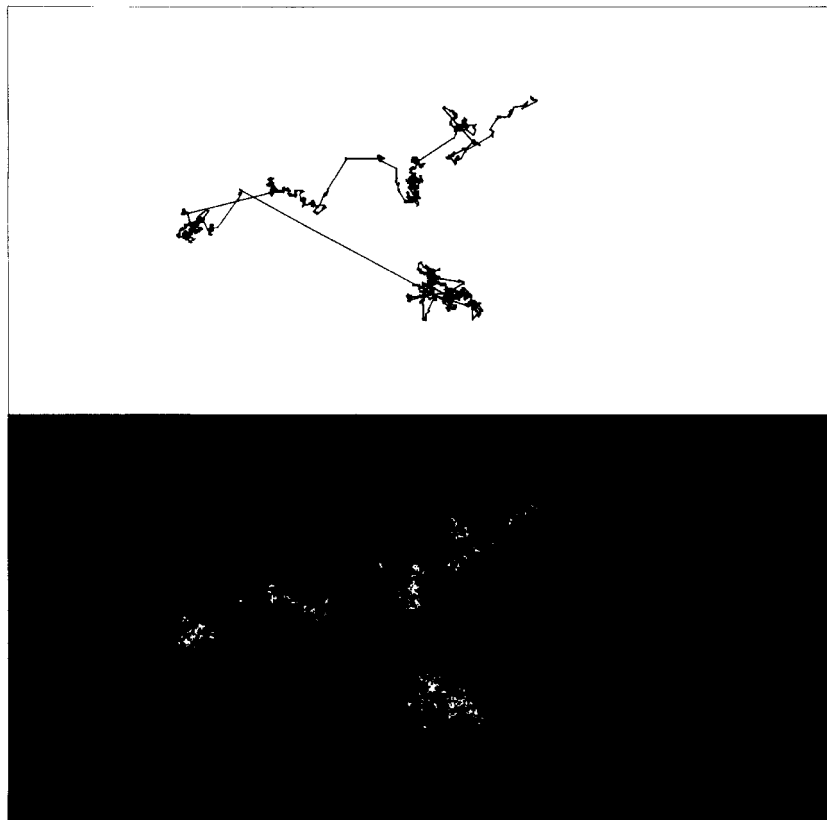


$$D = 1,2600$$

летающей ракетой. Трехмерный след показан с помощью двух его проекций на перпендикулярные плоскости. Оригинал можно представить, расположив страницы книги перпендикулярно друг другу.

Нижние рисунки (белые на черном) получены из верхних — в процессе исчезли отрезки, представляющие траектории скачков, а изображение было преобразовано в собственный негатив. Каждая промежуточная остановка символизирует собой звезду, галактику, либо просто некий обобщенный сгусток материи.

Говоря точнее, прямолинейные отрезки на верхних (черных на белом) рисунках имеют следующую особенность: их направление в пространстве случайно и изотропно (т. е. параллельно вектору, соединяющему начало пространственных координат с некоторой точкой, выбранной наугад на поверхности сферы). Различные отрезки статистически независимы, а их длины следуют распределению вероятностей  $\Pr(U > u) = u^{-D}$ , за исключением того, что  $\Pr(U > u) = 1$  при  $u < 1$ . Значе-



$$D = 1,2600$$

ние  $D = 1,2600$  близко к значению  $D \sim 1,23$ , найденному для реальных галактик.

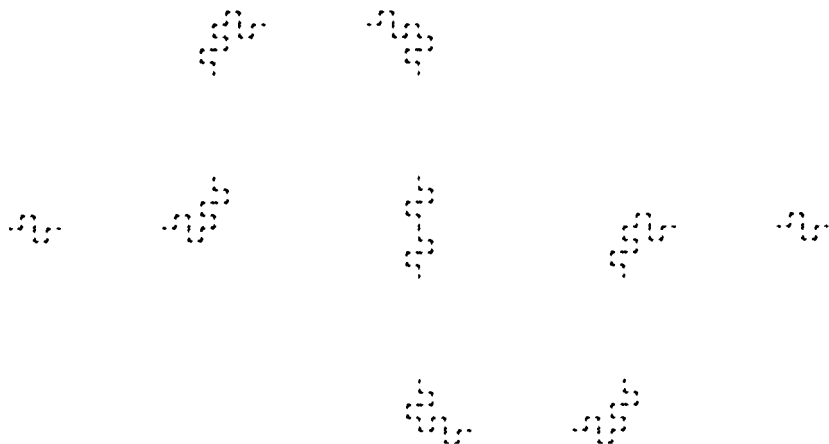
Подавляющее большинство отрезков слишком малы, чтобы их можно было разглядеть. На самом деле мы просто накрыли плоскость однородной решеткой и отметили те ячейки, на которые приходились одна или более остановок. Иными словами, каждая точка представляет собой целый миникластер.

Кроме того, сами миникластеры также собираются в скопления, причем независимо от значения  $D$ . Они демонстрируют настолько ярко выраженные иерархические уровни, что трудно поверить в то, что в рассматриваемую модель не заложено никакой явной иерархии, кроме присущего ей изначально самоподобия.

Для дальнейшего развития темы следует упомянуть и о том, что на всех иллюстрациях в данной подборке представлены начала двух различных полетов, прямого и обратного, и что эти полеты суть не что

иное, как две статистически независимые копии одного процесса. Если переместить начало координат в точку какой-либо другой остановки, то и новые половины процесса будут, по всей видимости, независимыми. Следовательно, все промежуточные остановки обладают абсолютно равными правами на звание Центра Мироздания. Эта особенность составляет сущность *условного космографического принципа*, провозглашаемого мною в настоящем эссе.

Рассматриваемый метод никоим образом не предназначен для объяснения действительного способа образования галактик, однако вполне справляется с продвижением моей основной идеи, заключающейся в том, что условный космографический принцип ничуть не противоречит явной иерархической кластеризации. Можно предложить очень много подобных конфигураций, причем самых разнообразных, пусть даже ни одна из них не окажется «сшита по мерке».



**Рис. 412. НЕСЛУЧАЙНАЯ СУБОРДИНАЦИЯ:  
КЛАСТЕРИЗОВАННАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ ПЫЛЬ С  
РАЗМЕРНОСТЬЮ  $D = 1$ ; СУБОРДИНАТ КРИВОЙ КОХА С  
РАЗМЕРНОСТЬЮ  $D = 1, 5$**

Метод рекурсии, лежащий в основе построения кривой Коха, можно модифицировать так, чтобы кривая систематически терпела разрыв, в результате чего мы получим пыль, обладающую той же размерностью, что и исходная кривая ( $D = 1$ ), но с совершенно иной топологией и внешним видом.

Представьте себе резиновую ленту, первоначально соединяющую концы интервала  $[0, 1]$ , а затем растянутую в виде кохова генератора, с помощью которого мы построили фрактальную кривую с размерностью  $3/2$  на рис. 81. Теперь закрепим резиновую ленту в угловых точках и разрежем посередине каждый из восьми прямолинейных отрезков; получим 16 кусков резины, которые сократятся до своей исходной длины  $1/16$ . Свободные концы этих кусков также закрепим и повторим процесс. Окончательным результатом будет иерархически кластеризованная самоподобная пыль с  $r = 1/16$  и  $N = 16$ , вследствие чего  $D = 1$ .

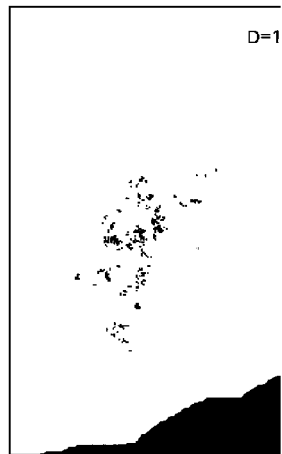
Такой способ построения, по сути дела, позволяет нам заранее отметить все те звенья генератора, которые затем, на следующем этапе кохова построения, будут удалены. В тексте главы этот процесс называется субординацией. В итоге остаются лишь те точки, в которых оказывается движение Коха в моменты времени, принадлежащие некоторому подмножеству с фрактальной размерностью  $\ln 16 / \ln 64 = 4/6$ . А то, что  $(4/6) \times (3/2) = 1$ , спишем на особый случай правила умножения размерностей, рассматриваемого в соответствующем разделе настоящей главы.

Заметим, что все точки изображенной здесь пыли неизменно упорядочены вдоль кривой Коха, подмножеством которой и является наш генератор. Кроме того, нетрудно найти частотное распределение длин, до которых сокращаются резиновые отрезки, между последовательно расположенными точками закрепления. Количество длин  $\geq u$  приблизительно пропорционально  $u^{-D}$ , где  $D = 1$ . Обратите внимание, что на рис. 410 и 411 то же частотное распределение дает совершенно иную картину.

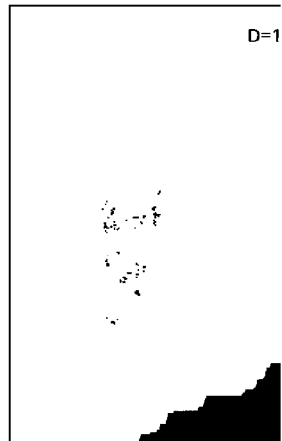
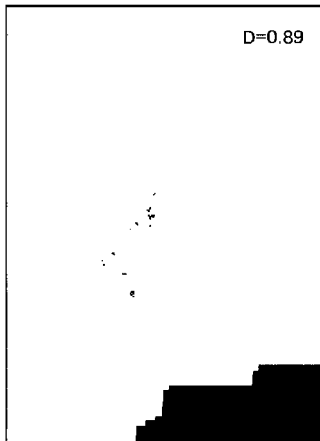
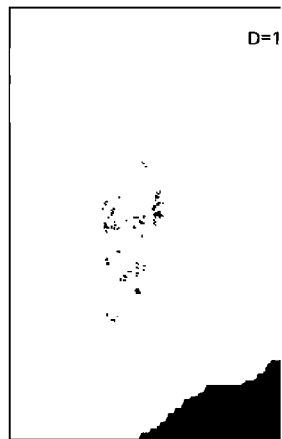
■

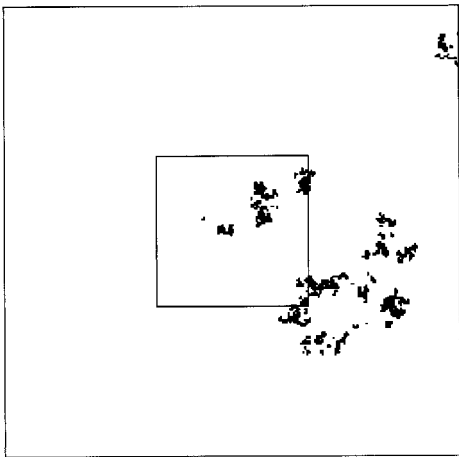
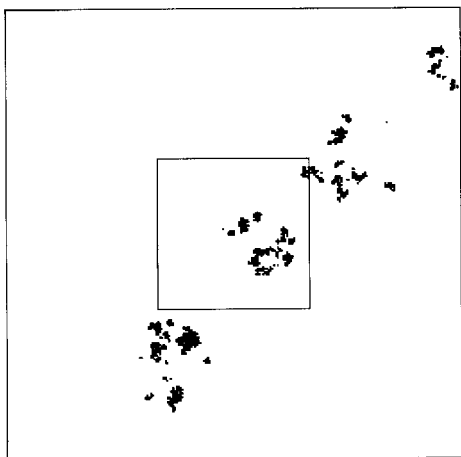
#### **Рис. 414. Понижение размерности $D$ с помощью субординации. Разделение скоплений Леви**

Степень кластеризации плоской пыли Леви зависит от ее размерности  $D$ . Этот эффект проиллюстрирован здесь путем обработки плоского броуновского следа ( $D = 2$ ) с помощью ряда последовательных субординаций Леви, каждая из которых (кроме первой) применяется к результату предыдущей. В конечном итоге получаем  $D_{\text{субординатора}} = 2^{-1/6} = 0,89$ , т.е. последовательность размерностей субординатных пылей имеет следующий вид: 1, 78 ( $= 2 \times 0,89$ ), 1, 59, 1, 41, 1, 26, 1, 12, 1, 0, 89.



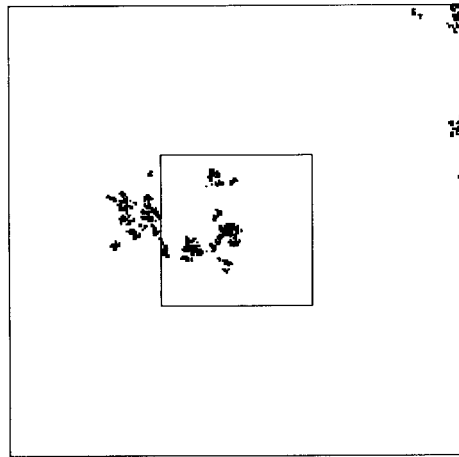
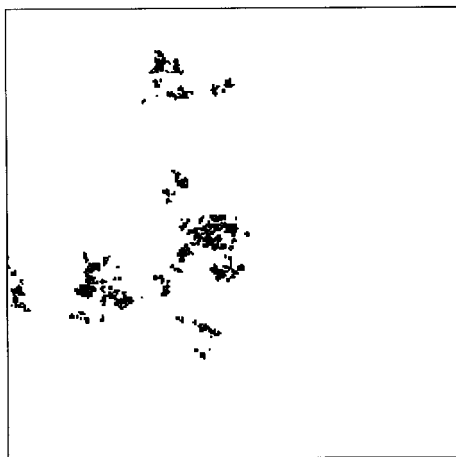
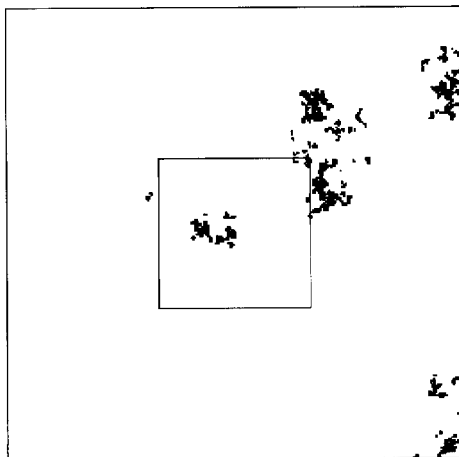
Лестницы Леви в правых нижних углах рисунков показывают, какую децимацию пришлось перенести временному параметру, чтобы мы могли получить соответствующую пыль из пыли с размерностью  $D = 1,78$ . При  $D$ , близком к 2, еще вполне ясно можно различить «призрак» субординанда (непрерывного броуновского следа), однако при понижении  $D$  этот призрак тает прямо на глазах (см. главу 35). Рост кластеризации вызван не сгущением всех точек вокруг немногих центров, а всего лишь исчезновением многих точек, что приводит к росту количества видимых иерархических уровней. ■

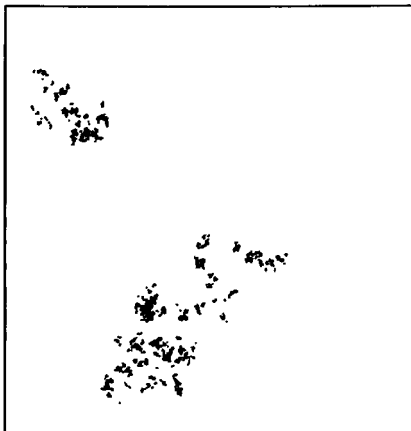
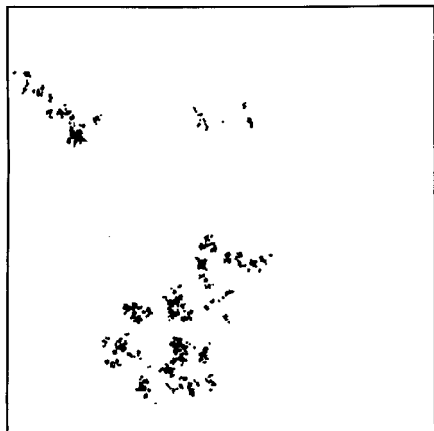




**рис. 415. ПЫЛЬ ЛЕВИ С РАЗМЕРНОС-  
ГЬЮ  $D = 1,2600$ : КРУПНЫЕ ПЛАНЫ**

ервый рисунок (вверху слева) представляет со-  
бой вид из квадратного иллюминатора отдален-  
ного космического корабля на звездное скоп-  
ление, состоящее из 12 500 000 промежуточных  
становок движения Леви. Переход к следую-  
ему по часовой стрелке виду символизирует  
уменьшение расстояния от корабля до центра  
скопления в  $b = 3$  раза, соответственно умень-  
шается и размер поля зрения. Конструкция, ви-  
димая в иллюминатор, меняется в деталях, од-  
ako в общем и целом остается неизменной. Это  
гнудь не является для нас неожиданностью —  
иссматриваемое множество самоподобно. ■

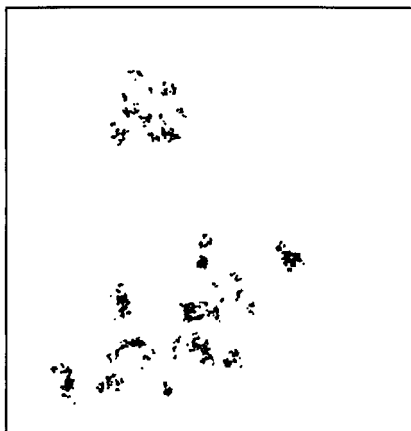
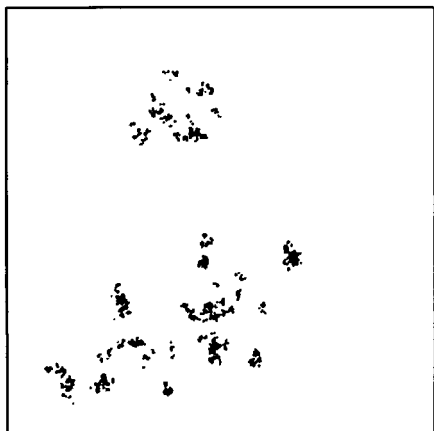
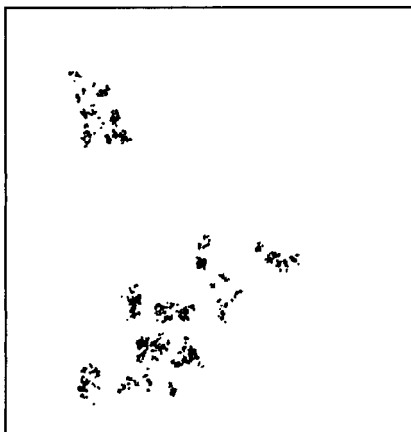




**Рис. 416. КРУГОВОЙ ОБЛЕТ  
СКОПЛЕНИЙ ЛЕВИ С  
РАЗМЕРНОСТЬЮ  $D = 1, 3000$**

Форма скоплений, образованных из остановок полета Леви в плоскости, очень сильно зависит от условий выборки, т. е. при построении большого количества моделей скоплений (пусть и с одинаковой размерностью) следует ожидать не меньшего разнообразия форм.

То же верно и для малого изолированного пространственного скопления Леви при рассмотрении его с различных сторон, что демонстрируют представленные здесь иллюстрации (начиная с верхней левой и далее по часовой стрелке). ■





## 33 ◊ КРУГОВЫЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕМЫ: ЛУННЫЕ КРАТЕРЫ И ГАЛАКТИКИ

Представив линейную пыль Леви в качестве трема-фрактала с помощью случайных трем в форме интервалов (глава 31), мы тут же (глава 32) свернули с намеченного пути в сторону и произвели обобщение этой пыли на плоскость и пространство с помощью процесса субординации. В настоящей же главе (и в следующей за ней) предпринимается попытка непосредственного обобщения случайных трем.

Плоские и пространственные тремы в этой главе представлены кругами и шарами, поэтому наше обобщение оказывается напрямую связано с формами лунных кратеров и метеоритов. Однако наиболее важное применение пространственных трем относится к несколько иной области и не так очевидно. При значении  $D$ , близком к 1, трема-фрактал представляет собой пыль и, следовательно, является потенциальным кандидатом на замещение совокупности промежуточных остановок полета Леви при моделировании скоплений галактик. Новизна по сравнению с основанными на случайных блужданиях моделями заключается, главным образом, в том, что галактики в такой модели *не* упорядочены вдоль некоего следа. Отсюда получаем выигрыш в априорном правдоподобии и, как следствие, проигрываем в удобстве вычислений, однако в конечном счете новая модель все же побеждает благодаря лучшему соответствию реальности: предсказанные с ее помощью ковариантные свойства оказываются заметно ближе к результатам наблюдений. Несферические тремы (глава 35) улучшают соответствие еще больше.

### ПЛОСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТРЕМЫ

Прежде, чем мы приступим к рассмотрению случайных и перекрывающихся трем, опишем плоское створаживание на решетке (главы 13 и 14), используя понятие виртуальной тремы. Первый этап каскада заключается в выделении  $N$  из  $b^2$  квадратных ячеек для последующего сохранения их в качестве творогов. Иначе можно сказать, что на первом этапе вырезаются  $b^2 - N$  квадратных трем. На следующем этапе вырезаются квадратные тремы второго порядка в количестве  $b^2 (b^2 - N)$ , включая  $N (b^2 - N)$  истинно новых трем и  $(b^2 - N)^2$  «виртуальных» трем (которые и здесь удаляют то, что уже было удалено на предыдущем этапе). И так далее.

Пересчитав истинные и виртуальные тремы, мы обнаружим, что количество трем с площадью, превышающей некоторую величину  $s$ , пропорционально  $1/s$ . Аналогичный вывод можно сделать и по отношению к створаживанию в 3-пространстве: количество трем, объемы которых превышают некоторую величину  $v$ , пропорционально  $1/v$ .

Большая часть этой главы (и главы 35) посвящена рассмотрению случая, когда количество независимых трем, сосредоточенных в ячейке со сторонами  $dx$  и  $dy$  (или  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ ), представляет собой пуассоновскую случайную величину с ожиданием

$$\begin{aligned}\langle \text{Nr}(\text{площадь} > a) \rangle &= (C/2a) dx dy, \\ \langle \text{Nr}(\text{объем} > v) \rangle &= (C/3v) dx dy dz.\end{aligned}$$

Соответствующее ожидание в пространстве  $\mathbb{R}^E$  равно

$$(C/Ev) dx_1, \dots, dx_E.$$

Фрактальные свойства получаемого в результате трема-множества столь же просты, как и в линейном случае, рассмотренном в главе 31. При  $C < 1$  эти свойства можно вывести из свойств линейного множества; в предшествующих же эссе было высказано предположение, что упомянутые свойства остаются в силе при всех  $C$ . Это предположение получило подтверждение в работе [132].

При  $C > E$  трема-множество почти наверное окажется пустым. При  $C < E$  оно представляет собой фрактал с размерностью  $D = E - C$ .

Что касается топологии трема-фракталов, то, руководствуясь общими принципами, можно предположить, что трема-множество с размерностью  $D < 1$  есть пыль ( $D_T = 0$ ). С другой стороны, при  $D > 1$  одних общих принципов недостаточно, и топология определяется формой тремы. Здесь снова возникает задача о перколяции, причем в ином, нежели раньше, фрактальном контексте.

## ЛУННЫЕ КРАТЕРЫ И КРУГОВЫЕ ТРЕМЫ

Начнем с одного второстепенного вопроса, который обеспечит нас упрощенной двумерной подготовкой и сам по себе довольно интересен: какова геометрическая природа множества, не занятого лунными кратерами? Хотя греки называли словом *κράτηρ* чашу или иной сосуд для питья, большая часть кратеров на поверхности Земли имеет вулканическое происхождение. Большинство людей, однако, полагает, что кратеры, наблюдаемые на поверхности Луны, Марса, юпитерианского спутника Каллисто, а также других планет и их спутников образовались, преимущественно, в результате падений метеоритов.

Чем больше метеорит, тем шире и глубже оказывается образующийся при его ударе о поверхность планеты кратер. Кроме того, большой кратер, явившийся следствием падения тяжелого метеорита, может «стереть с лица планеты» несколько уже существовавших малых кратеров; с другой стороны, падение легкого метеорита вполне может оставить «зазубрину» на краю старого большого кратера. Что касается размеров кратеров, существуют достоверные эмпирические данные в пользу того, что площади кратеров (измеренные сразу же после удара метеорита о поверхность) следуют гиперболическому распределению: количество кратеров, площади которых превышают  $s$  км<sup>2</sup>, а центры расположены в пределах квадрата со стороной в 1 км<sup>2</sup>, можно записать в виде  $C/s$ , где  $C$  — некоторая константа. За подробностями отсылаю к работам [411], [8] и [200].

Для упрощения рассуждений (главный результат от этого не изменится) аппроксимируем лунную поверхность плоскостью, а лунные кратеры — тремами в форме кругов. Если бы Луна вечно захватывала метеориты из статистически инвариантного окружения, то каждая точка ее поверхности снова и снова оказывалась бы принадлежащей какому-либо кратеру, и так до бесконечности. С другой стороны, те или иные геологические процессы — такие, скажем, как выход на поверхность вулканической лавы — могут время от времени «стирать» кратеры, и в этом случае трема-множество, не покрытое на какой-то момент времени кратерами, может оказаться весьма нетривиальным. Кроме того, эволюция солнечной системы могла происходить таким образом, что бомбардировка Луны метеоритами заняла лишь какой-то конечный период времени. Параметр  $C$  может характеризовать либо время, прошедшее после последнего стирания кратеров, либо общую продолжительность бомбардировки.

Для оценки влияния параметра  $C$  на форму трема-фрактала попробуем изменить этот параметр, сохраняя инвариантной заправку. По мере увеличения  $C$  от 0 до 2 поверхность Луны становится все более насыщенной кратерами, а размерность  $D$  свободной от кратеров поверхности, согласно одному из выводов предыдущего раздела, уменьшается и достигает нуля при  $C \geq 2$ . Зависимость формы трема-фрактала от  $D$  проиллюстрирована на рис. 424–427.

**Аппенцеллер И Эмменталер.** При очень малых значениях параметра  $C$  наши фракталы представляются мне (думаю, многие любители швейцарских сыров со мной в этом согласятся) похожими на ломтики сыра, почти целиком испещренные очень маленькими, «булавочными» отверстиями. Можно назвать такую форму приблизительной экстраполяцией структуры аппенцелльского сыра. По мере увеличения  $C$  мы постепенно переходим к столь же приблизительной экстраполяции структуры другого сыра, эмментальского, для которого характерны большие, перекрывающие друг дружку отверстия.

(Вот так выясняется, что английский детский стишок о Луне, сделанной из зеленого сыра, является истинным отражением реальности — за исключением, пожалуй, цвета.)

**Топология. Критические значения  $D$ .** Обе упомянутые выше экстраполяции могут быть лишь приближительными, поскольку площадь трема-фрактальных «ломтей сыра» приближается к нулю. Выскажу предположение: пока параметр  $C$  достаточно мал, трема-фрактал представляет собой  $\sigma$ -кластер, каждый из контактных кластеров которого имеет вид переплетения связанных между собой нитей с топологической размерностью  $D_T = 1$ . Когда размерность  $D$  достигает определенного критического значения  $D_{\text{крит}}$ , размерность  $D_T$  падает до нуля, и  $\sigma$ -паутина коллапсирует в пыль.

Следующее критическое значение  $D = 0$ . При  $C > 2$  поверхность Луны перенасыщена кратерами — любая из ее точек почти наверное принадлежит, по меньшей мере, одному кратеру. Так, в частности, обстояло бы дело, если бы поверхность Луны никогда не очищалась от кратеров и продолжала бы бесконечно принимать на себя удары метеоритов.

**Немасштабируемые кратеры.** Плотность кратеров, покрывающих поверхности некоторых других планет (наша Луна в их число не входит), характеризуется выражением вида  $Ws^{-\gamma}$ , где  $\gamma \neq 1$ . С задачей, которую ставят перед нами такие кратеры, мы разберемся в приложении к настоящей главе.

## ГАЛАКТИКИ И МЕЖГАЛАКТИЧЕСКИЕ ПУСТОТЫ, ПОСТРОЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕМ

Хотя круговые тремы с некоторых пор обрели независимое и общепризнанное существование в виде лунных кратеров, шарообразным тремам с масштабно-инвариантным распределением приходилось поначалу довольствоваться ролью естественного приложения этого же геометрического приема к пространственному случаю. Я предположил, что шарообразные тремы смогут явиться основой для построения галактической модели, альтернативной той, что описана в главе 32. Тем самым я постулировал существование межгалактических пустот, объединяющих в себе большое количество трем и способных достигать очень больших размеров. Хорошее соответствие реальности, продемонстрированное получившейся моделью, оказалось весьма приятным сюрпризом и потребовало дальнейших теоретических (см. главу 35) и экспериментальных изысканий.

**Ковариантности.** Так как статистики и физики имеют обыкновение доверять корреляциям и спектрам, первое испытание трема-фракталов в роли моделей скоплений галактик опирается на их корреляционные свойства. Ковариантность между двумя точками в пространстве оказывается такой же, как и в модели, основанной на случайных блужданиях, — в этом нет ничего удивительного, так как последняя модель

хорошо согласуется с данными наблюдений. То же верно (как, собственно, и должно быть) и для ковариантности между двумя направлениями в небесах. Предсказываемые данной моделью ковариантности между тремя и четырьмя направлениями соответствуют реальности лучше, чем те, что дает модель случайных блужданий, однако улучшения носят чисто технический характер, и их рассмотрение едва ли отвечает нашим целям и задачам. В сущности, при определенном значении  $D$  различные модели дают одинаковые корреляции.

А теперь вспомним о том, что гауссовы феномены, включая броуновские и дробные броуновские фракталы, полностью характеризуются своими ковариантностями. Если же упомянутые феномены масштабнo-инвариантны, то они полностью характеризуются размерностью  $D$ . Учитывая влияние гауссовых феноменов на мыслительные процессы, происходящие в головах статистиков, возникает сильное искушение остановиться на ковариантностях. Однако фрактальная пыль *не является* гауссовым феноменом, а ее размерность  $D$  оказывается неспособной описать многие важные ее свойства.

**Критические размерности.** Необходимо разобраться еще с одним вопросом, более фундаментальным, чем корреляция: обладают ли трема-фракталы соответствующей топологией? Для этого лучше всего воспользоваться уже испытанным в предыдущем разделе способом: будем увеличивать значение параметра  $C$  от 0 до 3, сохраняя заправку неизменной. Пока значение  $C$  мало,  $D_T = 2$ , а наш фрактал представляет собой совокупность разветвленных вуалей. Когда значение  $D$  пересекает определенную границу  $D_{2\text{крит}}$ , называемую верхней критической размерностью, вуали распадаются на нити с топологической размерностью  $D_T = 1$ . Когда же значение  $D$  пересекает некоторую меньшую границу  $D_{\text{крит}}$  (нижняя критическая размерность), нити расплзаются в пыль ( $D_T = 0$ ). Поскольку для моделирования скоплений галактик необходима именно пыль, важно удостовериться, что размерность  $D_{\text{крит}}$  превышает известную из наблюдений величину  $D \sim 1,23$ . Результаты проведенного мною компьютерного моделирования подтверждают соблюдение этого неравенства.

**Перколяция.** Надежда на то, что наш мир не более сложен, чем это необходимо, побуждает меня поверить, что условие  $D > D_{\text{крит}}$  является необходимым и достаточным условием для перколяции на трема-фрактале (в смысле, описанном в главе 13).

## МЕТЕОРИТЫ

Распределение масс падающих на Землю метеоритов исследовано достаточно тщательно (например, в [206]). Метеориты средних размеров состоят из камня, и  $1 \text{ км}^3$  пространства содержит приблизительно  $P(v) = 10^{-25}/v$  метеоритов, объемы которых превосходят  $v \text{ км}^3$ .

Обычно это утверждение выражают несколько иначе, пользуясь при этом довольно путанными единицами измерения: каждый год каждый квадратный километр поверхности Земли принимает на себя удар (в среднем)  $0,186/t$  метеоритов, масса каждого из которых превышает  $t$  граммов. Поскольку средняя плотность метеоритов составляет  $3,4 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , это соотношение, будучи выраженным в более согласованных единицах, сводится к  $5,4 \cdot 10^{-17}/v$  метеоритов, объемы которых превосходят  $v \text{ км}^3$ . Кроме того, Земля движется по орбите со скоростью, составляющей приблизительно 1 км за  $10^{-9}$  лет — величина, обратная порядку длины траектории движения Земли вокруг Солнца, выраженному в километрах. Таким образом, пользуясь согласованными единицами измерения и округляя значения величин до их порядков (т.е. записывая 10 вместо 5,4), мы приходим к следующему выводу: за то время, пока Земля проходит в пространстве путь длиной в 1 км, на каждый квадратный километр ее поверхности приходится по  $10^{-25}/v$  метеоритов, объемы которых превосходят  $v \text{ км}^3$ . Полагая, что метеориты, сталкивающиеся с Землей по мере ее продвижения в пространстве, представляют собой репрезентативную выборку распределения метеоритов в этом самом пространстве, получим заявленный ранее результат.

Этот закон ( $10^{-25}/v$ ) формально идентичен закону  $C/s$  для лунных кратеров, однако имеется и различие: кратеры могут перекрывать друг друга, тогда как метеориты такой способностью не обладают.

Тем не менее, забавно понаблюдать, что получится, если приравнять объем  $v$  в соотношении  $P(v) = 10^{-25}/v$  к нулю и предположить, что метеориты — страшно подумать! — способны перекрывать друг друга. Если добавить сюда же невинное допущение о сферической форме метеоритов, то интересующее нас трема-множество можно будет изучать непосредственно (не прибегая к результатам, полученным в работе [132]). Сечения заполненного метеоритами пространства прямыми, случайным образом проведенными в этом пространстве, представляют собой линейные тремы, и можно показать, что количество таких интервалов, центры которых находятся внутри километрового промежутка, а длины превышают  $u$  км, равно  $C' \cdot 10^{-25}/u$ . ( $C'$  — численный коэффициент порядка 1, которым в данном контексте можно пренебречь.) Следовательно, согласно одному из выводов главы 32, размерность линейного сечения трема-множества составляет  $1 - 10^{-25}$ . Возвращаясь от линейных сечений к исходной фигуре, прибавим к этому соотношению 2 и получим  $3 - D = 10^{-25}$ .

Этот результат — бессмыслица, так как он подразумевает, в частности, что метеориты почти заполняют пространство, несмотря даже на то, что им позволено перекрывать друг друга. Тем не менее, коразмерность  $3 - D = 10^{-25}$  заслуживает еще одного взгляда. Допустим в первом приближении, что значение отношения  $10^{-25}/v$  удерживается на уровне некоторого положительного порога  $\eta > 0$  и что не существу-

ет метеоритов меньшего размера. Согласно вкратце набросанному нами рассуждению, верно следующее: если и в самом деле возможно перейти к пределу  $\eta \rightarrow 0$ , то множество, свободное от метеоритов, сойдется при этом к трема-множеству с размерностью  $D = 3 - 10^{-25}$ . К счастью, схождение к этому предельному множеству происходит чрезвычайно медленно, — настолько медленно, что на наблюдаемом интервале способность метеоритов к перекрытию не составляет никакой проблемы. Но — к сожалению — значение  $D$  в этом случае лишено какой бы то ни было практической значимости.

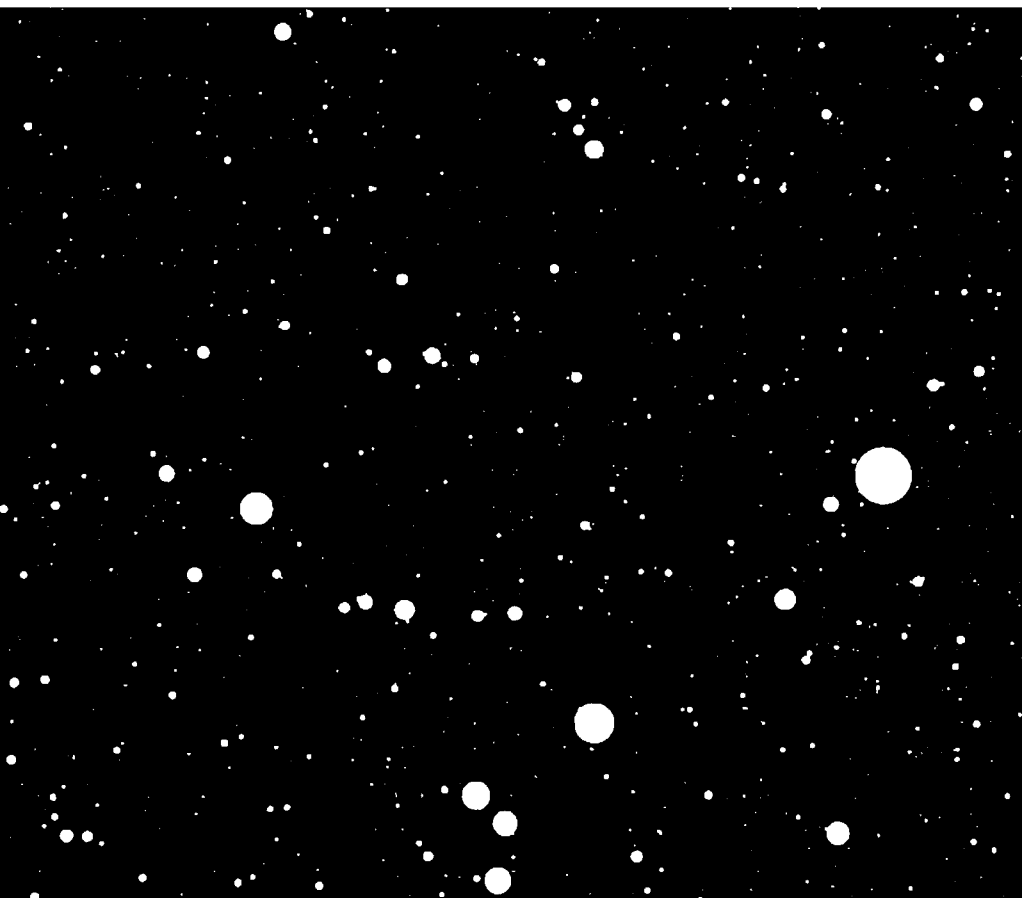
## ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕМАСШТАБИРУЕМЫЕ КРАТЕРЫ

С учетом поставленной задачи распределение кратеров на поверхности Луны лучше всего описать в виде  $\text{Pr}(A > a) = Fa^{-\gamma}$ , где  $\gamma = 1$ . Такое же значение показателя  $\gamma$  верно, по всей видимости, и для Марса, однако спутники Юпитера характеризуются иными значениями  $\gamma$  (см. [531]). Ну а для метеоритов малого объема  $\gamma < 1$ . Соответствующие трема-множества не являются масштабно-инвариантными.

**Случай  $\gamma > 1$ .** В первом немасштабируемом случае на любую заданную точку поверхности планеты, независимо от значения  $W$ , почти наверное приходится бесконечное количество кратеров. В текстуре поверхности наблюдается подавляющее преобладание малых кратеров. Подобная текстура характерна для поверхности спутника Юпитера Каллисто, а показатель  $\gamma$  в этом случае действительно больше единицы. Неравенство  $\gamma > 1$  рассматривалось и в предыдущих эссе, увидевших свет еще до полета «Вояджера», хотя тогда мы могли обсуждать его лишь в качестве теоретической возможности.

**Случай  $\gamma < 1$ . Ограничение на площадь кратеров.** Обозначим наибольшую площадь через  $1$ ; тогда вероятность того, что некая точка не попадает ни в один из существующих кратеров, положительна  $\triangleleft$  поскольку сходится интеграл  $\int_0^1 \text{Pr}(A > a) da \triangleright$ , но уменьшается при увеличении  $W$ . Получаемая при этом шербоатая поверхность даже больше похожа на срез головы швейцарского сыра, чем рассмотренные ранее масштабно-инвариантные множества. Чем больше значение  $\gamma$ , тем меньше количество малых отверстий, и тем более «цельным» становится получаемый сыр. Однако, независимо от  $\gamma$ , площадь поверхности остается положительной, т.е. поверхность представляет собой множество (несамоподобное) с размерностью 2. С другой стороны, я не сомневаюсь в том, что его топологическая размерность равна 1, а это означает, что перед нами фрактал.

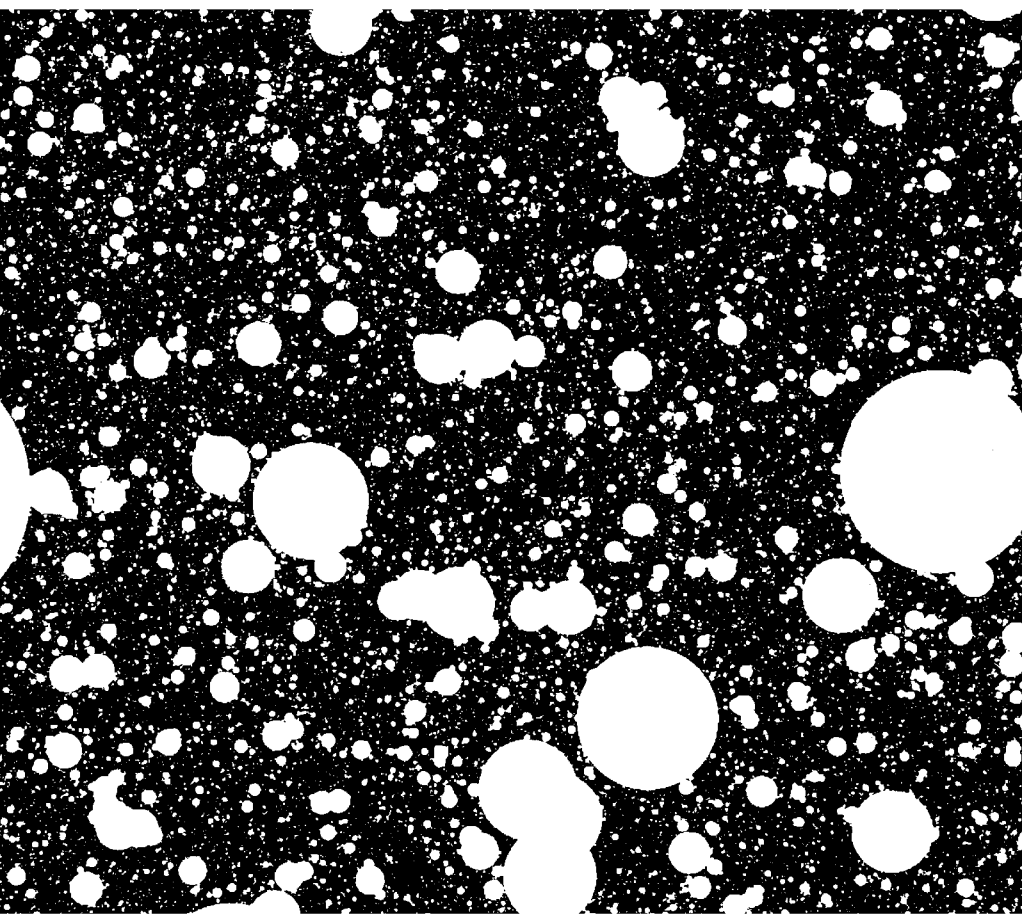
В пространственном (метеоритном) случае размерности этого трема-фрактала составляют, соответственно,  $D = 3$  и  $D_T = 2$ . ■

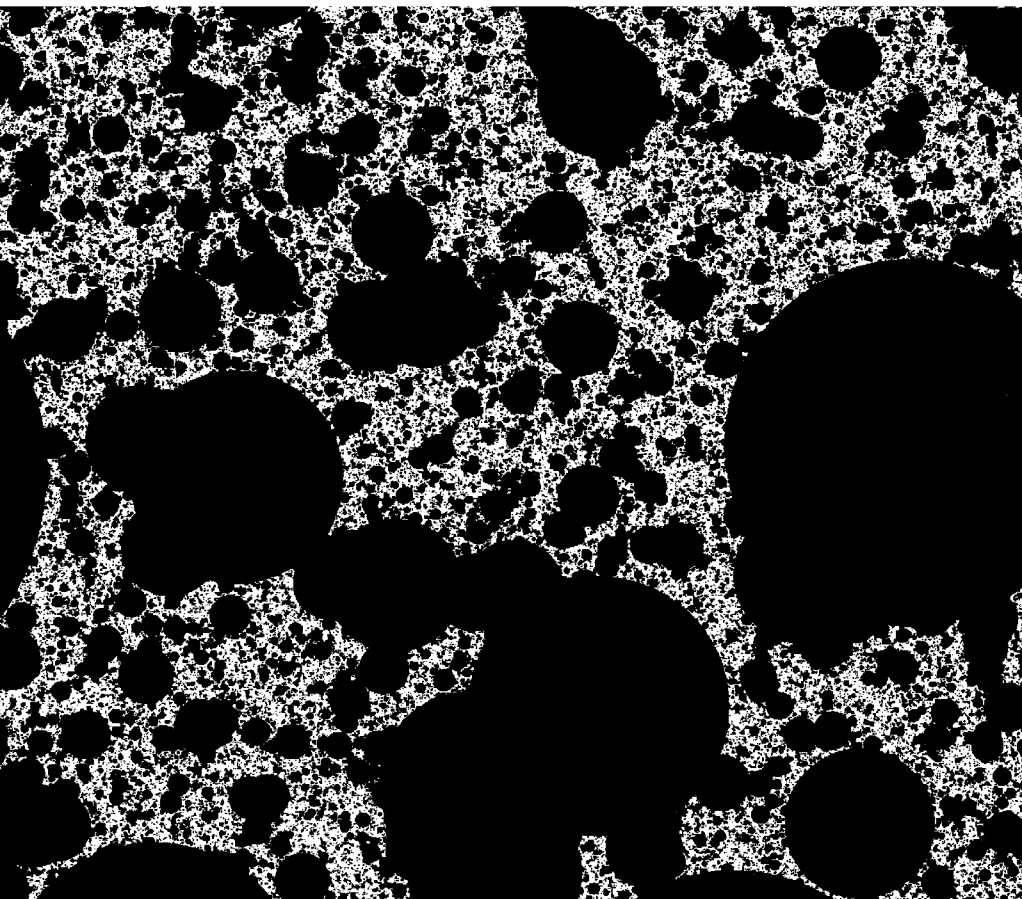


**Рис. 424 и 425. МАЛЫЕ КРУГЛЫЕ ТРЕМЫ (БЕЛЫЕ) И  
СЛУЧАЙНЫЕ «ШВЕЙЦАРСКИЕ СЫРЫ»  
(РАЗМЕРНОСТИ  $D = 1,9900$  И  $D = 1,9000$ )**

Тремы на этих иллюстрациях представлены в виде белых кругов. Их центры распределены на плоскости случайным образом. Площадь круга ранга  $\rho$  равна  $K(2-D)/\rho$ ; выбор числовой постоянной осуществляется, исходя из соображений соответствия трема-модели, описанной в тексте главы. На рис. 424 мы видим нечто похожее на сыр аппенцеллер в разрезанном виде (размерность черной области  $D = 1,9900$ ), поверхность же, изображенная на рис. 425, напоминает об эмментальском сыре (размерность черной области  $D = 1,9000$ ). ■







**Рис. 426 и 427. БОЛЬШИЕ КРУГЛЫЕ ТРЕМЫ (ЧЕРНЫЕ) И  
СЛУЧАЙНЫЕ РАЗВЕТВЛЕННЫЕ БЕЛЫЕ НИТИ  
(РАЗМЕРНОСТИ  $D = 1,7500$  И  $D = 1,5000$ )**

Построение этих фигур сходно с построением фигур, изображенных на рис. 424 и 425, только здесь тремы черные, а их площадь больше (настолько больше, что свободного места почти нет). Под  $D$  подразумевается размерность белой фрактальной области, оставшейся невырезанной.





## 34 ◊ ТЕКСТУРА: ПУСТОТЫ И ЛАКУНАРНОСТЬ, ПЕРИСТОСТЬ И СУККОЛЯЦИЯ

Понятие *текстуры* имеет склонность просачиваться между пальцами; математики и другие ученые стремятся его избегать, потому что оно никак не дается им в руки. Инженерам и художникам избежать его не удастся, но в большинстве случаев не удастся и справиться с ним ко всеобщему удовлетворению. Существуют, однако, многочисленные указания на то, что некоторыми отдельными аспектами понятия текстуры мы сможем вскоре овладеть на количественном уровне.

В сущности, большую часть фрактальной геометрии можно представить как своего рода *неявное* изучение текстуры. В этой и в следующей главах мы попытаемся *явным* образом рассмотреть два конкретных аспекта текстуры, уделяя особое внимание скоплениям галактик. Некоторые замечания о текстуре можно было поместить и в более ранние главы, начиная с 8-й и 9-й, однако мне показалось более предпочтительным собрать все, связанное с текстурой, в одном месте (пусть даже и ценой прерывания дискуссии о трехах!)

Как уже неоднократно упоминалось, мои поиски модели скоплений галактик шли поэтапно. На ранних этапах, описанных в главах 32 и 33, я добился желаемых значений размерности  $D$ , сохранив при этом согласие с условным космографическим принципом. На поздних этапах, описанных в главе 35, достигнуто, ко всему прочему, и соответствие текстуры.

В этой главе несколько вводных разделов: в них представлены основные результаты наблюдений галактик, благодаря которым мне открылось различие между двумя аспектами текстуры, названными мною лакунарностью и сукколяцией. Латинское слово *lacuna* обозначает «пустое место, пробел», т. е. если фрактальное множество содержит достаточно большие пустоты (длинные интервалы, круги или шары большого диаметра), то мы вправе назвать его *лакунарным*. *Сукколяционным* же мы назовем фрактал, который содержит «почти» достаточное количество нитей, необходимых для осуществления перколяции; исходя из того, что латинское слово *percolare* означает «протекать насквозь» (глава 13), я придумал достойный, как мне кажется, неолатинский неологизм *succolare* (т. е. *sub-colare*), который означает «протекать почти» или «недопротекать».

В остальной части главы мы введем некоторые меры лакунарности; что касается мер, характеризующих степень сукколяции, то они оказываются за рамками нашего элементарного повествования.

В главе 35 показано, как можно управлять лакунарностью и сукколяцией с помощью трем.

До сих пор главная роль при измерении фракталов была отведена топологической и фрактальной размерностям. Глава 14 явилась исключением (оставшимся, впрочем, без последствий), поскольку порядок ветвления определяет иные, более тонкие, различия между фракталами с одинаковыми размерностями  $D_T$  и  $D$ . Мы повидали много различных выражений вида

$$\text{префактор} \times (\text{величина})^{\text{показатель}},$$

однако до сих пор нас интересовал только показатель. Теперь же, если мы хотим разобраться с тем, что скрывается за понятием текстуры, нам придется обратить внимание и на префактор. Раз уж мы не можем игнорировать его и дальше, вряд ли нам стоит удивляться тому, что и Природа (наука), и человеческая мысль (математика) оказываются сложнее, чем представляется на первый взгляд!

## «ПЕРИСТЫЕ» НИТИ ГАЛАКТИК

В 1974 году, в Париже, после моей первой лекции, посвященной описанной в главе 32 модели, мое внимание было привлечено к одному таинственному открытию. В своей модели я тогда пытался достичь одной-единственной цели — получить заданное значение размерности  $D$  в некотором фрактальном множестве (по правде говоря, в то время я еще не додумался до термина *фрактал*). Однако во время обсуждения лекции некий оставшийся неизвестным астроном указал мне на еще один, весьма неожиданный, момент, добавляющий модели правдоподобия: в моих построениях точки нередко оказывались выстроенными вдоль почти прямых линий; обобщив результаты, можно заметить, что точки, как правило, рассыпаются вдоль довольно узких «почти-потоков» или «почти-нитей». Так вот, упомянутый астроном сообщил мне, что галактики обладают тем же свойством и даже в более ярко выраженной форме, а при внимательном рассмотрении такой галактический «почти-поток» распадается на более тонкие «почти-потоки». Кроме того, астроном подчеркнул, что термин *поток* в данном случае не годится, поскольку интересующие нас структуры несвязны.

Желая избежать путаницы в терминологии и подыскивая подходящее слово, я вдруг вспомнил о *перистых* облаках (так метеорологи называют высокие полупрозрачные «кружевные» облака) и пометил для

себя, что галактики имеют *перистую* структуру и что следует усовершенствовать модель таким образом, чтобы эта перистость проявилась более явно.

Лишь спустя некоторое, довольно значительное, время я действительно обнаружил упоминания об этом феномене в научной литературе: в 1937 г. Томбо наблюдал «перистые» структуры в сверхгалактике Персея, а в 1950 г. де Вокулер сообщил о наличии таких структур в нашей и Южной сверхгалактиках. Дальнейшие подтверждения я нашел в статье Питерсона [471] (о каталоге Цвикки), в работе [242] и в докладе Сонейры и Пиблса, сделанном в 1978 году (относительно каталога Ликской обсерватории, подготовленного Шейном и Виртаненом, см. [467]).

## ПЕРИСТЫЕ ФРАКТАЛЫ

Очевидно, перистые структуры *могут* присутствовать в неслучайной фрактальной пыли, но совсем *не обязаны* этого делать. Например, в модели Фурнье (глава 9), порождающей совокупность «сосредоточенных масс», такие структуры напрочь отсутствуют. Напротив, если взять ковер Серпинского из главы 14 и разъединить его генератор (не проявляя излишней жестокости), то можно легко получить всевозможные перистые структуры. Поскольку размерность получаемого при этом фрактала может принимать, в сущности, любое значение, хочу еще раз подчеркнуть: перистость никак не связана с размерностью. Как бы то ни было, намеренно внесенные неслучайные перистые структуры выглядят слишком искусственно, чтобы на них стоило обращать особое внимание.

Вот почему мне показалось весьма знаменательным то обстоятельство, что в случайных моделях при значении  $D$ , достаточно близком к 2, присутствуют непредусмотренные, но ясно различимые перистые структуры.

Это наблюдение подвигло меня на более тщательное изучение других семейств случайных фракталов. Особо очевидные и интересные конфигурации можно наблюдать на иллюстрациях после главы 28 и на рис. С17, где острова, многие из которых объединяются в архипелаги, имеют форму атоллов чаще, чем какую-либо другую.

## ОЖИДАЕМАЯ ПЕРИСТОСТЬ «ПОЧТИ» ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ ФРАКТАЛОВ

На рис. 426 и 427 хорошо видно, что во фракталах, построенных путем удаления случайных круглых трем (как описано в главе 33), наличествует ярко выраженная перистая структура. Для этого достаточно, чтобы размерность фрактала была близка к критической размерности перколяции  $D_{\text{крит}}$ , оставаясь «чуть ниже» ее. В данном случае причина

возникновения перистой структуры очевидна. Представим себе последовательность фрактальных множеств, каждое из которых вложено в своего предшественника, а размерность  $D$  каждого последующего множества уменьшается, становясь в конце концов меньше  $D_{\text{крит}}$ . Известно, что топологическая размерность может измениться — скажем, уменьшиться с 1 до 0 — лишь дискретно, однако эта дискретность является исключением: большая часть аспектов формы способна изменяться непрерывно. Например, размытая картинка, полученная путем замены каждой ее точки на шар радиуса  $\rho$ , изменяется непрерывно. Такую нефокусированную картинку можно назвать «потокообразной» — не только при  $D > D_{\text{крит}}$ , но и тогда, когда разность  $D_{\text{крит}} - D$  положительна (и невелика).

Отметим, что размерность  $D_{\text{крит}}$  можно считать определенной и для фракталов, описанных в главе 32, только в этом случае ее значение вырождено и равно  $\max D = 2$ .

## НАБЛЮДАЕМАЯ ЛАКУНАРНОСТЬ ГАЛАКТИК

Вот и второй скелет загремел костями в шкафах большинства моделей распределения галактик. Во избежание завистливой (даже если она и справедлива) критики авторов этих самых моделей, рассмотрим какую-либо из моих собственных ранних моделей, проанализированных в главах 32 и 33. При значении размерности  $D$ , близком к экспериментальному ( $D \sim 1,23$ ), показанные на иллюстрациях ограниченные участки пространства имеют, на первый взгляд, вполне достойный вид. Однако карты всего небесного свода, построенные на основании упомянутых моделей, оказываются совершенно неверными. Пустоты на этих картах включают в себя огромные области (покрывающие подчас более десятой части всего небосвода), абсолютно лишенные галактик в пределах любого заданного расстояния. В противоположность нашим картам, настоящие карты звездного неба (например, карта, составленная в Ликской обсерватории, см. [467]) выглядят весьма однородными, или изотропными — если, конечно, не рассматривать их отдельные участки в особо крупном масштабе. В таких случаях я говорю, что небосвод характеризуется низкой *лакунарностью*, тогда как в моих моделях лакунарность довольно высока.

**«Очевидное» космологическое следствие.** Это последнее обстоятельство где-то в начале 1970 г. чуть было не ввело меня в соблазн неверной интерпретации картины звездного неба — такой, будто его размерность  $D$  представляет собой величину *гораздо* большую, нежели предложенное де Воккером значение  $D \sim 1,2$  [104]. Насколько мне известно, ученые-космологи преклоняются перед идеей об однородной Вселенной и полагают, что на расстояниях, превышающих некоторый

малый внешний порог, во Вселенной преобладает однородность (с размерностью  $D = 3$ ). Им ничего не стоит поспешить с выводами и счесть вышеописанное несоответствие подтверждением мнения, согласно которому фракталы с размерностью  $D \sim 1, 2, 3$  пригодны для описания лишь малой области Вселенной.

**Лакуарность есть параметр, отличный от размерности  $D$ .** По правде говоря, я намерен показать, что при изменении видимой лакуарности часто бывает возможно сохранить неизменной размерность  $D$  фрактала. Основная идея проиллюстрирована на рис. 439 с помощью двух весьма различных на вид ковров Серпинского с одинаковой размерностью  $D$ . Тот, что слева, демонстрирует большие пустоты и является более лакуарным — как на первый взгляд, так и в соответствии с мерами, которые я вам вскоре представлю.

**Истинное космологическое следствие.** Напрашивающееся заключение о том, что наблюдаемая низкая лакуарность предполагает «малый» внешний порог  $\Omega$ , является, возможно, слишком поспешным. Адвокат дьявола готов в жарких дебатах отстоять свои убеждения, согласно которым «мелкомасштабные» свидетельства в пользу размерности  $D \sim 1, 2, 3$  и «крупномасштабные» свидетельства в пользу почти полной изотропии *вовсе не являются* несоместимыми с должным образом построенной фрактальной моделью, в которой  $\Omega = \infty$ . Его цель в этих дебатах заключается не в доказательстве ложности неравенства  $\Omega < \infty$ , но лишь в демонстрации того, что определение  $\Omega$  требует дополнительных данных и большей тщательности.

## ЛАКУАРНОСТЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Вопрос о величине внешнего порога  $\Omega$  не обошел стороной и исследователей турбулентности. В главе 10 упоминалось о том, что, согласно Ричардсону [491], значение  $\Omega$  в атмосфере чрезвычайно велико, тогда как большинство метеорологов полагают его малым. Таким образом, большую часть замечаний из предыдущего раздела можно после некоторой модификации отнести и к турбулентности.

Ввиду отсутствия активных и громогласных поборников истинности равенства  $\Omega = \infty$ , в теории турбулентности этот вопрос стоит не так остро, как при изучении распределения галактик, поэтому мне представляется более удобным рассматривать его именно в последнем контексте.

## ЛАКУАРНОСТЬ КАНТОРОВОЙ ПЫЛИ

Понятие лакуарности (в отличие от понятия сукколяции) имеет смысл и на прямой, а значит, подтверждение приведенных в предыдущих



разделах положений проще всего получить на примере линейной пыли. Из главы 8 нам известно, что размерность  $D$  канторовой пыли  $C$  на интервале  $[0, 1]$  может достигать любого значения между 0 и 1 (исключая границы) самыми различными способами и что результаты совсем не обязательно выглядят похожими друг на друга.

Это верно даже тогда, когда  $C$  разбивается на некоторое заданное количество  $N$  равных частей. В самом деле, значения  $D$  и  $N$  определяют общую для всех частей длину  $r = N^{-1/D}$ , но никак не ограничивают их размещения внутри интервала  $[0, 1]$ . Как следствие, одинаковые значения  $D$  и  $N$  (а значит, и  $r$ ) могут соответствовать значительно отличающимся друг от друга распределениям частей.

Можно представить себе два крайних случая такого распределения. В первом случае все части собираются в две кучи, ограниченные, соответственно, 0 и 1. В середине при этом получается большой пустой промежуток, относительная длина которого  $1 - Nr = 1 - N^{1-1/D}$  очень близка к единице. Примером такого множества может служить горизонтальное среднее сечение левого ковра Серпинского на рис. 439. В сущности, тот же эффект достигается размещением длинного пустого промежутка в любом месте интервала  $[0, 1]$ .

В другом крайнем случае  $N$  частей разделяются  $N - 1$  пустотами одинаковой длины  $(1 - Nr)/(N - 1)$ . Примером может служить горизонтальное среднее сечение правого ковра Серпинского на рис. 439. При случайном створаживании длины пустот почти одинаковы.

При  $N \gg 1$  результат первого «крайнего» построения выглядит как несколько точек, имитируя тем самым размерность  $D = 0$ , тогда как во втором крайнем случае результат построения похож на «полный» интервал (размерность  $D = 1$ ). Можно, разумеется, симитировать любую размерность между этими двумя крайними значениями, просто выбирая для  $N - 1$  пустот соответствующую совокупность интервалов, относительная длина которых составляет в сумме  $1 - Nr$ .

Различие между крайними случаями возрастает пропорционально увеличению значений  $N$ ,  $1/r$  и  $b$ . По внешнему виду минимально лакунарного фрактала с большим значением  $N$  довольно сложно определить его фрактальную размерность. При малых же значениях  $N$  сделать это очень легко. Таким образом, угадывание размерности  $D$  по одному лишь внешнему виду фрактала имеет свои ограничения. Занятие это ни в коем случае не является пустым времяпрепровождением (и мы совсем недаром посвятили ему столько места в предыдущих главах), однако в случае галактик оно приводит к неверным результатам.

◁ Некоторую ясность в этот вопрос вносит по необходимости «изгнанный» в главу 39 раздел, посвященный *нелакунарным фракталам*. При ближайшем рассмотрении оказывается, что основной характеристикой нелакунарного фрактала является его размерность подобия (которая, как мы убедимся, равна 1), а вовсе не хаусдорфова размер-

ность. Здесь эти две размерности отличны одна от другой, причем последняя является более уместным воплощением фрактальной размерности. ►

## $N \gg 1$ И $D > 1$ : ПУСТОТЫ ИЛИ ПЕРИСТОСТЬ

При  $N \gg 1$  и  $D > 1$  разумный выбор генератора может привести к одному из следующих четырех результатов: высокой лакунарности, низкой лакунарности, перистости, произвольно близкой к перколяции, либо полному отсутствию перистости. Таким образом, введенные нами два аспекта текстуры могут, в принципе, варьироваться независимо друг от друга.

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕРЫ ЛАКУНАРНОСТИ

За то короткое время, что я занимаюсь лакунарностью, мною обнаружено несколько различных, но равно достойных рассмотрения подходов к ее исследованию. К сожалению, не приходится ожидать, что получаемые при применении упомянутых подходов альтернативные меры окажутся монотонными функциями друг от друга. Они представляют собой вещественные числа, выбранные для представления формы кривой и, как следствие, сродни таким понятиям, как «средний человек» и «типичное значение случайной величины». Типичные значения являются неопределенными по самой своей природе — что есть печальный, однако непреложный факт (невзирая на решимость многих статистиков пожертвовать всем во имя защиты своих любимцев).

## ПРЕФАКТОР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУСТОТ

Представляется весьма удобным измерять степень лакунарности канторовой пыли по относительной длине наибольшего пустого промежутка. В плоских же фигурах (таких, например, как представленные на рис. 439) лакунарность, с достаточной степенью точности, обратно пропорциональна отношению периметра тремы к квадратному корню из ее площади. Можно, однако, вывести и более многообещающий способ измерения лакунарности, и источником его послужит распределение размеров пустот.

Из главы 8 нам известно, что длины пустот канторовой пыли удовлетворяют соотношению  $\text{Nr}(U > u) \propto Fu^{-D}$  в том смысле, что зависимость  $\ln \text{Nr}(U > u)$ , рассматриваемая как функция от  $\ln u$ , имеет график правильной ступенчатой формы. В настоящем обсуждении мы не намерены вносить какие-либо изменения в последний результат, за

исключением того, что на первый план здесь выходит префактор  $F$ , которому ранее не придавалось особого значения.

Приходится признать, что данное нами определение  $F$  несколько произвольно. Можно, например, считать, что значение  $F$  относится к линии, соединяющей левые концевые точки ступеней лестницы, правые концевые точки или же средние точки. К счастью, подобные детали не имеют здесь никакого значения. По мере *роста* лакунарности величина префактора *уменьшается*, как бы мы его ни определили (в разумных пределах, конечно же). То же верно и для масштабных коэффициентов объемов и площадей, относящихся к коврам Серпинского и фрактальным пенам. Во всех случаях рост степени лакунарности происходит из-за схлопывания многих пустот в один-единственный пустой промежуток большего размера. При этом график ступенчатой функции «скользит» в направлении на 4 ч 30 мин, т.е. в направлении, более крутом, чем общий наклон лестницы  $-D/E$ , вызывая тем самым вышеупомянутое уменьшение  $F$ .

Таким образом, мы видим, что в пределах довольно обширного (и все же особого) класса фракталов, куда входят канторовы пыли и ковры Серпинского, лакунарность можно измерить (а стало быть, и определить) с помощью префактора  $F$ .

Применимость этого определения, однако, весьма ограничена. Оно не годится уже для случая, когда в середину большого центрального медальона ковра помещается другой, меньший, ковер. Следовательно, нам необходимо отыскать альтернативные определения. Самым подходящим представляется замена  $F$  более широко применимым префактором из соотношения  $M(R) \propto R^D$ .

## ЛАКУНАРНОСТЬ КАК ЭФФЕКТ ВТОРОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО МАССОВОГО ПРЕФАКТОРА

Для описания *нерекурсивно* построенных фракталов (например, случайных фракталов) нам необходимы какие-то иные способы определения лакунарности. Способы, описанные в этом и следующем разделах, представляют собой всего лишь статистические усреднения (даже в случае неслучайной канторовой пыли).

Рассмотрим для начала канторовы пыли, представляющие собой горизонтальные средние сечения двух фигур, изображенных на рис. 439. Положим общую массу каждой пыли равной 1 и рассмотрим массу, содержащуюся в различных подынтервалах одинаковой длины  $2R = 2/7$ . В левом, более лакунарном, примере эта масса изменяется в довольно широких пределах (от 0 до  $1/2$ ), тогда как в менее лакунарной фигуре справа изменения массы происходят лишь в небольшой окрестности некоторого среднего значения. К сожалению, в случае регулярной канто-

ровой пыли весьма сложно точно вычислить распределение масс; в этом смысле гораздо удобнее рассмотреть более простой случай полностью случайной канторовой пыли  $\mathcal{D}$ .

Предположим, что пыль  $\mathcal{D}$  пересекает интервал  $[0, 1]$ , и обозначим ожидаемую в этом интервале массу через  $(W)$  (причина такого обозначения вскоре прояснится). Если выбрать внутри интервала  $[0, 1]$  некий малый интервал  $[t, t + 2R]$ , то ожидаемая в этом интервале масса будет равна, как и полагается,  $2R(W)$ . Однако, исключив малоинтересные случаи, где масса обращается в нуль, мы обнаружим, что ожидаемая масса возросла до  $(2R)^D(W)$ . Ее значение зависит теперь от  $D$  — и ни от чего другого. (Это означает, что вероятность пересечения нашей пылью интервала  $[0, 1]$  равна  $(2R)^{1-D}$ .) Иными словами, саму массу можно записать в виде  $W(2R)^D$ , где  $W$  — некоторая случайная величина: иногда большая, в других случаях малая, но в среднем равная  $(W)$ , независимо от степени лакуарности.

Копнем теперь глубже и выясним, насколько сильно действительные значения  $W/(W) - 1$  отличаются от нуля. Общепринятой мерой такого отклонения является ожидаемое значение выражения второго порядка  $(W/(W) - 1)^2$ , записываемое как  $\langle (W/(W) - 1)^2 \rangle$ . В тех случаях, когда невооруженным глазом видна низкая лакуарность фрактала, значение лакуарности второго порядка также мало, когда же степень лакуарности фрактала очевидно высока, значение лакуарности второго порядка велико. Таким образом, величину  $\langle (W/(W) - 1)^2 \rangle$  можно считать кандидатом в *определители* лакуарности. Имеются и достаточно привлекательные альтернативные варианты (например,  $\langle |W/\langle W \rangle - 1| \rangle$ ), однако они гораздо сложнее в оценке, нежели средний квадрат.

Подведем итоги: мы вышли за рамки соотношения «масса пропорциональна  $R^D$ » и обратили отдельное внимание на префактор пропорциональности массы величине  $R^D$ . Отметим также, что понятие лакуарности не имеет ничего общего с топологией и касается лишь различий во фракталах при одинаковом значении  $D$ ; возможность ее использования для сравнения фракталов с разными размерностями остается пока неисследованной.

## ЛАКУАРНОСТЬ КАК ЭФФЕКТ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ОТНОСИТЕЛЬНО МАССОВОГО ПРЕФАКТОРА

Альтернативный подход к лакуарности связан с распределением массы в интервале  $[t, t + 2R]$  при условии, что средняя точка  $1 + R$  интервала принадлежит пыли  $\mathcal{D}$ . Из этого условия следует, что интервал  $[t, t + 2R]$  пересекает  $\mathcal{D}$ , однако обратное утверждение не обязательно истинно: если интервал  $[t, t + 2R]$  пересекает  $\mathcal{D}$ , то его средняя точка  $1 + R$  не обязательно принадлежит  $\mathcal{D}$ . При таком, более стро-

гом, условия ярче выраженной становится тенденция к устранению тех случаев, где масса оказывается значительно ниже среднего; в результате увеличивается ожидаемая масса. Иными словами, мы заменяем  $W$  новой величиной  $W^*$ , при этом  $\langle W^* \rangle > \langle W \rangle$ . Значение отношения  $\langle W^* \rangle / \langle W \rangle$  велико для очень лакунарных множеств  $\mathcal{D}$  и мало для менее лакунарных множеств. Итак, перед нами еще один альтернативный кандидат на роль определителя и меры лакуарности:  $\langle W^* \rangle / \langle W \rangle$ .

## ПЕРЕХОД ПРИ ПОРОГЕ И ЛАКУАРНОСТЬ

Рассматривавшиеся до сих пор подходы к описанию лакуарности являются внутренними, т. е. не подразумевают наличия какой бы то ни было внешней точки сравнения. Нам, однако, известно, что многие физические системы характеризуются конечным внешним порогом  $\Omega$ . Такие системы допускают еще один подход к лакуарности — не такой общий, как два предыдущих, но гораздо более удобный.

В самом деле, заменим наше фрактальное множество  $\mathcal{D}$ , в котором  $\Omega = \infty$ , другим фрактальным множеством  $\mathcal{D}_\Omega$ , которое «похоже на  $\mathcal{D}$ » при масштабах, меньших  $\Omega$ , и почти однородно при масштабах, больших  $\Omega$ . Примером порога  $\Omega$  может послужить, например, радиус перехода, при достижении которого размерность распределения галактик изменяется с  $D < E = 3$  на  $D = 3$ . До сих пор этому переходу позволялось существовать без точного определения, однако дальше так продолжаться не может. Идея заключается в том, что наблюдателю, расположившемуся на точке из множества  $\mathcal{D}$ , порог  $\Omega$  представляется размером наименьшего элемента, который необходимо исследовать, дабы получить достаточно полное представление о целом. Обитателю множества  $\mathcal{D}_\Omega$  должно казаться, что менее лакуарный мир становится однородным очень быстро, более же лакуарный мир — очень медленно.

Немедленно возникает побуждение записать

$$\begin{aligned} \langle M(R) \rangle &= \alpha R^D && \text{при } R \ll \Omega \\ \text{и } \langle M(R) \rangle &= \beta R^E && \text{при } R \gg \Omega \end{aligned}$$

и доказать, что переход происходит при  $\alpha R^D = \beta R^E$ , т. е. при  $\Omega^{E-D} = \alpha/\beta$ . Следовательно,

$$\langle M(R) \rangle = \alpha \Omega^{D-E} R^E \quad \text{при } R \gg \Omega.$$

В малом варианте этого же подхода точка выбирается там, где две формулы имеют равные производные, следовательно,  $\Omega^{*E-D} = D\alpha/E\beta$ . При увеличении лакуарности (т. е.  $\alpha$ ) и фиксированных значениях  $\beta$  и  $D$  возрастают как  $\Omega$ , так и  $\Lambda^*$ . Оба варианта являются очередными кандидатами, претендующими на место определителя и меры лакуарности.

## РАСШИРЕННОЕ ПОНИМАНИЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ПРИ СДВИГАХ

Тот факт, что прямая способна при продольном смещении отображаться на самое себя, выражается фразой: «Прямая инвариантна при сдвигах». В главе же 22 заостряется внимание на том, что канторовы пыли обладают одним в высшей степени неприятным свойством: они не инвариантны при сдвигах. Например, оригинальная троичная пыль  $C$  и результат ее смещения на  $1/3$  даже не пересекаются. А вот пыль  $C$  и результат ее смещения на  $2/3$  пересекаются, причем пересечение содержит половину точек множества  $C$ .

Если же мы будем сдвигать максимально лакунарные канторовы пыли с  $N \gg 1$ , то сколько-нибудь значительное перекрытие можно будет получить только при величине смещения, близкой либо к 1, либо к 0. В случае минимально лакунарных пылей, напротив, допустимая величина смещения может представлять собой (приблизительно) любое число, кратное  $1/N$ .

Иными словами, для успешного применения к канторовой пыли понятия инвариантности при сдвигах следует весьма значительно ослабить требования этой инвариантности, однако при низкой лакунарности пыли можно обойтись гораздо меньшим ослаблением.

В конце главы 22 мы пришли к выводу, что применить к фракталам инвариантность при сдвигах и космологический принцип возможно, если фракталы сделать случайными, а понятие инвариантности переформулировать к «условному» виду. Эта переформулировка, собственно, и является главной причиной введения случайных фракталов.

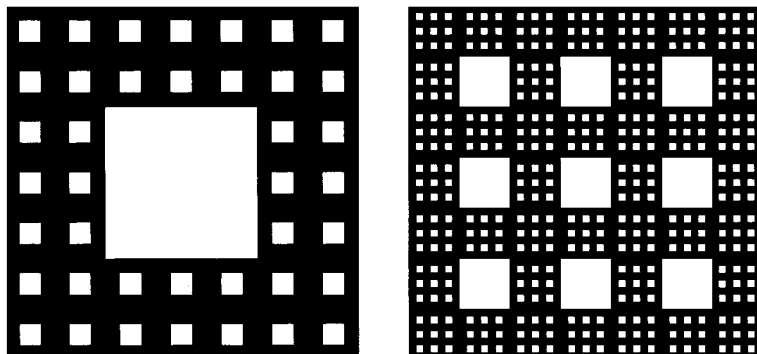
## СТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ И НЕСТРАТИФИЦИРОВАННЫЕ ТЕКСТУРЫ

Процесс, используемый в этой главе для изменения сукколяции в ковре Серпинского и лакунарности в канторовой пыли и ковре Серпинского, предполагает возврат к описанию неслучайных и ранних случайных фракталов с точки зрения стратификации — весьма эффективный, но искусственный метод. В частности, ограничив коэффициенты подобия видом  $r^k$ , мы обеспечиваем требуемую лакунарность ценой сужения диапазона самоподобия. При большом  $N$  (например,  $N = 10^{22}$  — см. пояснение к рис. 141) и соответственно малом  $r$  стратифицированность весьма значительна и хорошо заметна.

Такой способ управления сукколяцией и лакунарностью, очевидно, нельзя считать приемлемым. Поэтому я рад, что мне удалось добиться того же и даже большего с помощью простого обобщения метода трем, которое заключается в замене интервалов, кругов и шаров более общими фигурами, которые мы обсудим в следующей главе.

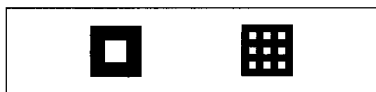
## НЕЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЫ

Как показано в соответствующем разделе главы 39, лакунарность фрактала может быть исчезающе малой.



**Рис. 439. ЛАКУНАРНОСТЬ КОВРОВ**

Рассмотрим ковры Серпинского, построенные с помощью следующих генераторов:



Оба генератора удовлетворяют параметрам  $b = 1/r = 7$  и  $N = 40$ , откуда  $D \sim 1,8957$ . Правда, с первого взгляда не совсем очевидно, откуда взялось  $N = 40$ , — и тем не менее, так оно и есть, в чем можно убедиться, внимательно рассмотрев следующие этапы построения, приведенные на верхнем рисунке с семикратным увеличением.

Равенство размерностей  $D$  этих двух ковров также не бросается в глаза. Впечатление усугубляется еще и тем, что левый ковер, судя по его виду, содержит гораздо больше пустоты, т.е. является более лакунарным (от лат. *lacuna* «пустое место, пробел»). В тексте главы рассматривается несколько различных методов, которые помогут вам избавиться от этого ложного впечатления.

Размерность  $D \sim 1,8957$  замечательно близка к размерности бернуллиевой перколяции (см. конец главы 13), однако это обстоятельство не должно вводить нас в заблуждение: топологически эти два случая очень различаются.

## 35 ◊ ОБОБЩЕННЫЕ ТРЕМЫ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕКСТУРОЙ

Сообразуясь с логикой нашего эссе, в главах 31–33 мы ввели трема-фракталы с помощью простейших примеров, в основе которых лежат интервалы, круги и шары. Полученные результаты радуют взор своим разнообразием, которое, однако, вряд ли можно сравнить с богатствами, ожидающими нас среди трем более общей формы.

Да, разумеется, в работе [132] со всей однозначностью показано, что размерность трема-фрактала определяется исключительно распределением длин (площадей, объемов) трем. Однако те дни, когда размерность  $D$  была единственным числовым параметром, характеризующим фрактал, остались в прошлом, как только мы ввели в главе 34 понятия сукколяции и лакуарности. В настоящей главе показано, какое влияние на эти характеристики оказывает форма тремы. И снова мы оказываемся свидетелями чудесного совпадения спроса, предъявляемого прецедентными исследованиями, и предложения, поступающего со стороны геометрии.

Исследуя трема-фрактал на предмет сукколяции, мы убеждаемся в том, что форма трем влияет на величину  $D_{\text{крит}}$ , т. е. при заданном значении  $D$  от нее зависят знак и величина разности  $D - D_{\text{крит}}$ .

Лакуарность фрактала также зависит от формы трем, и здесь мы можем сделать несколько более продвинутых по сравнению с предыдущими главами заявлений. Из линейных трема-фракталов (глава 31) самыми лакуарными являются пыли Леви; наиболее простой и естественный путь получения любой меньшей степени лакуарности заключается в использовании в качестве тремы объединения многих интервалов. В случае пространственных трема-фракталов, получаемых непосредственным построением (глава 33), простейший способ изменения лакуарности состоит в изменении формы каждой тремы с круглой или шарообразной на любую другую. В случае же пространственных трема-фракталов, субординированных броуновскому или дробному броуновскому движению (глава 32), следует в качестве субординатора взять какую-либо другую фрактальную пыль, менее лакуарную, чем пыль Леви.

К сожалению, отведенное мне время не бесконечно, а для того, чтобы привести в надлежащий (пригодный к публикации) вид все теоретические рассуждения, касающиеся трема-фракталов, потребуются зна-



чительная их переработка. Так что эта глава (собственно, последняя в настоящем эссе) поневоле оказывается не более чем наброском.

## ТРЕМА-ГЕНЕРАТОРЫ. ИЗОТРОПИЯ

Термин *форма тремы*, использованный во вступительном разделе, связан с понятием *трема-генератора*. Мы, конечно же, уже знакомы с термином *генератор*, который встречался нам в нескольких предшествующих главах. Мы также помним о том, что ломаные генераторы канторовых и коховых фигур, равно как и трема-генераторы фигур Серпинского, определяют одновременно и саму фрактальную фигуру, и ее размерность  $D$ . Здесь же, обратите внимание, трема-генератор определяет *все, кроме  $D$* .

**Неслучайный трема-генератор.** Такой генератор представляет собой открытое множество с некоторым, произвольно выбранным внутри него, центром, причем длина (площадь, объем) этого множества равна  $2$  ( $\pi$  или  $4\pi/3$ , соответственно). А тремы — это перемасштабированные версии описанного генератора. Положения и размеры трем случайны, а распределение вероятностей совпадает с аналогичным распределением в главах 31 и 33.

В случае  $E = 1$ , например, количество трем, длина которых превышает  $r$ , а центр расположен внутри интервала длины  $\Delta t$ , по-прежнему является пуассоновской случайной величиной с ожиданием  $(E - D_*)\Delta t/\tau$ . Кроме того, как показано в [132], остается справедливой и хорошо известная нам формула для определения размерности  $D = \max(D_*, 0)$  — правда, с некоторыми нестрогими ограничивающими допущениями относительно формы трема-генератора. (Отдельного рассмотрения заслуживает вопрос о причине возникновения этих ограничивающих допущений — присущи ли они трема-фракталам изначально, или мы обязаны ими методу доказательства.)

**Ограниченность генератора.** Поскольку теоретической целью построения с использованием трем является создание глобальных структур из локальных взаимодействий, разумно будет ввести допущение о локальности (т. е. ограниченности) трем. Если же тремы не ограничивать, то они могут привести к весьма неожиданным сюрпризам. На рис. 398 представлено дальнейшее обобщение модели трем.

**Определение пустот.** Пустой промежуток теперь представляет собой не объединение трем, но объединение наибольших открытых компонентов трем.

**Неслучайная изотропия.** Для обеспечения изотропности генератора мы должны иметь возможность выбирать точку отсчета таким образом, чтобы генератор представлял собой множество точек, удовлетворяющих следующему условию: расстояния между этими точками и

точкой отсчета должны принадлежать некоторому множеству на положительной вещественной оси (обычно это набор заданных интервалов). Изотропный случай является самым простым и наиболее хорошо изученным.

Однако неизотропия здесь также не исключается. В частности, фрактальную пыль можно сделать *асимметричной* относительно прошлого и будущего.

**Случайный трема-генератор.** Такой генератор представляет собой частично или полностью случайное множество, длина (площадь, объем) которого равна единице. Было бы неплохо тщательно рассмотреть вопрос о применимости к данному случаю теоремы, доказанной в [132].

Наименьшего уровня случайности можно достичь, если выбрать из процесса, генерирующего случайные множества, какую-то ограниченную совокупность элементов и отождествить с этой совокупностью все наши тремы (вплоть до смещения и размера). Следующий практически полезный уровень случайности достигается путем добавления случайного поворота, выбираемого для каждой тремы отдельно и независимо от других. Еще более общая картина возникает, когда каждая трема является результатом независимой выборки из какого-либо генерирующего случайные множества процесса. Выбранные множества не обязательно должны иметь одинаковый объем, объемы выравниваются на следующем этапе. Затем выборки поворачиваются. Можно представить случай, когда повороты зависят один от другого, однако я пока таких случаев не рассматривал.

**Случайная изотропия.** На первом из вышеописанных альтернативных уровней случайности изотропия требует инвариантности выборки при повороте. На втором — выборка поворотов должна иметь однородное распределение. На третьем же необходимо лишь, чтобы инвариантным при повороте был сам процесс.

**Стратификация.** Исходя из вышеприведенных определений, длина (площадь, объем) трем, в принципе, допускает стратификацию, т. е. ограничение коэффициента подобия значениями вида  $r^k$ . Однако при этом сложно провести границу между эффектами стратификации и обобщения форм трем, так что от стратификации придется отказаться.

## УПРАВЛЕНИЕ СУККОЛЯЦИЕЙ С ПОМОЩЬЮ КРИТИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ $D_{\text{крит}}$ ОБОБЩЕННЫХ ТРЕМА-ФРАКТАЛОВ

В одном из разделов главы 34 показано, что если фрактал «почти» перколирует (т. е. если он принадлежит к некоторому семейству с

вполне определенной критической размерностью  $D_{\text{крит}}$ , а его собственная размерность  $D$  «всего лишь чуть-чуть» ниже критической), то следует ожидать, что его структура будет перистой. Иными словами, требуемые размерность  $D$  и интенсивность перистости структуры могут быть достигнуты совместно, если среди параметров модели числятся одновременно и  $D$ , и  $D_{\text{крит}}$ .

В случае трема-фрактала параметрами являются вещественное число  $D$  и некоторая функция, задающая трема-генератор. Позвольте мне продемонстрировать, что размерность  $D_{\text{крит}}$  является ничем иным, как функцией от этого последнего параметра: можно добиться того, что ее значение окажется произвольно близко к  $E$ , а если  $E > 2$ , то можно сделать так, что размерность  $D_{\text{крит}}$  будет произвольно близка к 1.

**Случай, когда критическая размерность  $D_{\text{крит}}$  произвольно близка к  $E$ .** Для реализации такой размерности достаточно взять в качестве генератора произвольно тонкую иглу или плоский блин с фиксированной формой, но изотропно ориентированными осями (см. рис. 446). Для доказательства этого утверждения в случае плоскости ( $E = 2$ ) заметим, что при заданном произвольном значении  $D < 2$  размеры и направление трем, а также расположение их центров можно выбирать только соотносясь с коэффициентом плоскостности генератора. Далее рассмотрим квадрат со стороной  $L$ , а все тремы разделим на три группы: средние тремы (площади трем меньше  $\pi L^2/10$ , но больше  $\pi \eta^2$ ), большие тремы и малые тремы. В случае, когда величина  $D$  много больше  $D_{\text{крит}}$  (по отношению к дискообразным тремам), а тремы представляют собой едва сплюснутые диски, картина напоминает ту, что мы видели в главе 33: средние тремы, по большей части, образуют отдельные пустоты, окруженные в высшей степени связным множеством. Однако если тремы сплюснуты почти в прямые, то они почти наверное разобьют наш квадрат на малые несвязные многоугольники. Добавление малых сплюснутых трем может привести только к дальнейшему разбиению упомянутых многоугольников. Добавление же больших трем может либо полностью стереть квадрат, либо расщепить его на части, либо оставить без изменений. В последнем случае перколяция становится невозможной. То есть я только что продемонстрировал, что посредством сплющивания трем можно увеличить критическую размерность  $D_{\text{крит}}$  до значений, превышающих любое заданное  $D < 2$ .

Обобщение для случая  $E > 2$  представляется очевидным.

Тот же эффект достигается и в случае  $E \geq 2$  (а также распространяется на случай  $E = 1$ ), если в качестве трема-генератора взять область, заключенную между двумя концентрическими сферическими поверхностями, причем радиус большей сферы должен быть много больше единицы.

**Случай, когда критическая размерность  $D_{\text{крит}}$  произвольно близка к 1.** Рассуждая эвристически, можно предположить, что при  $E \geq 3$  и почти иглообразных тремах величина критической размерности  $D_{\text{крит}}$  будет произвольно близка к единице.

## УПРАВЛЕНИЕ ЛАКУНАРНОСТЬЮ С ПОМОЩЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ РАЗМЕРОВ ТРЕМ В ОБОБЩЕННЫХ ТРЕМА-ФРАКТАЛАХ

В одном из разделов главы 34 показано, как можно управлять лакунарностью в случае стратифицированных длин трем. А сейчас давайте занесем на скрижали (без особых, правда, подробностей) следующее замечание: той же цели можно достичь и посредством изменения трема-генератора. Мы воспользуемся той мерой лакунарности (из упомянутых в главе 34), которая определяется через величину внешнего порога  $\Omega$ .

Вообще-то мы предпримем предварительно еще один шаг и введем двойной порог, ограничив линейный масштаб трем следующими величинами:  $\varepsilon > 0$  и  $\Lambda < \infty$ .

Нетрудно убедиться в том, что случайным образом выбранная точка по-прежнему принадлежит с вероятностью  $(\varepsilon/\Lambda)^{E-D}$  получающемуся в результате усеченному трема-фракталу. Затем распределим по нашему множеству некоторую массу с плотностью  $\varepsilon^{D-E}$ . Префактор  $\beta = \alpha\Omega^{D-E}$  из главы 34 окажется при этом равным  $\Lambda^{D-E}$ . Если переход к  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполнить должным образом, то выражение остается справедливым и для  $\varepsilon = 0$ . Следовательно,  $\Omega = \Lambda\alpha^{1/(E-D)}$ .

(При альтернативном определении порога  $\Omega$  его величина выражается следующим образом:  $\Omega = \Lambda\alpha^{1/(E-D)}(D/E)^{1/(E-D)}$ .)

Остается вычислить величину  $\alpha$ . Как выясняется, она зависит от общей формы трема-генератора и достигает наибольших значений, когда генератор представляет собой интервал (диск, шар). Она может быть и произвольно малой; соответственно малым оказывается при этом и внешний порог  $\Omega$ .

Если трема заключена между двумя концентрическими сферами с радиусами  $\alpha \gg 1$  и  $\beta \gg 1$ , то результат получается очень простой:  $\Omega \propto 1/\alpha$ .

Таким образом, вполне возможно добиться того, что  $\langle M(R) \rangle$ , а следовательно, и ковариантность распределения масс произвольно быстро перейдет к такому поведению, какое наблюдается в асимптотической области, т. е. плотности в двух точках, расстояние между которыми превышает  $\Omega$ , станут эффективно независимы одна от другой.

Странно, что уменьшение лакунарности (через уменьшение параметра  $\alpha$ ) достигается посредством растягивания генератора. Скорее, следовало бы ожидать, что все более растягивающийся генератор приведет

к увеличению размеров предасимптотической области. Этот факт еще раз подчеркивает, что поведение величины  $\langle M(R) \rangle$  (а значит, и относительной ковариантности распределения масс) дает лишь частичную картину структуры множества. Много дополнительной информации несут в себе более высокие моменты  $M(R)$ , однако рассматривать их здесь мы уже не будем.

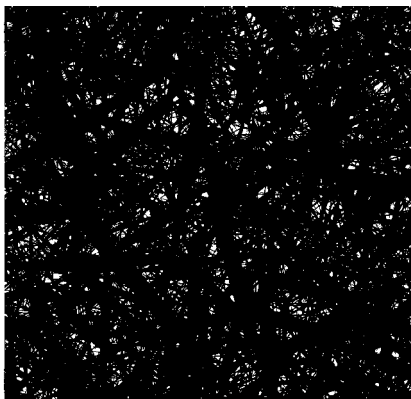
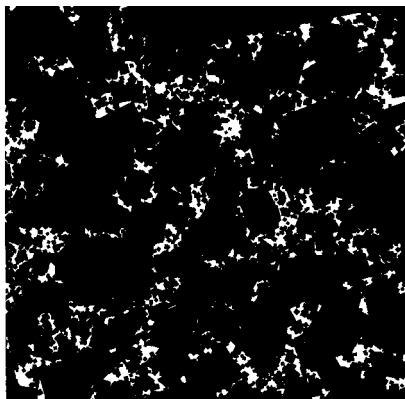
## УПРАВЛЕНИЕ ЛАКУНАРНОСТЬЮ В ПЫЛЯХ, СУБОРДИНИРОВАННЫХ БРОУНОВСКИМ СЛЕДАМ

Раз уж мы управляем лакунарностью линейной пыли, мы вполне можем отобразить результат на пространство с помощью процесса субординации, описанного в главе 32. Имея дело с плоскостью и используя в качестве субординанда броуновскую сеть (см. рис. 341), можно построить пыль, которая произвольно близка к тому, чтобы выглядеть как сеть, и характеризуется бесконечной степенью ветвления. Начнем с плоскости и положим, что субординанд представляет собой дробную броуновскую сеть с  $H > 1/2$ ; пустоты такой сети имеют меньший размер, чем пустоты сети с  $H = 1/2$ . Если при этом размерность субординатора удовлетворяет неравенству  $D/H < E = 2$ , а лакунарность субординатора низка, то можно добиться того, что субординат будет произвольно близок к тому, чтобы казаться заполняющим плоскость. В случае  $E = 3$  и  $H = 1/3$  субординанд является заполняющей пространство кривой. Если  $D/H < E$ , а лакунарность субординатора низка, то можно добиться того, что субординатная пыль будет заполнять пространство; при этом степень ее лакунарности может быть сколько угодно низкой, независимо от величины  $D$ . ■

### Рис. 446. ВЛИЯНИЕ ТРЕМА-ГЕНЕРАТОРА НА ЛАКУНАРНОСТЬ ТРЕМА-ФРАКТАЛА

Эти иллюстрации призваны дать читателю представление о степени влияния формы трема-генератора на лакунарность фрактала. Оба трема-генератора имеют форму ромба, однако первый ромб представляет собой почти квадрат, а второй больше похож на тонкую иглу. Внутри белых областей можно разглядеть отдельные маленькие черные ромбы.

Оба построения характеризуются одинаковой размерностью  $D$ ; площади наибольшего и наименьшего ромбов также одинаковы. Отсюда следует, что в обоих случаях одинаковы и площади оставшихся белыми областей (с учетом статистической изменчивости). Тем не менее, непосредственное наблюдение со всей очевидностью свидетельствует о том, что белые участки на одном из рисунков распределены гораздо более

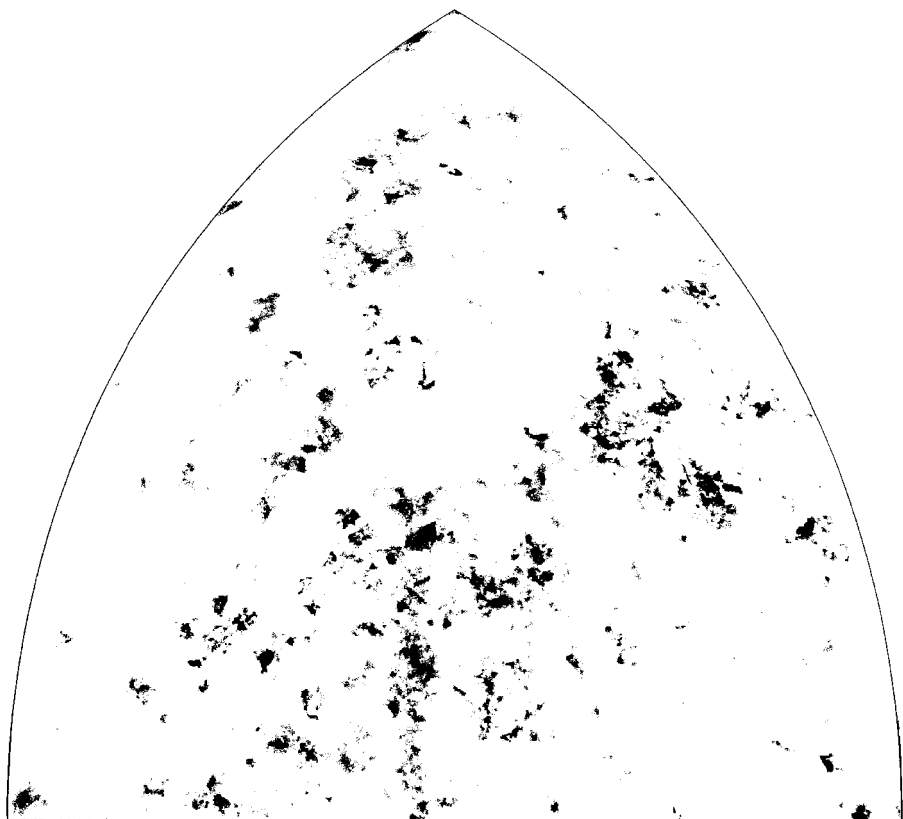


равномерно, чем на другом. В соответствии с введенными мною мерами лакуарности более равномерно распределенные белые остатки характеризуются более низким значением коэффициента лакуарности. ■

**Рис. 447. ФРАКТАЛЬНАЯ ПЫЛЬ, ПОЛУЧАЕМАЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ТРЕМ: ПРОЕКЦИЯ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОКТАНТА НА СФЕРИЧЕСКИЙ НЕБОСВОД**

Мне, право, очень неловко об этом говорить, но изначально я планировал поместить здесь совсем другую иллюстрацию, и более того — в настоящий момент я не в состоянии припомнить точных спецификаций той, которая все-таки сюда попала. Причина весьма незамысловата. К первому января 1979 г. мы подготовили огромное количество изображений фракталов с размерностью  $D \sim 1,23$  и различными степенями лакуарности и сукколяции. Большая часть готовых иллюстраций хранилась в одной папке, которую куда-то засунули и не смогли потом отыскать; к счастью, в других папках уцелели некоторые предварительные результаты, однако ярлыки к ним оказались никуда не годными. Времени на повторный запуск программы уже не оставалось, поэтому пришлось довольствоваться тем, что удалось спасти.

Насколько я помню, построение для данной иллюстрации начинается с периодической структуры, периодом которой является кубическая решетка  $600 \times 600 \times 600$ . Иными словами, вычисление проводится на решетке  $600 \times 600 \times 600$ , противоположные грани которой совпадают, образуя тор. Распределение объемов трем усечено. Поскольку тремы в процессе построения удаляются, точка начала координат перемещается

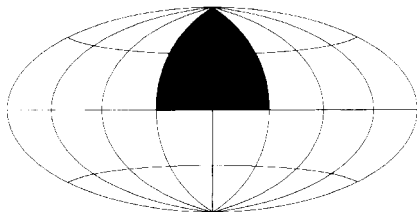


в некоторую не удаленную точку, которая выбирается либо произвольно, либо внутри области с высокой плотностью.

Точки, близкие к началу координат, исключаются из результата построения, остальные же сортируются по оболочкам, задаваемым неравенством  $R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$ , в соответствии с уменьшающимся уровнем яркости. Каждая оболочка проецируется на сферический небосвод.

Целью построения является обработка имеющихся в наличии данных с тем, чтобы извлечь из них максимальное количество *независимой* информации. При малых значениях  $R_2$  можно составить карту всего небосвода целиком, однако при больших  $R_2$  не следует обрабатывать больше некоторой разумной доли одного периода исходной периодической структуры. Максимальное значение  $R_2$  в самой внешней оболочке соответствует карте, ограниченной одним-единственным октан-

том небесной сферы — например, областью, где  $x > 0$ ,  $y > 0$  и  $z > 0$ . Определяя этот октант в сферических координатах, можно сказать, что он соответствует положительным значениям широты (северное полушарие), долгота же при этом варьируется от  $-45^\circ$  до  $45^\circ$ . В использованной здесь хаммеровской проекции этот октант отображается на участок, напоминающий *готическое стрельчатое окно*; см. нижеследующий рисунок.



Когда  $R_2$  достигает 600, данные в окрестностях трех вершин становятся статистически зависимыми, причем окрестности нижних вершин лучше всего совсем исключить из рассмотрения. Таким образом, данные за пределами  $R_2 = 600$ , а также данные в окрестностях точек  $x = z = 0$ ,  $y = 600$  и  $y = z = 0$ ,  $x = 600$ , приходится принести в жертву необходимости избежания статистической зависимости, порождаемой периодичностью. С другой стороны, для построения небосвода для антиподов ( $x < 0$ ,  $y < 0$  и  $z < 0$ , т. е. южные широты и долготы  $\theta$ , удовлетворяющие неравенству  $|\theta - 180^\circ| < 45^\circ$ ) не требуется заново проводить вычисления, а результат может оказаться достаточно отличным от предыдущего, и его вполне можно будет рассматривать как источник дополнительной информации.

На заключительном этапе обработки, целью которого является уничтожение следов исходной кубической решетки, все точки смещаются вдоль векторов, координаты которых равномерно распределены на интервале  $[0, 1]$ . К сожалению, в результате этой процедуры образуются сплошные серые участки различной степени насыщенности, которые искажают получаемую фрактальную пыль: мы видим не что иное, как сглаженные версии областей с высокой степенью неравномерности.

На представляемой вниманию читателя иллюстрации  $R_2 = 600$ , а  $R_1 = R_2/1,5$ , т. е. модули векторов лежат в узком диапазоне, ширина которого равна  $2,5 \lg(1,5)^2 \sim 0,88$ .

На рис. 7 в статье [397] представлена еще одна фрактальная пыль (из тех же, кстати, предварительных результатов с неполными ярлычками), при построении которой использовался другой набор из  $f$  трем.





# XI ◊ РАЗНОЕ

---

## 36 ◊ ФРАКТАЛЬНАЯ ЛОГИКА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ РЕШЕТОЧНОЙ ФИЗИКЕ

С фрактальной точки зрения, большинство задач физики не имеет сколько-нибудь принципиальных отличий от тех задач, что ставят перед собой другие научные дисциплины. Именно поэтому в настоящем эссе повсюду встречаются всевозможные «прецеденты» из физики, и лишь немногие мы приберегли для отдельного рассмотрения в этой главе.

Возможно, однако, что кто-то начнет читать книгу именно с этой главы, так как только в ее названии имеется слово «физика». Такому читателю я порекомендовал бы заглянуть в указатель, но сначала обратил бы его внимание на перечисленные ниже пространные рассмотрения физических прецедентов, никак не фигурирующие в названиях соответствующих глав.

В главах 13 и 14 обсуждается феномен перколяции.

Аполлониево «мыло» в главе 18 есть не что иное, как смектическая фаза жидкого кристалла.

Понятие текстуры (главы 34 и 35) наверняка в самом ближайшем будущем найдет многочисленные новые области применения в физике.

Наконец, позвольте мне привести некоторые небезы-interесные, на мой взгляд, факты. Термин «*дифракталы*» впервые появился в одноименной работе Берри [24] — так были названы волны, либо отраженные от фрактальной поверхности, либо преломленные пластиной, состоящей из прозрачного материала с фрактально турбулентным показателем преломления. Дифракталы представляют собой новый волновой режим, с помощью которого можно исследовать все более тонкие структурные уровни и к которому неприменима геометрическая оптика. Некоторые из свойств дифракталов Берри вычислил в явном виде.

В другой своей работе [23] Берри рассчитал распределение мод фрактальных барабанов — резонаторов с фрактальными границами.

## О ДВУХ ВИДАХ СХОДИМОСТИ

Перейдем непосредственно к цели настоящей главы. До сих пор при рассмотрении различных прецедентов от физики мы пренебрегали одним очень важным обстоятельством (либо заметили его при удобном случае под ковер): во многих областях физики один из основных этапов построения математического фрактала принципиально неосуществим.

Для начала вспомним еще раз о том, что львиная доля настоящего все посвящена фракталам, в построении которых участвует рекурсивная интерполяция — либо по определению, либо хотя бы через апостериорное явное построение. Каждый этап построения начинается с симметрически стандартной фигуры — например, ломаной линии, или «терагона» — и заканчивается некоторой ее интерполяцией. Фрактал является пределом таких терагонов в том смысле, что расстояние между терагоном и предельной кривой (определяемое соответствующим обобщением стандартного понятия расстояния между точками) стремится к нулю. Такой предел математики называют «сильным».

Прочие пределы, возникающие в статистическом контексте, называются «слабыми» (или «слабо определенными»). В обычном представлении различие между этими двумя видами пределов очень тонко. Тема слабой сходимости, однако, пронизывает все те случаи (как давно известные, так и новые), когда случайные фракталы соприкасаются с «решеточной физикой», что является обычной практикой современной статистической физики.

В разговоре мы будем опираться на некоторые совсем свежие примеры фракталов в физике, а также коснемся одной весьма подходящей к нашему случаю и очень важной проблемы из области решеточной гидродинамики.

## ФРАКТАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

Для начала отметим роль слабой сходимости в контексте броуновского движения. Как мельком упоминалось в главе 25, случайное блуждание на решетке (состоящей, например, из точек, координаты которых являются исключительно целыми числами) можно «учащать» до тех пор, пока шаг решетки не станет пренебрежимо малым, а его влияние на наблюдаемый результат — ничтожным.

Общеизвестно, что данная процедура «порождает» броуновское движение, однако термин «порождать» приобретает здесь новый смысл. Последовательность терагонов, которую мы использовали в главе 6 для построения кривой Коха, можно сравнить с картиной, детализация которой постепенно увеличивается посредством все более точной фокусировки. Что же касается последовательности учащенных случайных

блужданий, то она ведет себя совсем иначе: на одном этапе случайное блуждание приближается к одному броуновскому движению, на следующем этапе оно подходит еще ближе, но уже к другому броуновскому движению, потом еще ближе — к третьему и так далее . . . не в состоянии осесть на каком-то одном месте. Это обстоятельство дает математикам полное право называть процесс сходимости случайного блуждания *слабым* или *слабо определенным*. С тем же правом конечно-ушащенное случайное блуждание мы можем рассматривать как фрактальную кривую, внутренний порог которой равен шагу решетки. Однако это не тот порог, который знаком нам по предыдущим главам. Тот внутренний порог накладывался *a posteriori*<sup>1</sup> на определенные геометрические построения, которые в теории не предполагают наличия какого бы то ни было порога и которые можно интерполировать до бесконечно малых масштабов, получая при этом фракталы. Случайное же блуждание интерполировать никоим образом нельзя.

## ФРАКТАЛЫ В «РЕШЕТОЧНОЙ ФИЗИКЕ»

Предыдущие рассуждения касаются далеко не только броуновского движения. В самом деле, у статистической физики имеются весьма серьезные причины заменять многие из стоящих перед ней реальных задач их аналогами, ограниченными некоторой решеткой. Можно даже, пожалуй, сказать, что почти вся статистическая физика образует некую часть более общей «решеточной физики».

Как я указывал в своих предыдущих эссе (и это было подтверждено многими исследователями), в решеточной физике в изобилии встречаются фракталы и почти фракталы. Первые представляют собой фигуры в пространстве параметров — таковы, например, упоминаемые в пояснении к рис. 125 чертовы лестницы. Вторые — это встречающиеся в реальном мире фигуры, которые *не являются* фракталами, так как их никоим образом нельзя интерполировать до бесконечно малых масштабов, однако они похожи на фракталы в той степени, в какой фрактальны их свойства в средних и больших масштабах. С замечательным примером такой фигуры мы встречались в главах 13 и 14 при рассмотрении бернуллиевой перколяции.

Нет нужды говорить, что я целиком и полностью убежден в том, что ухащенные версии упомянутых фигур слабо сходятся к фрактальным пределам. На этом моем убеждении, собственно, и основаны рассуждения в главах 13 и 14. Физики также считают это допущение как нельзя более убедительным, несмотря даже на то, что его полное математическое доказательство, насколько мне известно, имеется только для случая броуновского движения. Исходя из вышесказанного, я склоняюсь

<sup>1</sup>Из последующего (лат.), т. е. после опыта, на основании опыта. — *Прим. перев.*

к тому, чтобы рассматривать эти *нефрактальные* фигуры с предполагаемыми фрактальными пределами как *решеточные* фракталы. Чуть позже мы поговорим и о других важных примерах решеточных фракталов.

Можно сделать еще одно — связанное с предыдущим, но отличное от него — предположение, которое заключается в том, что реальные задачи, для которых решеточная физика предоставляет удобное упрощение, связаны с теми же (или почти с теми же) фракталами. Это предположение получило поддержку в работе [535] в отношении полимеров (которыми мы также вскоре займемся).

## ЛОКАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ / ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК

Решеточной физике мы обязаны одним интереснейшим открытием, которое заслуживает того, чтобы о нем узнал весь мир. Заключается оно в том, что при определенных условиях чисто локальные взаимодействия имеют глобальные последствия. Приведу простой пример: результатом взаимодействий между соседними элементарными спинами является магнит, в удивительных свойствах которого всякий может убедиться сам.

Здесь, полагаю, мы вправе помечтать о том, что когда-нибудь феномены, для представления которых я использовал дробные броуновские фракталы, получат аналогичное объяснение.

## ВЫМЫШЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Позвольте мне описать некий пример, который фундаментальнейшим образом не согласуется с физическим механизмом упорядочения, однако обладает некоторыми несомненными достоинствами: он прост, и, кроме того, в нем (в качестве примера доказуемого слабого предела) фигурирует наша старая фрактальная приятельница, салфетка Серпинского (см. главу 14). В точках с целочисленными координатами разместим спины таким образом, чтобы в четные (нечетные) моменты времени они занимали четные (нечетные) места. Знак каждого спина определяется в соответствии со следующим правилом: спин  $S(t, n)$  в момент времени  $t$  и в позиции  $n$  отрицателен, если спины  $S(t-1, n-1)$  и  $S(t+1, n+1)$  одинаковы, и положителен в противном случае.

Прямая, состоящая из равномерно расположенных отрицательных спинов, остается после проведения описанной процедуры инвариантной. Проследим эффекты, возникающие при включении в нее положительной «примеси» в точке с координатой  $n = 0$  в момент времени  $t = 0$ . Все спины  $S(1, n)$  отрицательны, кроме спинов, расположенных в точ-

ках  $n = -1$  и  $n = +1$ . Последующие конфигурации выглядят таким вот образом:

```

- - - - - + - - - - -
- - - - - + + - - - - -
- - - - - + - + - - - - -
- - - - - + + + + - - - - -
- - - - - + - - - + - - - - -
- - - - + + - - - + - - - - -
- - - + + + + + + + - - - - -
- - - + - - - - - - - + - - - - -
- - + + - - - - - - - + + - - - - -
- . + - + - - - - - - + - + - - - - -
+ + + + + - - - - - + + + + - - - - -
+ - - - - + - - - - + - - - - +
+ + - - + + - - + + - - + +

```

Многие читатели, несомненно, узнают в этом построении треугольник Паскаля, в котором места расположения нечетных биномиальных коэффициентов отмечены знаками  $+$ . В полном треугольнике Паскаля  $t$ -я строка дает значения коэффициентов в разложении бинома  $(a + b)^t$ .

Всякий, кто прочел главу 14, сразу увидит, что если соединить каждый плюс с соседними плюсами, то получится граф, родство которого с салфеткой Серпинского просто бросается в глаза (см. [499]). Более того, при уменьшении шага решетки этот граф сходится именно к салфетке Серпинского.

## СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ И ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Обратимся теперь к одной важной конкретной задаче. При случайном блуждании без самопересечений (СББС) точка движется вперед, не обращая никакого внимания на свои предыдущие положения; исключением является лишь запрет проходить через одно место более одного раза и забредать туда, откуда невозможно найти выход. Все допустимые направления равновероятны.

На прямой такое движение не представляет никаких проблем: оно неизбежно распространяется в обоих направлениях и никогда не пересекает само себя.

Что касается плоского и пространственного случаев, то здесь возникает интересная и весьма сложная проблема — настолько сложная, что до сих пор ни одна аналитическая попытка найти ее решение не увенчалась успехом. Однако практическая значимость этой проблемы при изучении макромолекул (полимеров) настолько велика, что она стала объектом тщательных эвристических исследований и детального компьютерного

моделирования. Ниже приводится наиболее интересный для нас результат, полученный Ч. Домбом и описанный в [15].

После  $n \gg 1$  этапов построения среднеквадратическое смещение  $R_n$  имеет порядок, равный величине  $n$ , возведенной в степень, которую мы обозначим через  $1/D$ .

Исходя из этого утверждения, можно с большой долей уверенности заключить, что внутри окружности или сферы радиуса  $R$  с центром в некоторой точке случайного блуждания содержится приблизительно  $R^D$  других точек этого случайного блуждания. Хороший повод удостовериться, является ли величина  $D$  фрактальной размерностью.

В случае прямой  $D$  (тривиально) равно единице. Согласно теоретическим рассуждениям Флори и результатам компьютерного моделирования для  $E = 2$  и  $E = 3$ ,  $D = (E + 2)/3$  (подробнее об этом можно прочесть в замечательном обзоре [99] (раздел 1.3), правда, вместо  $D$  там используется обозначение  $1/\nu$ ). Фрактальная размерность  $D_B = 2$  броуновского движения превышает это значение в случаях  $E = 2$  и  $E = 3$ , однако совпадает с ним при  $E = 4$ .

Согласно предельному доказательству Кестена,  $D \rightarrow 2$  только при условии, что  $E \rightarrow 2$ . Однако предположение о том, что  $D = 2$  при любом  $E \geq 4$ , подкрепляется изящной физической аргументацией, а также одним простым фрактальным доводом, который звучит следующим образом: при  $E \geq 4$  коразмерность броуновского движения равна двум, следовательно, коразмерность множества его двойных точек равна нулю, — а это означает, что броуновское движение не имеет двойных точек. Таким образом, без особых хлопот мы приходим к искомому выводу: броуновское движение нигде не пересекает само себя.

Значения  $D$ , как оказалось, весьма чувствительны к исходным допущениям. Виндвер обнаружил, что если полимер в 3-пространстве состоит из двух различных типов атомов (т.е. блуждание не ограничено решеткой), то  $D = 2/1,29$ , а это, по его мнению, существенно меньше значения, полученного Домбом ( $D = 1,67 \sim 2/1,2$ ). В случае полимера, растворенного в каком-либо реакционно-способном растворителе, пространство вложения оказывается еще менее инертным; величина  $D$ , в частности, становится в этом случае зависимой от протекающей реакции. Точка  $\Theta$  определяется как точка, в которой  $D$  принимает свое броуновское значение  $D_B = 2$ . В хороших растворителях  $D < 2$ , причем чем выше качество растворителя, тем меньше  $D$ ; совершенный растворитель, в частности, дает  $D = 2/1,57$  при  $E = 2$  и  $D = 2/1,37$  при  $E = 3$ . Даже с самым плохим растворителем величина  $D$  в 2-пространстве никогда не достигает значения  $D = 2$ , однако в 3-пространстве плохой растворитель с легкостью обеспечивает  $D > 2$ . В действие вступают коагуляция и фазовое разнесение, и неразветвленная цепь больше не может считаться удовлетворительной моделью.

Предыдущие абзацы были написаны исключительно с целью выражения известных результатов в рамках фрактальной терминологии — мне думается, такое выражение поможет читателю яснее представить себе их значение. Тем не менее, следует еще раз подчеркнуть: называя величину  $D$  размерностью, мы тем самым допускаем, что многократно учащенные СББС слабо сходятся к некому семейству фракталов, размерность которых совпадает с эмпирически наблюдаемым значением  $D$ . Физики на этот счет не испытывают никаких сомнений, однако привередливые математики настаивают на том, что на данный момент такое утверждение является не более чем предположением. В следующем разделе мы вкратце обрисует направление, в котором может пойти доказательство упомянутого предположения.

Заметьте, мы *вовсе не ожидаем*, что фрактальный предел при участии решетки окажется лишен самопересечений, так как точки, в которых СББС «погружается» в свое отдаленное прошлое, становятся двойными точками. В самом деле, размерность множества двойных точек в этом случае положительна,  $(4 - E)/3 > 0$ . Мы, однако, можем ожидать, что тройных точек *не будет*, поскольку размерность их множества равна  $\max(0, 2 - E) = 0$ .

Последовательности, сильно сходящиеся к фракталам, несравненно легче поддаются изучению (как аналитически, так и с точки зрения вычислений), нежели СББС на частых решетках. Следовательно, удобно было бы — если можно так выразиться — «оттенить» СББС некоторой последовательностью, благословенной обыкновенно (т. е. сильно) сходящимися приближениями. Этой цели можно достичь, используя предложенные мною «сквиг-кривые» (см. главу 24). Поразительно, но размерность наименее изошренных и наиболее изотропных сквиг-кривых оказывается чрезвычайно близка к значению  $D = 4/3$ , характерному для плоских СББС. Еще одна «тьень» — броуновское движение без самопересечений, определяемое на рис. 341 как граница оболочки ограниченного броуновского следа. Вспомним, что размерность этой границы также составляет  $D = 4/3$ . Едва ли это просто совпадение — скорее, намек на возможность углубить наши знания о структуре плоскости.

В этом месте было бы интересно отступить немного в сторону и посмотреть, соответствует ли случайное блуждание без самопересечений космологическому принципу (см. главу 22). На первых этапах построения не наблюдается этого соответствия. Скорее всего, преобладающим окажется установившееся условно космографическое состояние (однако мне не известно, пытался ли кто-нибудь доказать это).

## РЕНОРМ-ГРУППОВОЙ ПОДХОД

*Аналитическое* изучение масштабной инвариантности в решеточных физических системах (опирающееся на традиции, отличные от тех,

каким следую я) полагается зачастую на один весьма могущественный инструмент, который называется (ошибочно, кстати) «методом ренорм-групп (РГ)». В качестве дополнительного источника рекомендую весьма доступный обзор от самого автора метода, К. Уилсона, [604]. Когда один из предыдущих вариантов настоящего эссе находился еще в стадии предпечатной подготовки — причем в то же время готовилась к печати одна из ранних статей по РГ, — у меня состоялся разговор с Х. Г. Калленом, который привлек мое внимание к очевидному концептуальному сродству между ними.

Чтобы рассмотреть это сродство более подробно, я предлагаю читателю поразмыслить над некоторыми цитатами из Уилсона ([603], с. 774): а) «Ключевой особенностью статистического континуального предела является отсутствие характеристических масштабов длины, энергии или времени»; б) «[Метод РГ — это] инструмент, который мы используем для изучения статистического континуального предела точно так же, как нахождение производной является основной процедурой при изучении обыкновенного континуального предела . . . [Дополнительная гипотеза об универсальности] также имеет аналог в случае обыкновенной производной. Как правило, существует много конечно-разностных аппроксимаций для производной»; в) «Мы все еще очень далеки от понимания простой и в то же время явно структурированной природы производной»; г) «Расходящийся интеграл есть типичный . . . симптом задачи, не имеющей характеристического масштаба»; д) «[Ранняя] теория ренорм-групп . . . не рассматривает расходимостей в квантовой электродинамике . . . Хуже всего [в ней] то, что . . . это чисто математический метод для вычитания расходящихся частей интегралов»; е) «Главной физической основой ренорм-группового подхода . . . является существование каскадного эффекта . . . [Первой] основной особенностью каскадной картины является ее масштабная инвариантность»; ж) «[Вторая основная особенность — это] усиление либо ослабление».

Теперь кое-какие комментарии. В цитате (а) утверждается, что и РГ, и фракталы предназначены для решения практических задач одного класса, а в цитате (г) — что в процессе решения они сталкиваются прежде всего с одной и той же проблемой. Цитата (б) становится гораздо более точной, если применить ее к теории фракталов. Высказанное в цитате (в) сожаление во фрактальном контексте лишено оснований: в настоящее время в нашем распоряжении имеется простая и в то же время структурированная замена производной, первым элементом которой является фрактальная размерность. Цитата (г), несомненно, принесла читателю нашего эссе радость узнавания: главу 5 мы начали с доказательства расходимости интеграла, который, в теории, должен был бы дать нам длину береговой линии. В других ситуациях мы смиряемся и с бесконечной дисперсией, и с бесконечным математическим ожиданием, и с бесконечной вероятностью (например, когда имеем дело с распреде-



лением  $\text{Pr}(U > u) = u^{-D}$  при  $0 < u < \infty$ , хотя и знаем, что  $0^{-D} = \infty$ ). Цитата (д) наполняет нас ощущением покоя и безопасности: уж мы-то всегда сможем избежать расходимостей, не прибегая для этого к чисто математическим методам. Цитата (е) также выглядит вполне знакомой.

В итоге не остается никаких сомнений в том, что и РГ, и фракталы ведут свое происхождение из одного источника и составляют, как выясняется, две стороны одной монеты, аналитическую и геометрическую. Однако фрактального аналога для цитаты (ж) мы так и не нашли, следовательно, параллелизм нельзя считать полным.

◁ Теория РГ дает нам такую замечательную вещь, как гамильтониан неподвижной точки,  $\mathcal{H}_0$ . Быть физиком — значит полагать, что из гамильтониана  $\mathcal{H}$  физической системы, в принципе, выводится все, что вообще возможно узнать о структуре этой системы. Если это так, то должна существовать возможность использовать гамильтонианы и для получения совместных распределений вероятностей различных случайных фигур. Из конечно-перенормированного гамильтониана  $\mathcal{H}$  наверняка можно вывести распределения фигур, построенных на частой решетке, а из гамильтониана неподвижной точки  $\mathcal{H}_0$  — распределения предельных фигур (и, в особенности, их размерности  $D$ ). Здесь вырисовывается целая исследовательская программа, которую, возможно, будет сложно реализовать, но которая, я уверен, приведет к желаемым результатам. ►

## МНОГОУГОЛЬНИКИ БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Выберем случайным образом какой-нибудь многоугольник из всех не пересекающих себя  $n$ -угольников, стороны которых состоят из ребер плоской ( $E = 2$ ) квадратной решетки. Он может оказаться близок по форме к квадрату, и тогда его площадь будет приблизительно равна  $(n/4)^2$ . Возможно также, что он будет узким и вытянутым, и его площадь составит приблизительно  $n/2$ . При усреднении (посредством назначения каждому многоугольнику одинакового веса) результаты численного моделирования дают для площади среднее значение, приблизительно равное  $n^{2/D}$ , где  $D \sim 4/3$  (см. [215]). Следовательно, с точки зрения теории фракталов, многоугольник ведет себя как случайное блуждание без самопересечений, кусающее себя за хвост.

## И СНОВА МОДЕЛИ БЕРЕГОВЫХ ЛИНИЙ

То, что многоугольники без самопересечений имеют размерность  $D \sim 4/3$ , похоже, дает им право выступать в качестве моделей

береговых линий, иррегулярность которых превышает средний уровень. Мы, конечно же, можем возрадоваться этому открытию, однако оно никоим образом не разрешает вопроса о форме береговых линий, поставленного в главе 5.

Прежде всего, остается проблема островов. Концепция размерности должна одновременно учитывать и иррегулярность береговых линий, и их фрагментацию, и связь между иррегулярностью и фрагментацией. А у не пересекающих себя многоугольников прибрежных островов, к сожалению, не наблюдается.

Кроме того, я полагаю, что одного-единственного значения  $D$  для всех береговых линий Земли явно недостаточно.

И, наконец — последнее по порядку, но не по значимости, — если шаг решетки, на которой мы строим очень обширное случайное блуждание (или большой многоугольник) без самопересечений, уменьшается с единицы до какого-либо малого значения  $\eta$ , то две точки, разделенные ранее промежутком единичной длины, сходятся в пределе к одной и той же точке. Таким образом, в предельном случайном блуждании (многоугольнике) на частой решетке появляются точки пусть не самопересечения, но самокасания. Мне совсем не нравится наличие таких точек в модели береговой линии. Помимо всего прочего, эта модель подразумевает возможность буквальной интерпретации латинского слова *peninsula* («полуостров» или, буквально, «почти-остров») как острова, который касается материка в одной-единственной точке, а также существования почти-озер.

## ПОЧЕМУ РЕКИ НЕ МОГУТ ТЕЧЬ ПРЯМО?

В главе 12 мы упоминали об эмпирическом открытии Хака, которое заключается в том, что длина типичной реки возрастает пропорционально площади ее бассейна, возведенной в степень  $D/2$ . Если бы реки текли прямолинейно по своим круглым бассейнам, то длина потока была бы пропорциональна квадратному корню из площади бассейна, а  $D$  равнялась бы единице. В действительности же значение  $D$  варьируется от 1, 2 до 1, 3. В качестве примера в главе 12 приводится описание модели, в основе которой лежит заполняющая плоскость сеть рек, причем реки эти представляют собой фрактальные кривые.

Леопольд и Лангбейн предприняли попытку объяснения эффекта Хака, но избрали для этого совершенно иной, стохастический, путь: в своей работе [298] они сообщают о полученных ими результатах компьютерного моделирования развития конфигураций гидрографической сети в литологически однородных районах. В модели используется оригинальное двумерное случайное блуждание на квадратной решетке, которое наверняка заинтересует любого физика. Предполагается, что рас-

положения истоков и направления распространения выбираются случайным образом. Истоком первого потока является выбранный наугад квадрат, далее СББС генерирует русло на каждый следующий соседний квадрат до тех пор, пока поток не переходит границу области. Затем наугад выбирается второй исток, и аналогичным образом генерируется второй поток, который обрывается либо уходом через границу области, либо слиянием с первым потоком. Часто оказывается так, что второй поток (назовем его «Миссури») проходит до точки слияния бóльший путь, нежели первый («Миссисипи»). Слияние может произойти и в самой точке истока первого потока. Описанная процедура совершается до тех пор, пока все квадраты не оказываются заполненными. В дополнение к этим общим правилам допускаются различные достаточно произвольные решения с целью избежать петель, касаний и прочих несообразностей.

Согласно результатам моделирования длина реки в этой основанной на случайном блуждании модели пропорциональна площади бассейна в степени 0,64. Следовательно,  $D \sim 1,28$ . Расхождение между этим значением и значением Домба  $D \sim 4/3$  можно объяснить статистической вариацией, вызванной недостаточной полнотой моделирования. Однако я склонен считать, что это расхождение отражает истинное положение дел: совокупное воздействие со стороны других потоков в модели Леопольда–Лангбейна, по-видимому, более выражено, чем влияние предыдущих положений СББС на его настоящее, а значит, меньшей размерности  $D$  следовало ожидать.

По сравнению с реальными картами реки в модели Леопольда–Лангбейна блуждают в высшей степени беспорядочно. Для устранения этого недостатка было предложено множество альтернативных вариантов. В модели Ховарда [228] постулируется рост «против течения» (согласно разнообразным совершенно искусственным схемам) от устьев, расположенных на границе квадрата, к истокам, помещенным внутри. Эта процедура генерирует заметно более прямые реки, чем те, что мы наблюдали в модели Леопольда–Лангбейна, что, по всей видимости, подразумевает и меньшую размерность  $D$ .

До сих пор исследование случайных сетей — таких, как речные системы в моделях Леопольда–Лангбейна и Ховарда — ограничиваются лишь несколькими компьютерными моделями. Это весьма прискорбно, и я, пользуясь случаем, хотел бы привлечь внимание математиков к этим интереснейшим задачам. Тот факт, что СББС, как было неоднократно доказано, чрезвычайно плохо поддается анализу, вероятно, отпугнет тех, кому больше по душе несложные, но высокооплачиваемые задачи; хотя вариант Леопольда–Лангбейна может оказаться не так суров.

Повторюсь: математические сложности, с которыми мы сталкиваемся при изучении СББС, происходят из того обстоятельства, что локальные изменения могут повлечь за собой глобальные последствия.

Аналогичным образом в результате малого локального изменения в сети Леопольда–Лангбейна главная река может прорваться через границу квадрата и утек в соседний бассейн. Хорошо было бы научиться хотя бы измерять интенсивность результирующего долгосрочного взаимодействия на макроскопическом уровне. Я, естественно, полагаю, что определяющий эту интенсивность параметр представляет собой не что иное, как фрактальную размерность.



## 37 ◊ КОЛЕБАНИЯ ЦЕН И МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ЭКОНОМИКЕ

Называя обнаружение закономерностей в изменении цен на фондовой и товарной биржах геометрической задачей, мы шутим лишь наполовину — финансовые разделы газет полны всевозможных опусов домощеных «геометров», более или менее правдоподобно отображающих на своих диаграммах прошлое и претендующих на то, что они способны, исходя из геометрии этих построений, предсказать будущее.

В ответ на эти претензии у нас имеется контрдовод, впервые выдвинутый Луи Башелье еще в 1900 г.: построение диаграмм и графиков в данном случае бесполезно. В наиболее резкой форме его возражение звучит следующим образом: последовательные изменения цен статистически независимы. Если сформулировать мягче, то каждая цена определяется в результате «мартингального» стохастического процесса, т. е. рынок в этом смысле «совершенен»: все, что происходило в его прошлом, полностью игнорируется. Можно выразиться еще мягче: существование отклонений допускается до тех пор, пока они не превышают операционных издержек; такие рынки называются «эффективными». Понятие эффективности по Башелье оказалось как нельзя более точным.

Вот еще одно, более конкретное, утверждение Башелье: любая конкурентоспособная цена следует в первом приближении «одномерному броуновскому движению»  $B(t)$ . Здесь стоит вспомнить и о том, что столь фундаментальный для физики процесс был открыт не признанным в математическом сообществе математиком; подробнее я расскажу об этом в главе 40. К великому сожалению, когда в дело вступили реальные данные, оказалось, что  $B(t)$  представляет их весьма неудовлетворительно. В настоящей главе представлено альтернативное описание, построенное мною на основе одного скейлингового допущения (одного, кстати, из самых ранних, причем не только в экономике). Как выяснилось, описание это на удивление точно отражает реальное положение дел.

### ДИСКРЕТНОСТЬ ЦЕН

Мое простейшее анти-броуновское возражение основано на одном экспериментальном наблюдении, настолько простом и очевидном, что

остается только удивляться, как нечто столь незамысловатое может оказаться столь фундаментальным. Впрочем, рассуждения, с помощью которых в предыдущих главах доказывалось, что в случае галактик  $D < 2$ , а в случае турбулентности  $D > 2$ , также удивительно просты и очевидны. Упомянутое незамысловатое наблюдение заключается в том, что для описания феномена, характеризующегося *ярко выраженной* дискретностью, *нельзя* использовать непрерывный процесс. Известно, что выборочные функции броуновского движения как раз и являются  $\triangleleft$  почти на верное и почти везде  $\blacktriangleright$  непрерывными. Однако цены на конкурентных рынках *вовсе не обязаны* быть непрерывными, и они явно *дискретны*. Единственная причина допущения непрерывности состоит в том, что многие науки, осознанно или нет, стремятся копировать процедуры, доказавшие свою эффективность в ньютоновской физике. Непрерывность вполне может оказаться разумным допущением при описании всевозможных «экзогенных» сущностей и процессов, которые применимы к экономике, но определены в чисто физических терминах. Цены в эту категорию никоим образом не вписываются: в механике просто нет ничего похожего, и она не может снабдить нас никакими указаниями на этот счет.

Типичный механизм ценообразования предполагает как знание настоящего, так и наличие прогноза на будущее. Даже в тех случаях, когда экзогенные физические факторы, определяющие цену, изменяются непрерывно, изменения прогнозов мгновенны и кардинальны. В ситуации, когда физический сигнал пренебрежимо малой мощности и длительности — «росчерк пера» — провоцирует столь резкое изменение прогнозов (причем дело усложняется тем, что не существует никакого учреждения, в задачу которого входило бы привнесение в процесс инерции), определенная на основе прогнозов цена может как упасть до нуля, так и вознестись до небес — с ней вообще может произойти все, что угодно.

## НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ МЕТОДА ТОРГОВЛИ С ФИЛЬТРАМИ [341]

Вряд ли кому-нибудь может показаться, что сама по себе идея о дискретности цен обладает какой бы то ни было предсказательной силой. Однако эта идея сыграла решающую роль в ниспровержении и последующем погребении метода торговли с применением «фильтров», изобретенного С. Александером [4]. В принципе,  $p$ -процентный фильтр представляет собой прибор, который постоянно отслеживает изменения цен, записывает все локальные минимумы и максимумы и дает сигнал о покупке, когда цена впервые достигает локального минимума *плюс в точности*  $p\%$ , или о продаже, когда цена впервые достигает локального максимума *минус в точности*  $p\%$ . Поскольку постоянное наблюдение не

совсем практично, Александер предложил отслеживать только последовательность среднесуточных максимумов и минимумов, принимая как данность допущение, согласно которому изменение цен представляет собой непрерывную функцию. Применяемый в данном методе алгоритм отыскивает те дни, в которые максимум *впервые превышает* минимум какого-либо из предыдущих дней плюс  $p\%$ . Предполагается, что в некоторый момент времени суток  $d$  цена *в точности* совпадает с упомянутым минимумом плюс  $p\%$ ; именно в этой точке фильтр дает сигнал о покупке. Аналогичным образом выдаются сигналы о продаже. Александер пришел к эмпирическому заключению, что сигналы фильтра о покупке или продаже приносят большую отдачу, чем обычная стратегия «купи и держи».

В действительности же, как я указывал в [341] (с. 417), 24-часовые сутки, на которые приходится сигнал фильтра о покупке, окажутся, скорее всего, именно теми сутками, в течение которых происходит значительный общий рост цен. Многие такие сутки характеризуются резким подъемом (в буквальном смысле, взлетом) цен, который происходит либо за ночь, либо за те периоды, когда торговые операции приостанавливаются в дневное время по инициативе правления биржи. Таким образом, фильтр Александера должен выдавать сигнал о покупке как раз в те моменты, когда он, скорее всего, окажется «выключен»! Он, разумеется, выдаст соответствующий сигнал, как только его снова «включат», однако покупная цена в этот момент наверняка окажется значительно выше, чем рассчитывал Александер.

Еще один возможный вариант: часто бывает так, что изменения цен остаются более или менее непрерывными в результате преднамеренных действий какого-нибудь биржевого маклера, выполняющего свои должностные обязанности, заключающиеся в поддержании равновесия между покупателями и продавцами и в «обеспечении непрерывности рынка», и покупающего или продающего из своего собственного кармана. Когда такому маклеру не удастся обеспечить непрерывность, он обязан предоставить правлению письменное объяснение, поэтому маклеры обычно предпочитают сгладить образовавшуюся разрывность искусственным образом. Разумеется, получаемые при этом прибыли делятся между приятелями, тогда как остальным клиентам приходится покупать по более высокой цене.

Третья возможность: определенные среднесуточные изменения цен имеют определенные пределы, причем среднесуточный предел может сдвигаться на несколько дней без проведения торговых операций, препятствуя попыткам искусственным образом его «остановить».

Теоретические и экспериментальные исследования (о которых я очень скоро расскажу) убедили меня в том, что вышеописанные отклонения весьма значительны, и что вычисленное Александером превосходство торговли с фильтрами над обычной практикой иллюзорно.

Александр [5] проверил свои выводы еще раз и убедился, что я был прав, и что метод фильтров не дает никаких преимуществ перед общепринятым «купи и держи». Фама и Блюм [138] провели тщательное «посмертное вскрытие» метода Александра посредством замены индексов цен индивидуальными ценовыми сериями, окончательно его тем самым похоронив. Этот эпизод подчеркивает опасность заблуждения, заключающегося в том, что я называю «несостоятельностью допущения о непрерывности цен».

Выигрышные «мартингалы»<sup>1</sup> представляются мне похожими на вечный двигатель. К чести гипотезы Башелье об эффективном рынке надо сказать, что она задолго до описываемых событий предсказала, что метод фильтров работать *не будет*; а вот броуновская модель Башелье оказывается серьезно дискредитирована тем, что с ее помощью невозможно объяснить, почему все-таки *создается впечатление*, что фильтры работают. Мои же конкретные модели заслуживают себе высокую репутацию, так как позволяют проанализировать ситуацию и выявить недостатки этого и других тщательно разработанных способов верного обогащения.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ «ПОДПОРКИ»

Непригодность броуновского движения в качестве модели изменений цен вызвала две очень разные реакции. С одной стороны, появилось множество всевозможных специально для данного случая созданных «подпорок». Если броуновская гипотеза о гауссовом характере изменения цен не удовлетворяет какому-либо статистическому критерию, то можно попытаться так или иначе ее модифицировать и продолжать попытки до тех пор, пока упомянутый критерий не будет удовлетворен.

Суть одной весьма популярной подпорки заключается в цензурировании, лицемерно называемом «исключением статистических резко отклоняющихся значений». То есть производится отделение обычных «малых» ценовых изменений от больших ценовых изменений, на которых и спотыкаются фильтры Александра. Первые считаются случайными и гауссовыми, им посвящаются все перлы экономистского красноречия и изобретательности. . . словно кому-то до всего этого есть дело. Последние же рассматриваются отдельно — как «нестохастические». Сутью еще одной популярной подпорки является предположение о смеси нескольких случайных совокупностей: если некая величина  $X$  не является гауссовой, то, возможно, она представляет собой смесь двух, трех, или большего количества гауссовых случайных величин. Следующая подпорка использует нелинейные преобразования: если некая величина

<sup>1</sup>В теории игр — удваивание ставки при проигрыше (с целью отыграться). — *Прим. перев.*



на  $X$  положительна и совершенно не желает следовать гауссову распределению, то, может быть, гауссовым окажется  $\ln X$ , а если величина  $X$  симметрична и негауссова, то, возможно — чем черт не шутит! — критерию удовлетворяет  $\operatorname{tg}^{-1} X$ . Очередной подобный «метод» (который я, кстати, рассматриваю как попытку самоубийства со стороны предложившего его статистика) предполагает, что изменения цен следуют броуновскому движению, однако параметры этого движения подвержены неконтролируемым вариациям. Последнюю подпорку просто-напросто невозможно опровергнуть, из чего философ Карл Поппер делает вывод, что она вообще не может являться научной теорией.

## СКЕЙЛИНГОВЫЙ ПРИНЦИП В ЭКОНОМИКЕ [341]

Примером противоположного подпоркам подхода может служить моя собственная работа. Она применима к самым разным экономическим данным, однако сам принцип удобнее всего объяснить именно в контексте цен.

**Скейлинговый принцип изменения цен.** Пусть функция  $X(t)$  описывает изменения цены; тогда функция  $\ln X(t)$  обладает следующим свойством: распределение ее приращения за произвольный временной интервал  $d$  (т. е.  $\ln X(t+d) - \ln X(t)$ ) не зависит от  $d$ , если не считать масштабного коэффициента.

Прежде чем мы углубимся в изучение следствий из этого принципа, пройдемся по контрольному списку свойств, какими полагается обладать любому уважающему себя научному принципу.

Научный принцип *должен* давать предсказания, которые можно подтвердить экспериментально. Этому требованию наш принцип отвечает (в чем мы вскоре убедимся), причем отвечает весьма точно.

Когда научные принципы выводимы из других теоретических соображений в соответствующих областях науки, это *всегда* производит *очень хорошее* впечатление. Скейлинговый принцип изменения цен можно вывести из общей (не обязательно стандартной) формулировки доказательства центральной предельной теоремы, однако в рамках стандартной экономики его еще никто не выводил. Единственно доступные «объяснительные» доказательства рассматриваемого принципа [351, 363] расценивают его как следствие из применимости масштабной инвариантности к экзогенным физическим переменным. Доказательства эти, однако, нельзя назвать столь же хорошо обоснованными, как результат, который они призваны подтвердить.

Наконец, даже при полном отсутствии действительного объяснения, всегда *приятно* видеть, что новый научный принцип не вступает в открытый *конфликт* с более ранними предположениями. В этом смысле обсуждаемый нами скейлинговый принцип ведет себя достаточно

невинно. Вопрос, на который он дает ответ, никогда ранее не поднимался, так что спорных мнений выразить никто не успел. В данном случае, вся масштабная инвариантность, похоже, сводится к одному-единственному утверждению: на реальных рынках в условиях конкуренции не существует особенных временных интервалов. Заметные невооруженным глазом отличия того или иного времени суток, дня недели (или времени года в случае сельскохозяйственных товаров) так или иначе компенсируются либо исключаются из рассмотрения. В то время, как все обычные «подпорки» броуновского ценообразования предполагают наличие неких привилегированных временных масштабов, мой принцип всего лишь указывает на то, что не существует «достаточных причин» полагать, что какой-то временной масштаб окажется более привилегированным, нежели любой другой.

## СИНДРОМ БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИИ

Как бы то ни было, нам предстоит теперь воплотить скейлинговый принцип в действительность с тем, чтобы получить результат, отличный от броуновского движения. Для достижения этой цели я сделал весьма радикальный шаг: допустил, что приращение  $\ln X(t+d) - \ln X(t)$  имеет бесконечную дисперсию. До выхода в свет моих работ никто особо не задумывался при написании фразы «обозначим дисперсию через  $V$ ». О предшествующем этой фразе допущении, что величина  $V$  конечна, даже не упоминалось. . . и совершенно справедливо не упоминалось, поскольку нам никогда не удастся дописать до конца научную работу, если мы будем перечислять все используемые нами допущения, безотносительно к степени их «общепринятости». О причинах такой своей радикальности я расскажу позже в этом же разделе. Хотя одна из причин настолько очевидна, что о ней даже не стоит и говорить: успешное допущение  $V = \infty$  существенно облегчает для меня введение в обиход кривых бесконечной длины и поверхностей бесконечной площади.

**Наблюдаемое отклонение в поведении выборочной дисперсии изменения цен.** «Тишичные значения», используемые для введения итоговых данных, представляют собой наименее изошренный уровень описательной статистики, однако когда дело доходит до описания изменений цен, обычные итоговые отчеты оказываются необычайно запутанными и абсолютно ненадежными. В самом деле, используя выборочное среднее для измерения параметра сдвига, а выборочное среднеквадратическое значение — для измерения дисперсии, мы обычно руководствуемся убеждением, что эти величины представляют собой «устойчивые» характеристики, которые в конце концов сойдутся к неким общим для всей совокупности значениям. Однако из рисунка, помещен-

ного в моей статье [352], видно, что поведение упомянутых величин в случае цен оказывается чрезвычайно уклончивым:

- А) Значения среднего квадрата, соответствующие различным длинным подвыборкам, часто имеют различный порядок величины.
- Б) При увеличении размера выборки средний квадрат теряет устойчивость. Он начинает беспорядочно метаться то вверх, то вниз, при этом демонстрируя, однако, общую тенденцию к увеличению.
- В) Основной вклад в величину среднего квадрата осуществляется, как правило, всего лишь несколькими квадратами. Если удалить эти так называемые резко отклоняющиеся значения, то оценка дисперсии часто изменяется на порядок.

**Гипотеза о нестационарности.** Эти свойства, взятые в совокупности — как, впрочем, и любое из них в отдельности, — использовались обычно для демонстрации всем интересующимся нестационарности процесса. Мое предварительное контрпредложение заключалось в том, что сам процесс в действительности стационарен, однако при этом чрезвычайно велик неизвестный теоретический второй момент. Если допустить, что этот момент велик, но конечен, то выборочные моменты сходятся согласно закону больших чисел, однако сходятся чрезвычайно медленно, и значение предела этой сходимости не имеет практически никакой реальной ценности.

**Принцип бесконечной дисперсии.** Мое следующее контрпредложение заключалось в объявлении среднего квадрата совокупности бесконечным. Те читатели, кто продирался сквозь настоящее эссе с самого начала, я уверен, давно свыклись с возможностью выбора между «очень большим» и «бесконечным», однако те, кто открыл книгу именно на этом месте, возможно, пребывают в ином расположении духа, — в ином расположении духа пребывали, как выяснилось, и мои читатели в 1962 г. Всякому, кто получил обычное статистическое образование, бесконечная дисперсия представляется в лучшем случае чем-то жутковатым, а в худшем — эксцентричным. В действительности же, если «бесконечное» и отличается чем-то от «очень большого», то, судя по выборочным моментам, эту разницу заметить невозможно. Кроме того, из бесконечной дисперсии величины  $X$  никоим образом не следует, что сама величина  $X$  не может быть конечной, а ее вероятность — равной 1. Например, переменная плотности Коши  $1/\pi(1+x^2)$  почти наверное конечна, однако имеет бесконечную дисперсию и бесконечное математическое ожидание. Таким образом, вопрос о выборе между переменными с очень большой и бесконечной дисперсией не следует решать *a priori*; решение должно зависеть исключительно от того, какой из вариантов окажется более удобен в данном конкретном случае. Что до меня, то я прини-

маю идею бесконечной дисперсии, потому что она позволяет сохранить масштабную инвариантность.

## УСТОЙЧИВАЯ МОДЕЛЬ ЛЕВИ [341]

В работе [341] я сочетаю скейлинговый принцип с вполне приемлемой идеей, суть которой заключается в том, что последовательные изменения цен независимы с нулевым ожиданием; кроме того, я допускаю здесь, что дисперсия ценовых изменений бесконечна. Из краткого математического рассуждения вытекает предположение о том, что изменения цен подчиняются устойчивому распределению Леви, о котором говорится в главах 32, 33 и 39.

Это предположение оказывается справедливым в весьма широком диапазоне. В первых испытаниях [341, 352] мы применяли его ко многим товарным ценам, к некоторым процентным ставкам, а также к курсам кое-каких ценных бумаг XIX века. Позже Фама [136] подтвердил его применимость к колебаниям курсов современных ценных бумаг, а Ролл [498] — к изменениям прочих процентных ставок. Здесь же нам придется удовлетвориться одной-единственной иллюстрацией (рис. 470).

## ПРОГНОЗИРУЮЩАЯ СИЛА МОДЕЛИ

Прогнозирующая сила скейлингового принципа изменения цен базируется на одном важном открытии, которое описано ниже. Для начала построим распределение *среднесуточных* изменений цен за пятилетний период со средней изменчивостью цен. Экстраполируя теперь это распределение на *среднемесячные* изменения цен, мы обнаружим, что его график проходит как раз через точки, соответствующие всевозможным экономическим спадам, депрессии и т. д. Этот график учитывает все наиболее значительные события, произошедшие за почти столетний период в истории весьма непостоянного рынка товаров первой необходимости.

В частности (см. рис. 470), процесс, управляющий изменением цен на хлопок, остается приблизительно стационарным на протяжении относительно долгого рассматриваемого периода. Это поразительное открытие лучше всего представить в два этапа.

**Первый критерий стационарности.** Из рис. 470 видно, что и аналитическая форма процесса изменения цен, и значение  $D$  остаются неизменными. Бесспорно, стоимость денег и прочие подобные вещи претерпели значительные изменения, однако общие тенденции пренебрежимо малы по сравнению с флуктуациями, с которыми мы здесь сталкиваемся.

**Второй критерий стационарности: исправление ошибки, присутствующей на рисунке 470.** Необходимость введения второго критерия стационарности возникла благодаря счастливой случайности. Кри-

вые  $a^+$  и  $b^+$  (равно как и  $a^-$  и  $b^-$ ) на рисунке смещены относительно друг друга по горизонтали. Поскольку смещение в дважды логарифмических координатах соответствует в естественных координатах изменению масштаба, это расхождение привело меня в [341] к тому, что я почти согласился с мнением экономистов, полагавших, что в 1900 г. распределение ценовых изменений было иным, нежели в 1950. Я считал тогда, что распределение сохранило свою форму, но его масштаб изменился (уменьшился, если быть точным).

Однако, как оказалось, в этой моей уступке общественному мнению не было никакой необходимости. Дело в том, что данные, по которым строились кривые  $a^+$  и  $a^-$ , были неверно прочитаны (см. [368]). После внесения необходимых поправок кривые  $a^+$  и  $a^-$  оказались практически тождественны кривым  $b^+$  и  $b^-$ .

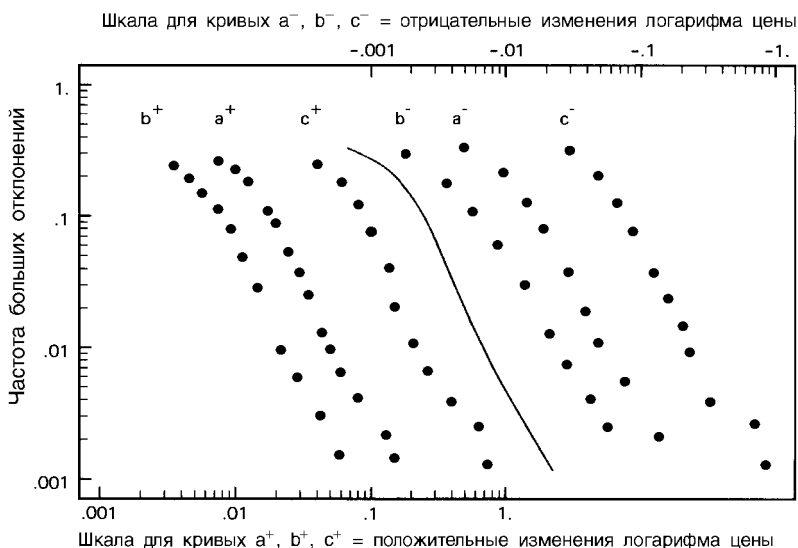
Не буду отрицать: на первый взгляд, приведенные на рисунке данные создают впечатление значительной нестационарности. В действительности это не так, потому что упомянутое первое впечатление будет, скорее всего, сформировано на основе убеждения, что описываемый процесс имеет гауссову природу. Я предлагаю альтернативу нестационарному гауссову процессу — и этой альтернативой является процесс устойчивый и стационарный, но совершенно не гауссов.

## ВЫВОД

Насколько мне известно, ни одна экономическая модель еще не давала прогнозов, сравнимых по успешности с моими. ■

### **Рис. 470. ДАННЫЕ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ НАЛИЧИЕ МАСШТАБНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ В ЭКОНОМИКЕ, ОРИГИНАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ**

К этой старой иллюстрации (которая воспроизводится здесь по [341]) я испытываю особую привязанность (несколько позднее я так же привязался к картинке, которая помещена в настоящем эссе на рис. 379). Здесь на одном графике показаны дважды логарифмические кривые положительных и отрицательных хвостов (больших отклонений) зарегистрированных изменений логарифмов цен на хлопок, а также функция совокупной плотности симметричного устойчивого распределения с показателем  $D = 1,7$  (в действительности этот показатель представляет собой несколько завышенное значение размерности  $D$ ). По ординате откладывается относительная частота случаев, когда изменение одной из определяемых ниже величин  $X$  превышало изменение абсциссы.



Скопируйте эту иллюстрацию на кальку и подвигайте ее по горизонтали. Вы обнаружите, что теоретическая кривая совпадает с любой из эмпирических кривых с точностью до незначительных отклонений общей формы. Именно такой результат и постулируется в моем скейлинговом принципе!

Отклонения вызваны, по большей части, небольшой асимметрией в распределении. Согласно этому важному наблюдению, должны существовать асимметричные варианты устойчивого распределения.

На графике отображены следующие серии данных (положительные и отрицательные значения  $X$  рассматривались в каждом случае отдельно):

- а)  $X = \ln Z(t+1 \text{ день}) - \ln Z(t)$ , где  $Z$  — ежедневный курс на момент закрытия Нью-Йоркской хлопковой биржи, 1900–1905 гг. (Данные предоставлены Министерством сельского хозяйства США.)
- б)  $X = \ln Z(t+1 \text{ день}) - \ln Z(t)$ , где  $Z$  — индекс ежедневных цен на хлопок на различных биржах США на момент закрытия, 1944–1958 гг. (Данные предоставлены Хендриком С. Хаутакером.)
- в)  $X = \ln Z(t+1 \text{ месяц}) - \ln Z(t)$ , где  $Z$  — курс на момент закрытия Нью-Йоркской хлопковой биржи 15 числа каждого месяца, 1880–1940 гг. (Данные предоставлены Министерством сельского хозяйства США.)



## 38 ◊ МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ БЕЗ ГЕОМЕТРИИ

Если когда-либо будут написаны монографии или даже учебники по фракталам, то их авторы, вероятно, поместят главы, посвященные рассмотрению случайных геометрических фигур (весьма деликатный в математическом смысле предмет), после более простых глав, описывающих случайные функции, а начинаться эти книги будут, конечно же, со случайных величин. В настоящем эссе мы поступили иначе, сразу окунувшись с головой в наиболее сложную тему, поскольку тема эта представляет наибольший интерес и дает наибольший простор для развития геометрической интуиции.

Ближайшие родственники фракталов — гиперболические распределения вероятностей. В предыдущих главах мы встречали немало примеров их применения, начиная с гиперболических функций  $\text{Nr}(U > u)$ . Однако многое осталось недосказанным. Эта глава начинается с общих замечаний о предмете, а затем мы рассмотрим некоторые лингвистические и экономические феномены, относительно которых имеются многочисленные и убедительные эмпирические свидетельства, очень хорошо описываемые гиперболическими законами. Рассуждения в обоих случаях одинаковы и представляют масштабную инвариантность и размерность подобия в совершенно «развоплощенном» виде.

Приводимый здесь пример из лингвистики составлял тему моей первой статьи (см. главу 42). Благодаря ему я познакомился с некоторыми полезными приемами — весьма прямолинейными, но в то же время достаточно универсальными. У этого лингвистического примера имеется также и термодинамический аспект, связанный с моим недавним открытием математического аналога отрицательной температуры.

### О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Согласно определению, которое хорошо нам известно, случайная величина (с.в.)  $U$  называется гиперболической, если  $P(u) = \text{Pr}(U > u) = Fu^{-D}$ . Довольно странное, надо сказать, определение, ведь так при любом конечном префакторе  $\sigma$  получается, что  $P(0) = \infty$ , что выглядит сущей нелепостью и определенно указывает на то, что здесь требуется некое особое отношение — как нам хорошо известно, так оно

и есть. В главе 12, например, мы видели, что, когда генератор Коха включает в себя остров, предельная кривая будет включать в себя бесконечное множество островов, причем количество таких, чья площадь превышает некоторую величину  $a$ , будет равно  $\text{Nr}(A > a) = Fa^{-B}$ . Расположим их в порядке уменьшения площади (острова с одинаковой площадью можно располагать в произвольном порядке). Выбрать один такой остров случайным образом с равномерным распределением — значит выбрать случайным образом один порядковый номер из списка островов. Если нам это удастся, то мы с полным правом сможем заменить  $\text{Nr}(A > a)$  на  $\text{Pr}(A > a)$ . Однако в действительности порядковый номер острова представляет собой целое положительное число, а нам известно, что выбрать случайным образом целое положительное число невозможно.

Еще одна знакомая история: из гиперболического распределения следуют прямые условные распределения. Например, условная с. в.  $\{U, \text{если } U > u_0\}$ , что записывается как  $\{U|U > u_0\}$ , удовлетворяет следующему равенству:

$$\text{Pr}\{U > u|U > u_0\} = \begin{cases} 1, & \text{при } u < u_0 \\ (u/u_0)^{-D}, & \text{при } u > u_0 \end{cases}.$$

## ПАРАДОКСЫ ОЖИДАНИЯ

При  $D > 1$  соответствующее математическое ожидание определяется выражением

$$\langle U|U > u_0 \rangle = D(D-1)^{-1}u_0.$$

Это выражение открывает широкий простор для бесчисленных парадоксальных историй. Ниже приведено несколько таких историй; особенно я рекомендую их тем из моих читателей, кто полагает себя трезвомыслящими — только не очень спешите.

**Эффект Линди.** Будущее карьерное ожидание телевизионного комика пропорционально суммарному времени его выступлений в прошлом. *Источник: газета «The New Republic» от 13 июня 1964 г.*

Ключ ищите в следующей истории.

**Притча о кладбище юных поэтов.** В самой унылой части кладбища, там, где покоятся поэты и мыслители, кои скоропостижно скончались в самом расцвете своей юности, каждый памятник увенчан символом потери: половиной книги, огрызком пера или обломком какого-либо инструмента. Старый смотритель кладбища, и сам в юные годы не чуждый поэзии и учености, неустанно повторяет всем посетителям, что эти надгробные символы следует воспринимать не иначе, как совершенно



буквально: «Всякий, кто здесь лежит, — заявляет он, — достиг достаточных успехов и много обещал в будущем; и размеры некоторых памятников отражают величие достижений тех, над чьими останками они возвышаются. Но как же нам оценить обманутые ожидания? Кое-кто из моих подопечных, останься он в живых, смог бы превзойти самих Леонарда Эйлера и Виктора Гюго — пусть не в гении, но хотя бы в плодovitости. Однако большинство из них, увы, оказались бы вскоре покинутыми своими музами. Поскольку в юности достижения и обещания в точности равны между собой, нам должно полагать их равными и в момент скоропостижной кончины».

**Ключ.** **Всякий, кто прекращает свою деятельность в молодости, останавливает на полпути многообещающую карьеру.**

**«Доказательство».** Согласно А. Лотке, распределение количества научных публикаций одного автора является гиперболическим с показателем  $D = 2$ . Это правило основано на таком качественном факте, что большинство людей пишут мало или совсем ничего, однако всегда находится несколько индивидуумов, которые пишут чрезвычайно много. Если упомянутое правило справедливо, то сколько бы человек ни написал в прошлом, можно ожидать, что в будущем он напишет еще, в среднем, столько же. Когда же он, наконец, остановится, ровно половина всех ожидаемых от него трудов так и останется невыполненной.

**Комментарии.** Единственный способ избежать всеобщего разочарования состоит в прекращении трудов в столь пожилом возрасте, чтобы при обчете ожидаемого будущего ожидающим пришлось бы учитывать поправки на возраст. Коэффициент пропорциональности в эффекте Линда равен, разумеется, единице.

**Притча об удаляющемся берегу.** Далеко-далеко отсюда расположен край под названием Земля Десяти Тысяч Озер. Озера эти имеют очень простые названия: Великое, Второе-По-Величине, ...,  $N$ -е-По-Величине и т. д., вплоть до Десятитысячного-По-Величине. Великое озеро представляет собой огромное неведомое море — нет! целый океан — шириной не менее чем 1600 миль; ширина  $N$ -го-По-Величине озера составляет  $1600N^{-0,8}$  миль, а самое маленькое озеро имеет всего лишь милю в поперечнике. Но над озерами всегда стоит плотный туман, не позволяющий видеть дальше, чем на милю, отчего, стоя на берегу, никогда нельзя сказать точно, какое именно озеро простирается перед вашими глазами. На суше нет никаких ориентиров, равно как нет там и местных жителей, к которым путешественник мог бы обратиться с вопросом. Однако если путешественник, стоящий на незнакомом берегу, твердо верит в математическое ожидание, он точно знает, что ожидаемое расстояние до противоположного берега равно в этом случае 5 милям. Путешественник садится в лодку, проплывает некоторое количество миль  $m$ , обнаруживает, что цели он еще не достиг, и подсчи-

тывает новое ожидаемое расстояние до противоположного берега, которое составит уже  $5t$  миль. Не водятся ли в этих озерах дүхи, которые и *впрямь отодвигают* желанный берег от незадачливого путешественника?

**Ключ.** Вышеописанное распределение диаметров озер представляет собой вариант распределения Корчака, с которым мы встречались в главах 12 и 30.

## МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вернемся, однако, к более серьезным вещам. Для того, чтобы получить возможность говорить о масштабнo-инвариантных случайных величинах, следует определить термин «масштабно-инвариантный» без привлечения геометрии. Дело в том, что единственной геометрической фигурой, которую можно поставить в соответствие случайной величине, является точка, а точка на части не делится. В качестве приемлемой замены можно предложить следующий вариант: будем говорить, что случайная величина  $X$  масштабнo-инвариантна при преобразовании  $T(X)$ , если распределения  $X$  и  $T(X)$  тождественны во всех отношениях, кроме масштаба.

Термин «преобразование» понимается здесь в широком смысле: например, сумма двух независимых реализаций случайной величины  $X$  рассматривается как результат преобразования  $X$ . Соответствующие величины следует называть масштабнo-инвариантными при сложении, но мы будем называть их устойчивыми по Леви (см. главы 31, 32 и 39). В главе 39 (с. 501 и 528), кроме того, упоминаются и случайные величины, масштабнo-инвариантные при взвешенном сложении.

**Асимптотический скейлинг. Асимптотически гиперболические С. В.** К счастью, приведенное выше определение вовсе не является столь неопределенным, как может показаться на первый взгляд. При многих преобразованиях, как выясняется, для инвариантности требуется асимптотически гиперболическое распределение. Это означает, что должен существовать некоторый показатель  $D > 0$ , такой, что пределы

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Pr(U < u)u^D \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \Pr(U > u)u^D$$

определены и конечны, причем один из них положителен.

**Распределение Парето.** Термин «асимптотически гиперболическое распределение» можно рассматривать как синоним термина, хорошо знакомого статистикам-экономистам, а именно: *распределение Парето*. Вильфредо Парето — итальянский экономист, который пытался

перевести законы механического равновесия в термины равновесия экономического, однако более прочно его имя запомнят, вероятнее всего, в связи с открытием им одной фундаментальной статистической закономерности: он обнаружил, что в определенных обществах количество индивидуумов с личным доходом  $U$ , превышающим некую большую величину  $u$ , распределяется приблизительно гиперболически, т. е. пропорционально  $u^{-D}$ . (Несколько позже в этой главе мы еще вернемся к распределению доходов.)

## «НОВЫЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ» [342]

Гиперболические законы, аналогичные распределению Парето, были позднее обнаружены во многих отраслях экономики, а на объяснение их столь широкой распространенности потрачены немалые усилия. Однако позвольте мне прежде описать один еретический подход к этой задаче.

В такой области, как экономика, ни в коем случае нельзя забывать о том, что «данные», которыми нам приходится оперировать, представляют собой весьма разнородную смесь. Поэтому распределение данных является результатом совместного действия базового фиксированного «истинного распределения» и в высшей степени изменчивого «фильтра». В [342] я отмечаю, что асимптотически гиперболические распределения с  $D < 2$  очень «крепки» в этом смысле, т. е. многие самые разнообразные фильтры практически не изменяют их асимптотического поведения. С другой стороны, почти все прочие распределения таким свойством *не* обладают. Следовательно, гиперболическое истинное распределение *можно* наблюдать всегда: всевозможные наборы искаженных данных предполагают одно и то же распределение с одинаковым показателем  $D$ . При попытке применить тот же подход к большинству других распределений мы получим «хаотические» несовместимые результаты. Иными словами, практической альтернативой асимптотически гиперболическому распределению является не какое-то другое распределение, но хаос. Поскольку хаотические результаты, как правило, не публикуются (а если публикуются, то не замечаются), факт широкой распространенности асимптотически гиперболических распределений не представляет собой ничего неожиданного и мало может сообщить нам об истинной их распространенности в природе.

## ЗАКОН СЛОВАРНОЙ ЧАСТОТНОСТИ ЦИПФА

Слово есть не что иное, как последовательность «правильных» букв, заканчивающаяся «неправильной» буквой, называемой пробелом. Возьмем образец речи некоего индивидуума и расположим в ряд содержащиеся в этом образце слова по следующему принципу: на первое место

поставим слово, встретившееся в тексте наибольшее количество раз, далее — второе по частоте употребления и т. д., причем слова с одинаковой частотой будем располагать в произвольном порядке. В такой классификации  $\rho$  обозначает порядковый номер (ранг) слова, встречающегося в речи с вероятностью  $P$ , а термин *распределение частотности слов* описывает соотношение между  $\rho$  и  $P$ .

Можно ожидать, что это соотношение подвержено самым беспорядочным изменениям, находящимся в зависимости от языка и индивидуальных особенностей оратора, однако в действительности это не так. Эмпирический закон, обнаруженный Ципфом [615] (о Дж. К. Ципфе смотрите очерк в главе 40), гласит, что соотношение между  $\rho$  и  $P$  «универсально», т. е. независимо от параметров, и имеет следующий вид:

$$P \propto 1/\rho.$$

А во втором приближении, которое я получил теоретически (тщетно пытаюсь теоретически же вывести беспараметрический закон  $P \propto 1/\rho$ ), все различия между языками и индивидуумами свелись к выражению

$$P = F(\rho + V)^{-1/D}.$$

Поскольку  $\sum P = 1$ , параметры  $D$ ,  $F$  и  $V$  оказываются связаны соотношением  $F^{-1} = \sum(\rho + V)^{-1/D}$ .

В совокупности эти параметры служат мерой того, насколько богат словарный запас данного индивидуума.

Основным параметром является показатель  $D$ . Представляется разумным измерять богатство словарного запаса через относительную частоту использования субъектом редких слов: взяв, например, в качестве эталона частоту слова ранга  $\rho = 1000$ , а не слова ранга  $\rho = 10$ . Эта относительная частота возрастает при увеличении  $D$ .

Почему вышеописанному закону присуща такая универсальность? Учитывая, что он почти идеально гиперболический, и принимая во внимание все то, что мы уже успели узнать из настоящего эссе, в высшей степени разумным будет попробовать соотнести закон Ципфа с неким лежащим в его основе скейлинговым свойством. (В 1950 г., когда я впервые столкнулся с этой задачей, такая процедура вовсе не казалась столь очевидной.) Как можно заключить из обозначения, показатель здесь играет свою обычную роль — роль размерности. Вторым параметром является префактор  $F$  (см. главу 34).

## ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ ДЕРЕВЬЯ

В данном случае и впрямь имеется «объект», который можно подвергать преобразованию подобия: назовем этот объект лексикографическим деревом. Прежде всего определим его и опишем, что в данном

контексте имеется в виду под преобразованием подобия. Затем докажем, что в случае масштабной инвариантности лексикографического дерева частотность слов следует приведенному выше двухпараметрическому закону. Далее мы обсудим справедливость объяснения и особо остановимся на интерпретации показателя  $D$  как размерности.

**Деревья.** Лексикографическое дерево имеет  $N + 1$  стволов, пронумерованных от 0 до  $N$ . Первый ствол соответствует «слову», состоящему из одной только «неправильной» буквы — «пробела»; каждый из остальных стволов соответствует одной из  $N$  «правильных» букв. Ствол «пробела» гол, а каждый из остальных стволов несет на себе  $N + 1$  главных ветвей, которые соответствуют пробелу и  $N$  правильным буквам. В следующем поколении ветвь пробела остается голой, а остальные ветви разветвляются, как и прежде, на  $N + 1$  меньших ветвей. То есть пустой конец каждой ветви пробела соответствует слову, состоящему из правильных букв, за которым следует пробел. Построение продолжается до бесконечности. На конце каждой пустой ветви вырезана вероятность употребления соответствующего слова. На конце же непустой ветви вырезана полная вероятность употребления слов, которые начинаются с последовательности букв, определяющей данную ветвь.

**Масштабно-инвариантные деревья.** Дерево можно назвать *масштабно-инвариантным*, если каждая взятая в отдельности ветвь представляет собой в некотором роде уменьшенную копию всего дерева. Усечение такого дерева означает, почти буквально, отсечение от него какой-либо ветви. Отсюда выводим наше первое заключение — ветвление масштабно-инвариантного дерева не должно иметь каких-либо пределов. В частности, неразумно — хотя на неподготовленный взгляд это совсем не очевидно — пытаться измерить богатство словарного запаса исчислением общего количества различных слов. (Почти каждый из нас «знает» настолько больше слов, чем употребляет в речи, что словарный запас среднего человека практически бесконечен.) Далее можно определить (соответствующее рассуждение мы опустим) вид, какой принимает вероятность  $P$  пустой ветви  $k$ -го уровня, т. е. растущая над  $k$  «живыми» ветвями.

**Получение обобщенного закона Ципфа в простейшем случае.** [323, 350, 358]. Простейшее масштабно-инвариантное дерево соответствует повествованию, которое представляет собой последовательность статистически независимых букв, причем вероятность употребления каждой правильной буквы составляет  $r < 1/N$ , а вероятность употребления неправильной буквы «пробела» равна остатку  $(1 - Nr)$ . В этом случае  $k$ -й уровень обладает следующими свойствами:

$$P = (1 - Nr)r^k = P_0 r^k,$$

а величина  $\rho$  заключена между границей

$$1 + N + N^2 + \dots + N^{k-1} = (N^k - 1)/(N - 1)$$

(исключая саму границу) и границей

$$(N^{k+1} - 1)/(N - 1)$$

(включая границу). Записав

$$D = \ln N / \ln(1/r) < 1 \quad \text{и} \quad V = 1/(N - 1)$$

и подставив в каждое граничное выражение

$$k = \ln(P/P_0) / \ln r,$$

получим

$$P^{-D} P_0^D - 1 < \rho/V \leq N(P^{-D} P_0^D) - 1.$$

Искомый результат находим, аппроксимируя  $\rho$  с помощью среднего значения его границ.

**Обобщение.** Можно построить и более сложные масштабно-инвариантные деревья, соответствующие последовательностям букв, порождаемым другими стационарными случайными процессами (марковскими цепями, например) и разделенными впоследствии пробелами на слова. Рассуждение становится более сложным [326], однако результат остается неизменным.

**Обратное утверждение.** Следует ли из данных Ципфа, что лексикографическое дерево, построенное из обычных букв, является масштабно-инвариантным? Разумеется, нет: многие короткие последовательности никогда не встречаются в языке, в то же время многие длинные последовательности употребляются довольно широко. Следовательно, реальные лексикографические деревья далеки от строгой масштабной инвариантности, однако вышеприведенное рассуждение, по сути, достаточно хорошо объясняет, почему выполняется обобщенный закон Ципфа. Можно также упомянуть и о том, что закон Ципфа первоначально рассматривался как весьма многообещающий вклад в лингвистику — впрочем, как показывает мое объяснение, с лингвистической точки зрения закон этот очень поверхностен.

$\triangleleft$  Обобщенный закон Ципфа также выполняется внутри определенных ограниченных словарных составов. Например, специалисты в области одной эзотерической дисциплины, называемой агриантропонимией и занимающейся исследованием случаев использования имен святых для именованья обычных людей (см. [322]), установили, что к таким именам закон Ципфа вполне применим. Кроме того, Теньер [566] обнаружил, что закон Ципфа применим и к фамилиям. Означает ли это, что соответствующие деревья масштабно-инвариантны?  $\blacktriangleright$

**Показатель  $D$  есть фрактальная размерность.** Мы заметили, что показатель  $D$  формально является фрактальной размерностью. Это наблюдение не столь поверхностно, как может показаться. В самом деле, если перед *словом* (в том виде, в каком мы его определили) поставить десятичную запятую, то это слово окажется ничем иным, как числом в интервале от 0 до 1, записанным в системе счисления с основанием  $(N + 1)$  и содержащим нули только в конце. Отметим такие числа на интервале  $[0, 1]$  и добавим сюда предельные точки этого множества. Построение, в сущности, сводится к удалению из интервала  $[0, 1]$  всех чисел, содержащих нули в иных, кроме конца, позициях. В результате получаем канторову пыль, фрактальная размерность которой в точности равна  $D$ .

Что же касается других, отличных от простейших, масштабно-инвариантных лексикографических деревьев, к которым мы обращались выше за обобщенным доказательством закона Ципфа, то они аналогичным образом соответствуют обобщенным канторовым множествам с размерностью  $D$ . Уравнение для  $D$  в [326] представляет собой матричное обобщение определения размерности подобия с помощью равенства  $Nr^D = 1$ .

**Дальнейшее обобщение: случай  $D > 1$ .** Любопытно, что условие  $D < 1$  вовсе не является универсальным. Примеры, в которых обобщенный закон Ципфа выполняется, но оценка размерности  $D$  удовлетворяет неравенству  $D > 1$ , весьма редки, однако несомненно имеют место. Для описания роли особого значения  $D = 1$  допустим, что закон  $P = F(\rho + V)^{-1/D}$  выполняется только до некоторого значения  $\rho = \rho^* \leq \infty$ . При  $D < 1$  не возникает никаких трудностей с составлением бесконечных словарей, предполагаемых вышеприведенными теоретическими рассуждениями. Однако при  $D \geq 1$  бесконечный ряд  $\sum(\rho + V)^{-1/D}$  расходится. Следовательно, согласно условиям  $\sum P = 1$  и  $F > 0$ , величина  $\rho^*$  должна быть конечна, т.е. словарь должен содержать *конечное* число слов.

В самом деле, размерность  $D > 1$ , как выясняется, встречается только в тех случаях, когда словарь противоположным образом ограничен какими-то внешними искусственными средствами (как, например, в случае вставок латинским шрифтом в нелатинский текст). Такие особые случаи рассматриваются в моих статьях, посвященных этой теме. Поскольку построение, ограниченное конечным количеством точек, не может дать фрактального множества, величину  $D > 1$  не следует интерпретировать как фрактальную размерность.

## ТЕМПЕРАТУРА ПОВЕСТВОВАНИЯ

Вышеописанные отклонения допускают на мгновение совершенно иную интерпретацию, идею которой мы позаимствовали в статистиче-

ской термодинамике. Аналогами физической энергии и физической энтропии послужат стоимость кодирования и информация Шеннона. А показатель  $D$  выступит в роли «температуры повествования». Чем «горячее» речь, тем больше вероятность употребления редких слов.

Случай  $D < 1$  соответствует стандартному случаю, в котором формальный эквивалент энергии не ограничен сверху.

С другой стороны, случай, в котором слова настолько «горячи», что это приводит в результате к  $D > 1$ , предполагает в высшей степени необычное наличие у энергии конечной верхней границы.

Вскоре после того, как я описал эту резкую дихотомию в терминах лингвистической статистики, независимо от меня был найден ее физический аналог. Обратная физическая температура  $1/\theta$  имеет наименьшее значение — и даже обращается в нуль, — когда тело нагрето до наивысшей температуры. Норман Рэмзи предположил, что если тело подвергать дальнейшему нагреву, величина  $1/\theta$  должна стать отрицательной. Обсуждению этого параллелизма посвящена моя статья [360].

В термодинамике объемные свойства объектов выводятся на основании микроканонической равновероятности. Поскольку молекулы мы в лицо не различаем, допущения касательно их возможных состояний не вызывают у нас сильных эмоций, однако слова обладают ярко выраженной индивидуальностью, поэтому при изучении языка допущение о равновероятности вряд ли будет иметь успех.

◀ Предыдущая аналогия становится особенно уместной в рамках определенных обобщенных подходов к термодинамике. Рискую заслужить обвинение в чрезмерном цитировании работ, имеющих лишь косвенное отношение к настоящему эссе, все же скажу: один из таких формализмов я рассматривал в статьях [339, 344]. ▶

## ЗАКОН ДОХОДОВ ПАРЕТО

Еще один пример абстрактного масштабнo-инвариантного дерева можно обнаружить в организационных структурах иерархических групп людей. Признаками простейшей масштабнo-инвариантной иерархии являются следующие: а) ее члены распределены по уровням таким образом, что каждый член (за исключением тех, что находятся на самом нижнем уровне) имеет одинаковое количество  $N$  подчиненных; б) все подчиненные каждого члена иерархии имеют одинаковый «вес»  $U$ , который равен весу непосредственного начальника, умноженному на коэффициент  $r < 1$ . Наиболее удобно рассматривать в качестве этого веса доход.

Если нам нужно сравнить различные иерархии с точки зрения неравенства доходов, то можно классифицировать их членов в порядке уменьшения дохода (члены с одинаковым доходом размещаются в про-



извольном порядке), обозначить каждого индивидуума его порядковым номером в этом ряду (рангом  $\rho$ ) и определить скорость уменьшения дохода в ряду как функцию от ранга, или наоборот. Чем быстрее происходит уменьшение дохода при увеличении ранга, тем больше неравенство.

Здесь без каких бы то ни было изменений применим формализм, использованный в законе Ципфа: ранг  $\rho$  индивидуума с доходом  $U$  приблизительно равен:

$$\rho = -V + U^{-D} F^D.$$

Это соотношение было выведено Лайдаллом в [321].

Степень неравенства определяется, в основном, показателем

$$D = \ln N / \ln(1/r),$$

который, судя по всему, не имеет никакого достойного обсуждения фрактального смысла. Чем больше формальный показатель  $D$ , тем больше значение  $r$ , и тем ниже степень неравенства.

Как и в случае частотности словоупотребления, модель можно обобщить, допустив, что в пределах некоторого данного уровня  $k$  значение  $U$  варьируется от индивидуума к индивидууму, т. е. что  $U$  равно произведению величины  $r^k$  на некоторый случайный множитель, одинаковый для всех. При таком обобщении изменяются параметры  $V$  и  $P_0$  — и, как следствие,  $D$ , — однако основное соотношение остается неизменным.

Заметим, что эмпирический показатель  $D$  обычно близок к 2. Построим график для тех случаев, когда он в точности равен 2, откладывая при этом обратный доход на оси, направленной вниз. В результате мы получим правильную пирамиду (т. е. длина ее основания будет равна квадрату ее высоты). Доход вышестоящего индивидуума здесь составляет геометрическое среднее между совокупным доходом всех его подчиненных и доходом одного отдельно взятого подчиненного.

**Критика.** Когда  $D = 2$ , наименьшее значение  $1/r$ , равное  $\sqrt{2}$ , возникает при  $N = 2$ . Это наименьшее значение неправдоподобно велико, из чего можно заключить, что модель Лайдалла справедлива только для иерархий, в которых  $D > 2$ . Если это так, то тот факт, что показатель  $D$  обычно близок к 2, может означать, что различия в доходах *внутри* иерархий бледнеют в сравнении с различиями в доходах *между* иерархиями, не говоря уже о различиях внутри групп, не обладающих иерархической структурой.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНЫХ ДОХОДОВ

Более широкое исследование распределения доходов, предпринятое в [333, 335, 337], послужило источником вдохновения для работы, уже описанной в главе 37.



## 39 $\diamond$ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ И ДОПОЛНЕНИЯ

В этой главе собраны сложные формулы, математические определения и иные сведения, не вошедшие в основной текст; сюда же помещены некоторые математические и другие дополнения.

### СОДЕРЖАНИЕ

- Аффинность (само-) и самоподобие (с. 483)
- Броуновские фрактальные множества (с. 484)
- Масштабная инвариантность при усечении (с. 493)
- Музыка и масштабная инвариантность (с. 494)
- Нелакунарные фракталы (с. 495)
- Потенциалы и емкости. Размерность Фростмана (с. 504)
- Размерность и покрытие множества (или его дополнения) шарами (с. 506)
- Размерность подобия: некоторые тонкости (с. 510)
- Размерность Фурье и эвристика (с. 510)
- Статистический анализ с применением нормированного размаха  $R/S$  (с. 512)
- Стационарность. Степени стационарности (с. 515)
- Устойчивые по Леви случайные величины и функции (с. 519)
- Фракталы (определение) (с. 528)
- Функция Вейерштрасса и родственные ей функции. Ультрафиолетовая и инфракрасная катастрофы (с. 530)
- Характеристическая и кохарактеристическая функции (с. 534)
- Хаусдорфова мера и размерность Хаусдорфа–Безиковича (с. 535)
- Эвристика Липшица–Гёльдера (с. 540)

## АФФИННОСТЬ (САМО-) И САМОПОДОБИЕ

Термины *самоподобный* и *самоаффинный* (неологизм) применяются в тексте и к ограниченным, и к неограниченным множествам (не внося, смею надеяться, двусмысленности). Во многих описаниях турбулентности, равно как и в моих ранних работах, термин *самоподобный* употребляется в «общем» смысле, включая в себя и понятие самоаффинности, однако в настоящем эссе общее значение оставлено лишь за термином *масштабно-инвариантный*.

### 1. САМОПОДОБИЕ

*Преобразование подобия* представляет собой преобразование в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^E$ , определяемое вещественным коэффициентом  $r > 0$ . При таком преобразовании точка  $x = (x_1, \dots, x_\delta, \dots, x_E)$  переходит в точку  $r(x) = (rx_1, \dots, rx_\delta, \dots, rx_E)$ , а множество  $\mathcal{S}$ , соответственно, в множество  $r(\mathcal{S})$  (см. [235]).

**Ограниченные множества.** Ограниченное множество  $\mathcal{S}$  *самоподобно* (относительно коэффициента  $r$  и целого числа  $N$ ), если  $\mathcal{S}$  представляет собой объединение  $N$  непересекающихся подмножеств, каждое из которых конгруэнтно множеству  $r(\mathcal{S})$ . Термин *конгруэнтно* означает «тождественно с точностью до смещения и/или/поворота».

Ограниченное множество  $\mathcal{S}$  *самоподобно* (относительно массива коэффициентов  $r^{(1)} \dots r^{(N)}$ ), если  $\mathcal{S}$  представляет собой объединение  $N$  непересекающихся подмножеств, соответственно конгруэнтных  $r^{(n)}(\mathcal{S})$ .

Ограниченное случайное множество  $\mathcal{S}$  *статистически самоподобно* (относительно коэффициента  $r$  и целого числа  $N$ ), если  $\mathcal{S}$  представляет собой объединение  $N$  непересекающихся подмножеств, каждое из которых имеет вид  $r(\mathcal{S}_n)$ , где  $N$  множеств  $\mathcal{S}_n$  конгруэнтны по своему распределению множеству  $\mathcal{S}$ .

**Неограниченные множества.** Неограниченное множество  $\mathcal{S}$  *самоподобно* относительно коэффициента  $r$ , если множество  $r(\mathcal{S})$  конгруэнтно множеству  $\mathcal{S}$ .

### 2. САМОАФФИННОСТЬ

*Аффинное преобразование* в евклидовом  $E$ -мерном пространстве определяется совокупностью положительных вещественных коэффициентов  $r = (r_1 \dots r_\delta \dots r_E)$ . При этом преобразовании каждая точка  $x = (x_1 \dots x_\delta \dots x_E)$  переходит в точку

$$r(x) = r(x_1 \dots x_\delta \dots x_E) = (x_1 r_1 \dots x_\delta r_\delta \dots x_E r_E),$$

а множество  $\mathcal{S}$ , как следствие, переходит в множество  $r(\mathcal{S})$ .

**Ограниченные множества.** Ограниченное множество  $\mathcal{S}$  *самоаффинно* (относительно вектора коэффициентов  $r$  и целого числа  $N$ ), если  $\mathcal{S}$  представляет собой объединение  $N$  непересекающихся подмножеств, каждое из которых конгруэнтно множеству  $r(\mathcal{S})$ .

**Неограниченные множества.** Неограниченное множество  $\mathcal{S}$  *самоаффинно* относительно вектора коэффициентов  $r$ , если множество  $r(\mathcal{S})$  конгруэнтно множеству  $\mathcal{S}$ .

Вышеприведенное определение часто применяется при следующих условиях: а) множество  $\mathcal{S}$  представляет собой график функции  $X(t)$  из скалярного времени  $t$  в  $(E-1)$ -мерный евклидов вектор; б)  $r_1 = \dots = r_\delta \dots = r_{E-1} = r$ ; в)  $r_E \neq r$ . В этом случае прямое определение выглядит следующим образом: вектор-функция  $X(t)$  от времени *самоаффинна* (относительно показателя  $\alpha$  и фокального времени  $t_0$ ), если существует некоторый показатель  $\ln r_E / \ln r = \alpha > 0$  — такой, что при любом  $h > 0$  функция  $h^{-\alpha} X[h(t-t_0)]$  независима от  $h$ .

**Полуустойчивость по Ламперти.** Случайные неограниченные самоаффинные множества называются в работах Ламперти [283, 285] *полуустойчивыми*.

**Аллометрия.** В главе 17 мы отмечали, что при изменении высоты дерева (имеется в виду дерево растительного происхождения) в  $r$  раз диаметр его ствола изменяется в  $r^{3/2}$  раз. Скажем больше: представляющие точки, координаты которых и определяют различные линейные меры деревьев, аффинны друг другу. Биологи называют такие фигуры *аллометрическими*.

## БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

Вследствие большого разнообразия всевозможных броуновских множеств, возникает необходимость по возможности в строгой (а иногда и весьма громоздкой) терминологии.

### 1. БРОУНОВСКАЯ ФУНКЦИЯ ИЗ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

Этим термином обозначается *классическое обыкновенное броуновское движение*, иначе называемое *функцией Винера*, *функцией Башелье* или *функцией Башелье–Винера–Леви*. Приводимое ниже громоздкое определение позволяет легко классифицировать различные обобщения такой функции.

**Допущения.** А) Временная переменная  $t$  есть вещественное число. Б) Пространственная переменная  $x$  есть вещественное число. В) Параметр  $H$  равен  $1/2$ . Г) Вероятность  $\text{Pr}(X < x)$  задается функцией ошибок  $\text{erf}(x)$ , которая представляет собой распределение приведенной гауссовой случайной величины с  $\langle X \rangle = 0$  и  $\langle X^2 \rangle = 1$ .

**Определение.** Броуновская функция из прямой в прямую  $B(t)$  есть случайная функция, такая, что при любых  $t$  и  $\Delta t$  верно следующее:

$$\Pr([B(t + \Delta t) - B(t)]/|\Delta t|^H < x) = \operatorname{erf}(x)$$

**Белый гауссов шум.** Функция  $B(t)$  непрерывна, но не дифференцируема. Это означает, что производная  $B'(t)$  не существует в виде обыкновенной функции, а представляет собой обобщенную функцию (распределение Шварца). Называется эта производная *белым гауссовым шумом*. Можно записать функцию  $B(t)$  как интеграл  $B'(t)$ .

**Самоаффинность.** Понятие распределения вероятностей применимо не только к случайным величинам, но и к случайным функциям. Если положить  $B(0) = 0$ , то распределение вероятностей нормированной функции  $t^{1/2}B(ht)$  не зависит от  $t$ . Такая масштабная инвариантность является проявлением *самоаффинности*.

**Спектр.** С точки зрения спектрального или гармонического анализа, спектральная плотность функции  $B(t)$  пропорциональна  $f^{-1-2H}$ , т. е.  $f^{-2}$ . Однако смысл спектральной плотности  $f^{-2}$  требует особого рассмотрения, так как функция  $B(t)$  нестационарна, а обычная теория ковариантности и спектра Винера–Хинчина имеет дело со стационарными функциями. Поэтому о спектрах мы поговорим позже — в разделе, посвященном функции Вейерштрасса.

**Недифференцируемость.** Функция  $B(t)$  непрерывна, но не дифференцируема. Рассмотрение недифференцируемости я также предлагаю отложить до раздела ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА.

**Литература.** Труды Леви [304] и [306] отличаются очень характерным стилем и загадочным изяществом, что уже создало им определенную репутацию в научных кругах (см. главу 40). Однако по глубине интуиции и простоте изложения им и сейчас нет равных.

Появившиеся в последнее время деловитые работы, рассчитанные исключительно на нужды отдельных и весьма разнообразных групп математиков, ученых и инженеров, слишком многочисленны, чтобы их здесь перечислять, однако хотелось бы отметить весьма многообещающую монографию Найта [270]. (К сожалению, автор предпочел не включать в книгу «результатов по хаусдорфовой размерности или мере выборочных траекторий, какими бы изящными они ни были, так как для них, судя по всему, не находится никаких областей приложения [!], и... [они] не представляются насущно необходимыми для общего понимания непосредственно прикладного материала. С другой стороны, надо признать, что такие особенности, как недифференцируемость выборочных траекторий в любой их точке, и в самом деле дают определенное представление об иррегулярности этих траекторий».)

## 2. ОБОБЩЕННЫЕ БРОУНОВСКИЕ ФУНКЦИИ

Любое из упомянутых в предыдущем разделе допущений можно естественным образом обобщить, а любой процесс, получаемый в результате обобщения одного или нескольких допущений, существенно отличается от исходной функции  $B(t)$  и находит весьма серьезные области приложения.

- А) Вещественное (скалярное) время  $t$  можно заменить точкой в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^E$  (где  $E > 1$ ) либо точкой на окружности или на сфере.
- Б) Вещественную (скалярную) величину  $X$  можно заменить точкой в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^E$  (где  $E > 1$ ) либо точкой на окружности или на сфере.
- В) Параметру  $H$  можно присвоить иное, нежели  $1/2$ , значение. Гауссово распределение erf допускает любое значение параметра  $H$  из интервала  $0 < H < 1$ .
- Г) Гауссово распределение erf можно заменить одним из негауссовых распределений, рассматриваемых в разделе УСТОЙЧИВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ ЛЕВИ.

Кроме того, функцию  $B(t)$  можно обобщить через ее представление в виде белого шума. Эта процедура дает существенно иные результаты.

## 3. ИСКЛЮЧЕНИЕ ТРЕНДА

Разброс броуновской функции из прямой в прямую  $B(t)$  в интервале от  $t = 0$  до  $t = 2\pi$  можно разбить на две части: а) тренд, определяемый выражением  $B^*(t) = B(0) + (t/2\pi)[B(2\pi) - B(0)]$ , и б) осциллирующий остаток  $B_B(t)$ . В случае броуновской функции  $B(t)$  эти члены оказываются статистически независимыми.

**Тренд.** График тренда  $B^*(t)$  представляет собой прямую, угловой коэффициент наклона которой является случайной гауссовой величиной.

**Броуновский мост.** «Лишенный тренда» осциллирующий член  $B_B(t)$  тождествен по своему распределению *броуновскому мосту*, определяемому как броуновская функция из прямой в прямую, ограниченная условием  $B(2\pi) = B(0)$ .

**Ошибочное исключение тренда.** Сталкиваясь с выборками неизвестного происхождения, многие статистики-практики, работающие в экономике, метеорологии и других подобных областях, спешат разбить их на тренд и осцилляцию (и еще добавочные периодические члены). Тем самым они имплицитно допускают, что получаемые при этом слагаемые можно приписать различным порождающим механизмам, и что эти слагаемые статистически независимы.

Последнее допущение можно признать обоснованным только в том случае, если выборка порождена броуновской функцией  $B(t)$ .

#### 4. БРОУНОВСКИЕ ФУНКЦИИ ИЗ ОКРУЖНОСТИ В ПРЯМУЮ

**Броуновский мост с петлями.** Возьмем периодическую функцию от  $t$ , которая на временном промежутке  $0 < t \leq 2\pi$  совпадает с броуновским мостом  $B_B(t)$ , и выберем случайным образом (равномерно) приращение  $\Delta t$  на интервале  $[0, 2\pi[$ . Функция  $B_B(t + \Delta t)$  статистически стационарна (см. раздел СТАЦИОНАРНОСТЬ) и может быть представлена как случайный ряд Фурье – Броуна – Винера. Коэффициентами являются независимые гауссовы случайные величины, причем их фазы полностью случайны, а модули пропорциональны  $n^{-1}$ . Иными словами, дискретный спектр пропорционален  $n^{-2}$  (т. е.  $f^{-2}$ ), а совокупная спектральная энергия в области частот, превышающих  $f$ , пропорциональна  $f^{-1}$ .

**Практическое следствие, касающееся моделирования.** Моделирование функции  $B(t)$  неизбежно производится на конечном временном промежутке. Если в качестве такого промежутка взять интервал  $[0, 2\pi[$ , то можно использовать при моделировании дискретные конечные методы Фурье. Сначала с помощью быстрого преобразования Фурье вычисляется броуновский мост, а затем добавляется необходимый случайный тренд.

**Литература.** Книга Пейли и Винера [461] знаменита своей неумолимой алгеброй. Однако в главах IX и X этой книги имеются очень основательные пояснительные параграфы, которые, несомненно, стоит прочесть. Могу порекомендовать также монографию Каана [248], но только математикам, так как полученные в ней результаты простыми словами не объясняются.

**Броуновский мост с нечетными петлями.** Функции  $B_O(t) = 1/2[B_B(t) - B_B(t + \pi)]$  и  $B_E(t) = 1/2[B_B(t) + B_B(t + \pi)]$  представляют собой суммы гармонических составляющих мостовой функции  $B_B(t)$  с нечетными и с четными номерами, соответственно. Достоинство нечетной суммы состоит в том, что ее можно получить непосредственно из белого гауссова шума  $B'(t)$ , построенного на окружности:

$$B_O(t) = \int_{-\pi}^0 B'(t-s) ds - \int_0^{\pi} B'(t-s) ds.$$

**Броуновская функция из прямой в окружность.** Возьмем броуновскую функцию  $B(t)$ , отбросим ее целую часть и умножим дробный остаток на  $2\pi$ . Результат определяет положение точки на единичной окружности. Эта броуновская функция из прямой в окружность упоминается здесь в основном для того, чтобы никто не перепутал ее с какой-либо из вышеописанных, весьма отличных от нее, функций.

## 5. ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ ФУНКЦИИ ИЗ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

Для определения этой функции (обозначим ее  $B_H(t)$ ) возьмем обыкновенную броуновскую функцию из прямой в прямую и изменим значение показателя  $H$  с  $1/2$  на любое вещественное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < H < 1$ . Функции с  $H \neq 1/2$  оказываются *воплне дробными*.

Все функции  $B_H(t)$  непрерывны и недифференцируемы. Самое раннее упоминание о них я нашел в статье Колмогорова [275] 1940 г. Ссылки на другие разрозненные источники, а также описание различных свойств этих функций собраны в [404]. См. также [292].

**Корреляция и спектр.** Очевидно, что  $\langle [B_H(t+\Delta t) - B_H(t)]^2 \rangle = |\Delta t|^{2H}$ . Спектральная плотность функции  $B_H(t)$  пропорциональна  $f^{-2H-1}$ . Показатель не является целым числом — в этом и заключается одна из нескольких причин, побудивших меня предложить для обозначения функций  $B_H(t)$  термин *дробные*.

**Дискретный дробный гауссов шум.** Этот шум определяется как последовательность приращений функции  $B_H(t)$  на последовательных единичных временных интервалах. Его корреляция равна

$$2^{-1} [|d+1|^{2H} - 2|d|^{2H} + |d-1|^{2H}].$$

**Долгосрочные корреляции. Персистентность и антиперсистентность.** Положим  $B_H(0) = 0$  и определим предыдущее приращение как  $-B_H(-t)$ , а последующее приращение как  $B_H(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \langle -B_H(-t) B_H(t) \rangle &= \\ &= 2^{-1} \{ \langle [B_H(t) - B_H(-t)]^2 \rangle - 2 \langle [B_H(t)]^2 \rangle \} = \\ &= 2^{-1} (2t)^{2H} - t^{2H}. \end{aligned}$$

Разделив результат на  $\langle B_H(t)^2 \rangle = t^{2H}$ , получим корреляцию, которая оказывается независимой от  $t$ : она равна  $2^{2H-1} - 1$ . В классическом случае  $H = 1/2$  корреляция, как и ожидалось, обращается в нуль. При  $H > 1/2$  корреляция положительна, выражает *персистентность* и при  $H = 1$  возрастает до единицы. При  $H < 1/2$  корреляция отрицательна, выражает *антиперсистентность* и при  $H = 0$  уменьшается до  $-1/2$ .

То, что эта корреляция не зависит от  $t$  и в тех случаях, когда она не обращается в нуль, является очевидным следствием самоаффинности функции  $B_H(t)$ .

Однако при изучении случайности многие начинают с того, что очень удивляются и /или/ даже расстраиваются, впервые столкнувшись с тем фактом, что корреляции прошедших и будущих событий могут быть независимы от времени, не обращаясь при этом в нуль.



**Практическое следствие для моделирования.** При генерации случайной функции для всех целочисленных значений времени в интервале от  $t = 0$  до  $t = T$  выбор алгоритма, как правило, не зависит от значения  $T$ ; алгоритм выбирают заранее, а затем выполняют его требуемое количество раз. Алгоритмы, необходимые для генерации дробных броуновских функций, имеют существенное отличие: они неизбежно зависят от  $T$ .

Описание быстрого генератора дискретных приращений функции  $B_H(t)$  есть в моей статье [364]. (В эту статью вкралась одна весьма досадная опечатка: в первой дроби на с. 545 следует убрать из числителя единицу и поместить ее перед всей дробью.)

**Фрактальные размерности.** Для графика  $D = 2 - H$ . Для нуля-множества и других множеств уровня  $D = 1 - H$ . См. [3].

## 6. ДРОБНАЯ БРОУНОВСКАЯ ФУНКЦИЯ ИЗ ОКРУЖНОСТИ ИЛИ ТОРА В ПРЯМУЮ

Дробные броуновские функции из окружности в прямую гораздо более изощрены, чем функции, описанные в подразделе 4. Простейшая из них представляет собой сумму *дробного ряда Фурье – Броуна – Винера*, который, по определению, имеет независимые гауссовы коэффициенты и полностью случайные фазы, причем модули коэффициентов пропорциональны  $n^{-H-1/2}$ . Дробная броуновская функция из тора в прямую представляет собой сумму двойного ряда Фурье с такими же свойствами.

**Предостережение.** Исходя из поверхностной аналогии, можно предположить, что дробную броуновскую функцию из окружности в прямую можно получить с помощью процесса, применимого и в недробном случае: образовать тренд  $B_H^*(t)$  дробной броуновской функции из прямой в прямую, затем исключить этот тренд из функции  $B_H(t)$  и повторением получить периодическую функцию.

К сожалению, полученная таким образом периодическая функция и сумма ряда Фурье с коэффициентами  $n^{-H-1/2}$  суть *разные* случайные функции. В частности, ряд Фурье *стационарен*, в то время как многократно повторенная функция  $B_H(t)$  с исключенным трендом — *нет*. Например, на некотором малом интервале по обе стороны от  $t = 0$  многократно повторенный мост с исключенным трендом объединяет два непоследовательных подучастка функции  $B_H(t)$ . Ограничения, имеющегося в определении моста, вполне достаточно для того, чтобы объединенный участок оказался непрерывным, но совершенно не достаточно для того, чтобы сделать его стационарным. Такой участок, к примеру, совсем *не* тождествен по своему распределению некоторому

малому участку, составленному из последовательных подучастков по обе стороны от точки  $t = \pi$ .

**Замечания по моделированию.** Вычислить дробную броуновскую функцию из прямой в прямую с помощью конечных дискретных методов Фурье теоретически невозможно; на практике же это вполне осуществимо, однако требует немалой сноровки. Наиболее прямолинейная процедура заключается в следующем: а) вычисляем соответствующую функцию из окружности в прямую, б) отбрасываем ее за исключением ограниченного участка, соответствующего малому подынтервалу периода  $2\pi$  (скажем,  $0 < t < t^*$ ) и в) прибавляем к результату отдельно вычисленную низкочастотную составляющую. При  $H \rightarrow 1$  значение  $t^*$  должно стремиться к нулю.

**Фрактальные размерности.** Для полного графика  $D = 2 - H$  (см. [457]). Когда множество уровня непусто,  $D = 1 - H$ . Этот результат приводится в [412] (усиливая теорему 5 (с. 146) [248]).

**Критический переход при  $H = 1$ .** Дробный ряд Фурье–Броуна–Винера с независимыми гауссовыми коэффициентами, пропорциональными  $n^{-1/2-H}$ , сходится в непрерывную сумму при всех  $H > 0$ . Когда значение параметра  $H$  пересекает единицу, сумма становится дифференцируемой. Что касается дробного броуновского процесса, то он определен лишь до  $H = 1$ . Различие в диапазоне допустимых значений параметра  $H$  может служить подтверждением того, что эти два процесса существенно отличаются друг от друга. Это различие также предполагает, что физические критические переходные феномены можно моделировать с помощью броуновских функций из прямой в прямую, но никак не с помощью броуновских функций из окружности в прямую.

## 7. ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ СЛЕДЫ ИЗ ПРЯМОЙ ИЛИ ОКРУЖНОСТИ В ПРОСТРАНСТВО

В случае функции из окружности в пространство с  $H < 1$  размерность следа равна  $\min(E, 1/H)$ . Этот вывод является частью теоремы 1 (с. 143) [248].

## 8. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Для преобразования броуновской функции из прямой в прямую  $B(t)$  в дробную функцию  $B_H(t)$  проще всего записать

$$B_H(t) = [\Gamma(H + 1/2)]^{-1} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s).$$

Этот интеграл расходится, однако приращения вида  $B_H(t) - B_H(0)$  являются сходящимися. Он представляет собой подвижное среднее ядра  $(t - s)^{H-1/2}$  — классическое, хотя и несколько туманное преобразование, известное адептам чистой математики под именем *дробного интеграла* или *дифференциала Римана–Лиувилля* порядка  $H + 1/2$ .

**Эвристика.** Идея отсутствия необходимости в целочисленном порядке интегрирования и /или/ дифференцирования наиболее доходчиво объясняется в терминах спектрального анализа. В самом деле, обычное интегрирование некоторой периодической функции эквивалентно умножению коэффициентов Фурье этой функции на  $1/n$ , а обычное интегрирование непериодической функции эквивалентно умножению ее преобразования Фурье (если оно определено) на  $1/f$ . Следовательно, операция, при которой преобразование Фурье умножается на *дробную степень*  $(1/f)^{H+1/2}$ , может быть с полным правом названа *дробным интегро-дифференцированием*. Так как спектр белого шума имеет вид  $f^{-0}$ , спектр функции  $B_H(t)$  можно записать в виде  $(1/f)^{2(H+1/2)} = f^{-2H-1}$  (как и было заявлено).

**Литература.** Преобразование Римана–Лиувилля применяется и во многих других, самых разнообразных, областях (см. [616], II, с. 133, [456], [503], [291]). О менее известном приложении этого преобразования к теории вероятности (с отсылками к Колмогорову [275]) можно прочесть в [404].

**Влияние на гладкость.** Когда порядок  $H - 1/2$  преобразования Римана–Лиувилля положителен, оно представляет собой дробную форму интегрирования, поскольку увеличивает гладкость функции. Гладкость равнозначна локальной персистентности, однако гладкость, полученная посредством интегрирования, распространяется и на глобальные свойства функции. При  $H - 1/2 < 0$  преобразование Римана–Лиувилля представляет собой дробную форму дифференцирования, поскольку оно усиливает иррегулярность, которая зависит от локального поведения.

**Дробное интегро-дифференцирование броуновских функций.** В случае дробной броуновской функции из окружности в прямую параметр  $H$  сверху не ограничен. Дробное интегрирование порядка  $H - 1/2 > 1/2$  броуновской функции из окружности в прямую дает дифференцируемую функцию. Напротив, в случае броуновских функций из прямой в прямую порядок  $H - 1/2$  не может превышать  $1/2$ , поэтому функция  $B_H(t)$  не является дифференцируемой.

И в тех, и в других броуновских функциях (из окружности в прямую и из прямой в прямую) локальная иррегулярность препятствует дифференцированию при значении параметра  $H < 0$ , следовательно, порядок дифференцирования не может быть меньше  $-1/2$ .

**Двустороннее обобщение дробного интегро-дифференцирования.** То обстоятельство, что классическое определение Римана–Лиувилля сильно асимметрично по отношению к переменной  $t$ , не вызывает никаких сложностей до тех пор, пока  $t$  обозначает время. Однако для тех случаев, когда координата  $t$  может «распространяться» в обоих направлениях, необходимо симметричное определение. Я предлагаю следующее:

$$B_H(t) = [\Gamma(H + 1/2)]^{-1} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) - \int_t^{\infty} (t-s)^{H-1/2} dB(s).$$

## 9. БРОУНОВСКИЕ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА В ПРЯМУЮ

Леви (см. [306, 307, 308, 309, 310]) вводит понятие броуновских функций из пространства  $\Omega$  в вещественную прямую, где  $\Omega$  представляет собой *либо* обычное пространство  $\mathbb{R}^E$  (расстояние  $|PP_0|$  определяется как отрезок прямой), *либо* сферу в пространстве  $\mathbb{R}^{E+1}$  (расстояние определяется вдоль геодезических линий), *либо* гильбертово пространство. Для каждой из соответствующих броуновских функций значение разности  $B(P) - B(P_0)$  является гауссовой случайной величиной с нулевым средним и дисперсией  $G(|PP_0|)$ , где  $G(x) = x$ . Рекомендую также обратить внимание на статьи [421] и [70].

**Представление броуновской функции в виде белого гауссова шума, когда  $\Omega$  — сфера.** В этом случае функция  $B(P)$  строится, как описано в главе 28: на поверхность сферы накладывается слой белого гауссова шума, а функция  $B(P)$  определяется как интеграл этого белого шума по поверхности полусферы, северный полюс которой совпадает с точкой  $P$ . Вообще-то, я предпочитаю несколько иной вариант, в котором берется половина интеграла по одной полусфере, а затем вычитается половина интеграла по другой полусфере. Такая процедура позволяет обобщить второй процесс, описанный в подразделе 4.

**Представление броуновской функции в виде белого гауссова шума, когда  $\Omega = \mathbb{R}^E$  [79].** Этот случай требует более сложного алгоритма (алгоритм был предложен Ченцовым). Наиболее наглядное представление об этом алгоритме можно получить, когда пространство  $\Omega$  есть  $\mathbb{R}^2$ , и  $B(0, 0) = 0$ . Построим вспомогательный цилиндр единичного радиуса с координатами  $u$  и  $\theta$  и наложим на него слой белого шума. Далее (в модифицированном мною [379] варианте алгоритма) проинтегрируем этот шум по прямоугольнику от  $\theta$  до  $\theta + d\theta$  и от 0 до  $u$ . Получим броуновскую функцию из прямой в прямую, которая обращается в нуль при  $u = 0$ ; обозначим ее через  $B(u, \theta, d\theta)$ . Для каждой точки  $(x, y)$

плоскости броуновские составляющие  $B(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta, d\theta)$  статистически независимы, а их интеграл по  $\theta$  равен  $B(x, y)$ .

### 10. ДРОБНЫЕ БРОУНОВСКИЕ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА В ПРЯМУЮ

В работе Ганголли [161] (отдельные моменты которой были предвосхищены еще Ягломом [608]) функция  $B(P)$  обобщается до случая  $G(x) = x^{2H}$  (см. предыдущий подраздел). Здесь, однако, не приводится явного алгоритма для построения результирующей функции. Для того, чтобы заполнить этот пробел, я обобщил в [379] построение Ченцова, заменив каждую функцию  $B(u, \theta, d\theta)$  двусторонне определенной дробной броуновской функцией из прямой в прямую.

О размерности  $D$  см. в [610, 611].

О моделировании с помощью БПФ см. [582].

### 11. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДРОБНЫХ ГАУССОВЫХ ШУМОВ

Зададим дисперсию  $G(x)$ , отличную от  $G(x) = x$ , составим сумму  $\sum_{t=1}^T G\{B_H(t) - B_H(t-1)\}$  и интерполируем ее линейно для нецелочисленных  $T$ . Результат (который мы обозначим через  $B_G(T) - B_G(0)$ ) асимптотически масштабно-инвариантен, если существует некоторая функция  $A(T)$ , такая, что предел  $\lim_{T \rightarrow \infty} A(T)\{B_G(hT) - B_G(0)\}$  невырожден при любом  $h \in (0, 1)$ . Мюррей Розенблатт рассмотрел случай  $G(x) = x^2 - 1$ . В статье [551] показано, что эта задача тесно связана с эрмитовым рангом дисперсии  $G$ , определяемом как порядок младшего члена в разложении  $G$  в ряд Эрмита. О более новых находках в этом направлении можно узнать из работ [554] и [110].

## КРИВЫЕ ПЕАНО

Дополнительные материалы по этой теме (а также по нецелочисленным основаниям систем счисления) можно найти в главе XII «Фракталов» 1977 г.

## МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ УСЕЧЕНИИ

Связь гиперболического распределения с масштабной инвариантностью основывается на следующем свойстве (присущем только гиперболическому распределению): распределение нормированной усеченной случайной величины « $U/u_0$ , если  $U/u_0 > 1$ » не зависит от  $u_0$ .

**Доказательство.** Пусть имеется некоторое основное распределение  $P(u)$ , причем нормированная усеченная с.в.  $W = U/u_0$  имеет обычное условное распределение  $P(wu_0)/P(u_0)$ . Нам нужно, чтобы это условное распределение было одинаковым для  $u_0 = h'$  и  $u_0 = h''$ . Запишем  $v' = \ln h'$  и  $v'' = \ln h''$  и рассмотрим функцию  $R = \ln P(u)$  как функцию от  $v = \ln h$ . Для получения искомого тождества  $P(uh')/P(h') = P(uh'')/P(h'')$  необходимо, чтобы при любом выборе значений  $v, v'$  и  $v''$  выполнялось равенство  $R(v' + v) - R(v') = R(v'' + v) - R(v'')$ . А для этого функция  $R$  должна быть линейной функцией от  $v$ .

## МУЗЫКА И МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Музыка обладает по меньшей мере двумя достойными упоминания скейлинговыми свойствами.

**Темперированные музыкальные гаммы и их связь с частотным спектром модифицированной функции Вейерштрасса.** Из всех слов современного английского языка, восходящих к латинскому корню *scala* («лестница»), самым употребительным является, конечно же, не *скейлинг*<sup>1</sup>, прочно обосновавшийся в нашем эссе, а слово *scale*<sup>2</sup> в значении «музыкальная гамма», под чем подразумевается некий дискретный спектр, получаемый умножением частот. В темперированной гамме значения частот располагаются в *логарифмической* последовательности. Например, додекафоническая (двенадцатитоновая) гамма соответствует основанию  $b = 2^{1/12}$ ; в результате большая часть основных тонов любого музыкального инструмента приходится на относительно низкие частоты его полного частотного диапазона, высокие же частоты достаются немногим избранным.

Экстраполируя такой спектр в обе стороны на частоты, не воспринимаемые человеческим ухом, получим спектр, неотличимый от спектра функции Вейерштрасса (соответствующим образом модифицированной, см. с. 533) с тем же значением  $b$ . Следовательно, для того, чтобы добавить низких частот в музыкальное произведение, достаточно ввести в оркестр новые инструменты, способные производить низкие тоны желаемой частоты.

Согласно теореме Эйлера–Фурье, самая общая периодическая функция представляется в виде ряда *линейно* упорядоченных гармоник и, следовательно, последовательность основных тонов некоего эталонного музыкального произведения может быть представлена только очень суженными функциями.

<sup>1</sup>Англ. *scaling*. — Прим. перев.

<sup>2</sup>Очень многозначное английское слово: «чаша весов», «масштаб», «шкала» и так далее, включая и «музыкальную гамму». — Прим. перев.

**Музыка как масштабно-инвариантный ( $1/f$ ) шум (по Р.Ф.Фоссу).** Второй скейлинговый аспект музыки связан с изменением во времени различных характеристик звукового сигнала: например, мощности (определяемой как квадрат интенсивности) или мгновенной частоты (определяемой как количество пересечений сигналом нулевого уровня за единицу времени). Фосс и Кларк [580, 581] (см. также [164]) отмечают, что в произведениях таких различных композиторов, как Бах, Бетховен и «Битлз», обе упомянутые характеристики звукового сигнала представляют собой масштабно-инвариантные шумы (или  $1/f$ -шумы, см. с. 356).

И наоборот, когда мы инициируем случайную музыку неким внешним физическим источником шума со спектральной плотностью вида  $1/f^B$  и различными скейлинговыми показателями, получаемый звук, как обнаружили те же Фосс и Кларк [580, 581], больше всего «похож» на музыку, если в качестве инициатора выступает  $1/f$ -шум.

Такого результата никто не ожидал, однако — как это случилось с большинством описанных в настоящем эссе открытий — ему находится вполне «естественное» объяснение *постфактум*. Лично мне больше по душе такое рассуждение: музыкальная композиция, как явствует из термина, составляется из компонентов. Самыми крупными компонентами являются части, различающиеся общим темпом и/или уровнем громкости. Части, в свою очередь, состоят из более мелких компонентов, разделяющихся по тому же принципу. Причем, согласно настояниям преподавателей композиции, «компонентная» структура должна проследиваться вплоть до мельчайших осмысленных составных частей музыкального произведения. Получаемая в результате такого сочинения композиция просто обязана быть масштабно-инвариантной!

Однако эта инвариантность не распространяется на временные промежутки, меньшие времени звучания одной ноты. При более высоких частотах в действие вступают совершенно иные механизмы (определяемые, среди прочего, резонансными свойствами человеческих легких и корпусов скрипок и флейт), в результате чего высокоэнергетический спектр сигнала становится больше похож на  $f^{-2}$ , чем на  $f^{-1}$ .

## НЕЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЫ

Согласно определениям лакунарности, приведенным в главе 34, нелакунарное множество в пространстве  $\mathbb{R}^E$  должно пересекать каждый куб или сферу в указанном пространстве. Выражаясь математическим языком, оно должно быть всюду плотным и, как следствие, незамкнутым. (Единственное всюду плотное замкнутое множество в пространстве  $\mathbb{R}^E$  — это само пространство  $\mathbb{R}^E$ !) В этом разделе мы покажем, что такие фракталы действительно существуют, но весьма отличаются «на ощупь» от замкнутых фракталов, рассматриваемых в других частях

эссе. Ключевое различие заключается в том, что хотя к таким фракталам по-прежнему применимо понятие размерности Хаусдорфа – Безиковича, их размерность подобия и размерность Минковского – Булигана равны здесь  $E$ , а не  $D$ .

## 1. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ

Феномены, при описании которых не обойтись без нелакунарных фракталов, во множестве упоминаются на страницах настоящего эссе — я имею в виду, что многие из моих прецедентных исследований естественных фракталов вступают в противоречие с некоторыми из известных нам о Природе бесспорных истин.

В главе 8, например, мы забываем о том, что шум, служащий причиной появления фрактальных ошибок, в промежутках между ошибками ослабляется, но полностью не исчезает.

В главе 9 мы как-то пренебрегаем тем обстоятельством, что нам известно о существовании межзвездной материи. Вне всякого сомнения, ее распределение должно быть, *по меньшей мере*, таким же иррегулярным, как и распределение звезд. Более того, представление о невозможности определения плотности относится в большей степени именно к межзвездной, а не к звездной материи. В подтверждение приведу выдержку из статьи де Вокулера [104]: «Принимая во внимание то, что видимая материя образует ярко выраженные сгустки и кластеры во всех масштабах, трудно поверить в то, что невидимый межгалактический газ однороден и равномерно распределен. . . [его] распределение должно быть очень похоже. . . на распределение галактик». В работах других астрономов можно встретить такие термины, как межгалактические *жгуты* и межгалактическая *паутина*.

А рассмотренные в главе 10 бахромчатые поверхности турбулентной диссипации со всей очевидностью представляют собой чрезмерно упрощенное описание реальности.

В конце главы 9 очень кратко упоминается о фрактальном взгляде на распределение минералов. В этом случае факт применения замкнутых фракталов означает, что в областях, расположенных между медными месторождениями, медь полностью отсутствует. Разумеется, в большинстве областей меди действительно очень мало, однако было бы неверно предполагать, что в какой-либо области ее нет совсем.

Во всех перечисленных случаях определенные области, не представлявшие для нас в тот момент непосредственного интереса, были искусственным образом опустошены, чтобы получить возможность использовать при описании соответствующего феномена *замкнутые* фрактальные множества; однако в конечном счете эти области необходимо будет заполнить. Для решения такой задачи можно воспользоваться оригинальным гибридом, который называется *нелакунарные фракталы*.



Например, нелакунарное распределение масс в космическом пространстве — это такое распределение, при котором никакая область пространства не бывает пустой, но для каждого множества малых порогов  $\theta$  и  $\lambda$  доля массы не менее  $1 - \lambda$  оказывается сосредоточена в области пространства, относительный объем которой не превышает  $\theta$ .

## 2. ЦИТАТА ИЗ ДЕ ВИСА И КОММЕНТАРИЙ

В работе де Виса [106] описана весьма простая и наглядная ситуация, требующая применения нелакунарных фракталов; там же приводится некая «рабочая гипотеза», о которой, на мой взгляд, стоит рассказать подробнее.

«Рассмотрим [месторождение руды] тоннажа  $W$  и средней степени чистоты  $M$ . Проведя воображаемый разрез, разделим месторождение на две части с одинаковым тоннажом  $\frac{1}{2}W$ , но с различной средней степени чистоты. Допустим, что чистота руды в более богатой половине равна  $(1 + d)M$ , тогда чистота руды во второй половине должна быть равна  $(1 - d)M$ , поскольку, согласно условию, средняя чистота руды в обеих половинах вместе составляет  $M$ . . . Проведем еще один воображаемый разрез, разделяющий месторождение уже на четыре части с одинаковым тоннажом  $\frac{1}{4}W$  и средними степенями чистоты  $(1 + d)^2M$ ,  $(1 + d)(1 - d)M$ ,  $(1 + d)(1 - d)M$  и  $(1 - d)^2M$ . После третьего разреза получаем  $2^3 = 8$  частей, а именно: один блок со средней чистотой  $(1 + d)^3M$ , три блока с  $(1 + d)^2(1 - d)M$ , три блока с  $(1 + d)(1 - d)^2M$  и один с  $(1 - d)^3M$ . Несложно представить себе и дальнейшее разделение месторождения на все меньшие блоки.

Коэффициент  $d$  в качестве меры изменчивости вполне адекватно заменяет целое собрание различных трудноопределимых характеристик [милых сердцу тех, кто полагает, что оценка качества месторождения представляет собой скорее искусство, чем наука], а используя основные на этой мере статистические выводы, мы вполне способны обойтись без имеющегося сейчас в нашем распоряжении запутанного лабиринта из эмпирических правил и интуитивных методов».

**Комментарий.** До исследования геометрических аспектов своей модели де Вис так и не дошел, и ни он, ни его в остальных отношениях выдающиеся последователи (включая и Г. Матерона) не имели ни малейшего представления о фракталах. Однако если предположить, что плотность руды не зависит от степени ее чистоты (т. е. вес руды эквивалентен ее объему), то мы увидим, что в точности такую же модель исследовал в свое время — правда, с совершенно иными целями — теоретик А. С. Безикович вместе со своими учениками.

Забегая вперед, заметим, что если продолжить процесс де Виса (в его новой интерпретации) до бесконечности, то руда в пределе створается в нелакунарный фрактал. Для того чтобы записать его размер-

ность в привычном для нас виде ( $D = \ln N^* / \ln 2$ ), необходимо прежде определить  $\ln N^*$  следующим образом:

$$\ln N^* = - \sum \pi_i \ln \pi_i,$$

где  $\pi_1 = (1+d)^3$ ,  $\pi_8 = (1-d)^3$ ,  $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = (1+d)^2(1-d)$  и  $\pi_5 = \pi_6 = \pi_7 = (1+d)(1-d)^2$ .

**Заключение.** Догадку де Виса можно расценивать как вдохновенное прозрение, однако коэффициент  $d$  явно непригоден в качестве меры, так как он применим только к одной модели. Подходящей мерой изменчивости руды является размерность  $D$ .

### 3. ВЗВЕШЕННОЕ СТВОРАЖИВАНИЕ БЕЗИКОВИЧА

Для того чтобы в должной мере оценить результаты Безиковича, следует представить их на интервале  $[0, 1]$  с  $b = 3$ .

**Допущения.** Вообразим себе некую массу, распределенную по интервалу  $[0, 1]$  с единичной плотностью, и поделим ее между тремя третями интервала с помощью неслучайного умножения на три веса  $W_0$ ,  $W_1$  и  $W_2$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- А)  $\frac{1}{3}W_0 + \frac{1}{3}W_1 + \frac{1}{3}W_2 = 1$ . Это соотношение показывает, что масса сохраняется, и что каждый вес  $W_i$  ограничен значением  $b$ . Величину  $\frac{1}{3}W_i$ , которая представляет собой массу  $i$ -й трети, мы обозначим через  $\pi_i$ .
- Б) Равномерное распределение  $W_i \equiv \frac{1}{3}$  исключено.
- В)  $W_0W_1W_2 > 0$ . Это соотношение, в частности, исключает из рассмотрения канторов случай ( $W_0 = \frac{1}{2}$ ,  $W_1 = 0$  и  $W_2 = \frac{1}{2}$ ).

Последующие этапы каскада строятся аналогичным образом; например, плотность вещества в субвихрях имеет следующие значения:  $W_0^2$ ,  $W_0W_1$ ,  $W_0W_2$ ,  $W_1W_0$ ,  $W_1^2$ ,  $W_1W_2$ ,  $W_2W_0$ ,  $W_2W_1$ ,  $W_2^2$ .

**Заключения.** Итерируя до бесконечности, получаем следующие результаты (большой их части мы обязаны Безиковичу и Эгглстону; отличное изложение этих результатов имеется в книге Биллингсли [34]):

- А) **Сингулярность. Фрактал Безиковича.** Почти во всех точках плотность асимптотически приближается к нулю. Множество точек, в которых асимптотическая плотность не равна нулю (собственно, в этих точках она бесконечна), называется *фракталом Безиковича В*.

Он представляет собой множество точек интервала  $[0, 1]$ , триичное разложение которых таково, что отношение

$$k^{-1} \text{ (количество } i \text{ в первых } k \text{ «цифрах»)}$$

сходится к  $\pi_i$ . Такие точки образуют открытое множество: предел последовательности этих точек не обязательно должен принадлежать множеству.

Б) **Нелакуарность.** Предельное распределение массы является всюду плотным: не существует такого открытого интервала (сколько угодно малого), который был бы (пусть даже асимптотически) совершенно пуст. На интервале от 0 до  $t$  масса строго возрастает вместе с  $t$ . Хотя относительное количество точек, в которых  $\prod W$  не сходится к нулю, очень мало, абсолютного их количества вполне достаточно для того, чтобы масса, заключенная внутри любого интервала  $[t', t'']$ , имела ненулевой предел при  $k \rightarrow \infty$ .

В) **Размерность Хаусдорфа – Безиковича множества  $\mathcal{B}$ .** Эта размерность равна

$$D = -(\pi_1 \ln \pi_1 + \pi_2 \ln \pi_2 + \pi_3 \ln \pi_3).$$

Формально величина  $D$  является «энтропией», как она определена в термодинамике, или «информацией», как ее определяет Шеннон (см. [34]).

Г) **Размерность подобия множества  $\mathcal{B}$ .** Эта размерность равна единице. В самом деле, множество  $\mathcal{B}$  самоподобно с  $N = 3$  и  $r = 1/3$ , следовательно,  $D_S = \ln 3 / \ln 3 = 1$ ; причина введения индекса  $S$  вскоре разъяснится. Аналогичным образом, размерность трехмерных вариантов  $\mathcal{B}$  равна 3. В данном примере величина  $D_S$  не может иметь большого физического смысла: во-первых, она не зависит от весов  $W_i$ , если те отвечают вышеприведенным условиям; во-вторых, если заменить множество  $\mathcal{B}$  его канторовым пределом, то ее значение скачкообразно изменяется с 1 на  $\ln 2 / \ln 3$ .

Кроме того, фрактальное однородное распределение больше не может основываться на самоподобии. В самом деле, если соотнести с каждым участком длиной  $3^{-k}$  один и тот же вес, в результате мы получим однородное распределение на интервале  $[0, 1]$ . Оно никак не связано со значениями весов  $W_i$  и отлично от меры, с помощью которой генерировалось само множество. К тому же, при переходе к канторову пределу это однородное распределение разрывно переходит в распределение весьма неоднородное.

Д) **Размерность подобия «множества концентрации» множества  $\mathcal{B}$ .** Эта размерность равна  $D$ . Дело в том, что мера Безиковича довольно точно аппроксимируется фрактально однородной мерой, размерность подобия которой равна размерности Хаусдорфа–Безиковича  $D$ . Точнее говоря, после некоторого большого количества  $k$  этапов каскада большая часть первоначально однородной массы оказывается сосредоточенной в  $3^k D$  троичных интервалах с длиной  $3^{-k}$ . Распределение этих интервалов в  $[0, 1]$  неоднородно, однако длина самой большой пустоты стремится при  $k \rightarrow \infty$  к нулю.

**Комментарий.** Следует различать «полное множество», которое должно включать в себя всю массу, и «частное множество», в котором сосредоточена большая часть массы. Оба множества самоподобны, однако их размерности самоподобия  $D_S$  и  $D$  различны. См. также подраздел 5 данного раздела.

#### 4. СЛУЧАЙНОЕ ВЗВЕШЕННОЕ СТВОРАЖИВАНИЕ [378, 376]

В работах [378, 376] я предложил естественное и достаточно глубокое обобщение метода Безиковича, которое получило дальнейшее развитие в [254].

Воздействие каждого этапа каскада заключается в умножении плотностей в  $b^3$  субвихрях каждого вихря на одинаково распределенные и статистически независимые случайные веса  $W_i$ .

После  $k$  этапов каскада взвешенного створаживания количество вихрей, в которых оказывается сосредоточена большая часть массы, составляет величину порядка  $b^{kD^*}$  (при общем количестве вихрей  $b^{3k}$ ), где

$$D^* = -\langle W \log_b(r^3 W) \rangle = 3 - \langle W \log_b W \rangle.$$

В частности, если величина  $W$  дискретна и ее возможные значения  $w_i$  имеют относительные вероятности  $p_i$ , имеем

$$D^* = 3 - \sum p_i w_i \log_b w_i.$$

**Случай  $D^* > 0$ :  $D = D^*$ .** Мера, порождаемая взвешенным створаживанием аппроксимируется фрактально однородной мерой с размерностью  $D = D^*$ , получаемой так же, как описано в главе 23.

**СЛУЧАЙ  $D^* < 0$ :  $D = 0$ .** Количество непустых ячеек асимптотически стремится к нулю, а это значит, что предел почти наверное оказывается пустым.

В общей сложности, носитель массы аппроксимируется замкнутым множеством с размерностью  $D = \max(0, D^*)$ .

**Сечения.** Аналогичным образом масса, заключенная в плоских и линейных сечениях, сосредоточивается в относительно малом количестве вихрей:  $b^{D^*-1}$  для плоских сечений (при общем числе вихрей  $b^2$ ) и  $b^{D^*-2}$  для линейных сечений (при общем числе вихрей  $b$ ). То есть сечения невырождены при  $D^* > 1$  (и, соответственно,  $D^* > 2$ ) и аппроксимируются фракталами с размерностями  $D^* - 1$  и  $D^* - 2$ . Таким образом, размерности сечений в этом случае подчиняются тем же правилам, что и в случае лакунарных фракталов.

**Новые случайные величины, инвариантные при взвешенном сложении.** Пусть  $X$  — это случайная величина, которая асимптотически задает вес, заключенный внутри вихря любого порядка  $k$  или внутри его сечения прямой или плоскостью (размерность сечения обозначим через  $\Delta$ ). Я показал, что величины  $X$  удовлетворяют функциональным уравнениям

$$(1/C) \sum_{g=0}^{C-1} X_g W_g = X,$$

где  $C = b^\Delta$ , величины  $W_g$  и  $X_g$  — независимые случайные величины, равенство же выражает идентичность распределения. Это уравнение представляет собой обобщение уравнения (L), рассматриваемого в разделе УСТОЙЧИВЫЕ ПО ЛЕВИ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ. Решения этого уравнения являются обобщением устойчивых случайных величин и подробнее обсуждаются в цитированных выше статьях [378, 376] и [254].

## 5. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ НОРМАЛЬНОЕ СЛУЧАЙНОЕ СТВОРАЖИВАНИЕ И ФУНКЦИЯ [367]

В [367] описана вихревая решетка, сочетающая в себе абсолютное и взвешенное створаживание, позаимствованное у Кантора. Вихри не задаются заранее, но генерируются при построении с помощью того же статистического механизма, который используется для генерации заключенной в них массы. Кроме того, дискретные вихревые слои сливаются в такой решетке в непрерывный континуум.

**Пределная логарифмически нормальная функция: обоснование.** Произведем кое-какие последовательные модификации взвешенного створаживания на примере некоторой функции  $L(t)$  от одной переменной (выбранной из соображений простоты).

После  $n$ -го этапа плотность взвешенного створаживания задается функцией  $Y_n(t)$ , такой, что приращение  $\Delta \ln Y_n(t) = \ln Y_{n+1}(t) - \ln Y_n(t)$  есть ступенчатая функция; изменяется эта функция только тогда, когда  $t$  представляет собой интеграл, кратный  $b^{-n} = r^n$ , в остальные

же моменты времени ее значениями являются независимые случайные величины вида  $\ln W$ . Положим теперь, что приращение  $\Delta \ln W$  является логарифмически нормальным со средним  $-\frac{1}{2}(\ln b)$  и дисперсией  $\mu \ln b$ . При этом ковариация между  $\Delta \ln Y_n(t)$  и  $\Delta \ln Y_n(t + \tau)$  принимает на интервале  $|\tau| < r^n$  значение  $\mu(\ln b)(1 - |\tau|/r^n)$  и обращается в нуль вне этого интервала. Функция  $\Delta \ln Y_n(t)$  не может считаться гауссовой, поскольку совместное распределение ее значений при двух (или более)  $t$  не является многомерной гауссовой случайной величиной.

**Первая модификация.** Заменяем все  $\Delta \ln Y_n(t)$  соответствующими  $\Delta \ln Y_n^*(t)$ , определяемыми как гауссовы случайные функции с практически той же ковариацией  $\mu(\ln b) \exp(-|\tau|/r^n)$ . В результате такой замены сохраняется «область зависимости» оригинала, однако нарушаются дискретные границы между вихрями продолжительности  $r^n$ .

**Вторая модификация.** Заменяем дискретный параметр  $n \ln b$  непрерывным параметром  $\lambda$ . Сумма конечных разностей  $\Delta \ln Y_n^*(t)$  заменяется при этом интегралом бесконечно малых дифференциалов  $d \ln L_\lambda(t)$  со средним  $-\frac{1}{2}\mu d\lambda$  и дисперсией  $\mu d\lambda$ , а вихри становятся непрерывными.

**Определение функции  $L(t)$ .** Рассмотрим предел

$$L(t) = L_\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda(t).$$

Случайная величина  $\ln L_\lambda(t)$  является гауссовой со средним  $\langle \ln L_\lambda(t) \rangle = -\frac{1}{2}\lambda\mu$  и дисперсией  $\sigma^2 \ln L_\lambda(t) = \lambda\mu$ . Отсюда  $\langle L_\lambda(t) \rangle = 1$  при всех  $\lambda$ . Однако предел функции  $L_\lambda(t)$  может быть либо невырожденным, либо почти наверное равным нулю. Математического разрешения эта проблема пока не получила, однако можно, очевидно, придать строгий вид нижеследующим эвристическим рассуждениям. Они проводятся на примере более интересных функций  $L(x)$  от трехмерной переменной.

**Множество концентрации предельной логарифмически нормальной меры.** Удобным средством для получения представления о множестве, в котором значение  $L_\lambda(x)$  не только не мало, но чрезвычайно велико, являются опорные квадраты со стороной  $r^n$ . Это не искусственно навязанные субвихри, а всего лишь способ измерения. При  $n \gg 1$  и фиксированном  $x$  вероятность того, что значение логарифмически нормальной функции  $L_{n \ln b}(x)$  окажется очень близко к нулю, чрезвычайно высока, т. е. на большей части области определения значения этой функции чрезвычайно малы.

Поскольку функция  $L_{n \ln b}(x)$  непрерывна, изменение ее значения внутри ячейки со стороной  $r^n$  очень невелико, а это значит, что к настоящей модели применим способ получения множества концентрации

в случае взвешенного створаживания с логарифмически нормальной величиной  $W$ . Если пренебречь логарифмическими членами, то количество ячеек, составляющих большую часть интеграла функции  $L_{n \ln b}(x)$ , имеет математическое ожидание  $Q = (r^{-n})^{D^*}$ , где  $D^* = 3 - \mu/2$ .

Если  $\mu > 6$  (т.е.  $D^* < 0$ ), то  $Q \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , и функция  $L(x)$  почти наверное вырождена.

Если  $4 < \mu < 6$  (т.е.  $0 < D^* < 1$ ), то функция  $L(x)$  имеет размерность  $D = D^*$  и невырождена, однако ее следы на плоскостях и прямых почти наверное вырождены.

Если  $2 < \mu < 4$  (т.е.  $1 < D^* < 2$ ), то функция  $L(x)$  и ее следы на плоскостях невырождены (размерности  $D^*$  и  $D^* - 1$ , соответственно), однако ее следы на прямых почти наверное вырождены.

Если  $0 < \mu < 2$  (т.е.  $2 < D^* < 3$ ), то и функция  $L(x)$ , и ее следы на плоскостях и прямых невырождены (размерности  $D^*$ ,  $D^* - 1$  и  $D^* - 2$ , соответственно).

## 6. РАЗМЕРНОСТЬ КОНЦЕНТРАТА МЕРЫ

Исследование относительной перемежаемости может привести нас и к другим определениям размерности. Вместо множества в метрическом пространстве рассмотрим некую меру  $\mu(S)$ , которая определена в ограниченном подпространстве  $\Omega$  (в соответствующем  $\sigma$ -поле, включающем в себя и шары) и обладает нижеперечисленными свойствами. (А) Когда  $S$  — шар,  $\mu(S) > 0$ , а  $\mu(\Omega) = 1$ , т.е. «множество, в котором  $\mu > 0$ » совпадает с пространством  $\Omega$ . (Б) Руководствуясь интуитивными соображениями, можно, однако, предположить, что мера  $\mu$  «концентрируется» внутри очень малой части пространства  $\Omega$ . Необходимы новые способы количественного выражения (Б).

При заданных  $\rho > 0$  и  $0 < \lambda < 1$  рассмотрим множества  $\Sigma_\lambda$ , для которых верно неравенство  $\mu(\Omega - \Sigma_\lambda) < \lambda$ . Обозначим через  $N(\rho, \Sigma_\lambda)$  инфимум количества шаров радиуса  $\rho$ , необходимых для покрытия множества  $\Sigma_\lambda$ . Определим

$$N(\rho, \lambda) = \inf N(\rho, \Sigma_\lambda).$$

За некоторыми, на мой взгляд, многообещающими эвристическими оценками скрываются выражения «размерностного» вида

$$\liminf_{\alpha \downarrow 0} \ln N(\alpha, \alpha) / \ln(1/\alpha);$$

$$\liminf_{\rho \downarrow 0} \ln N(\rho, \lambda) / \ln(1/\rho);$$

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{\rho \downarrow 0} \ln N(\rho, \lambda) / \ln(1/\rho),$$

строгое исследование которых можно было бы только приветствовать. Разумеется, эвристические оценки заменяют значение  $\inf N(\sigma, \lambda)$  действительным  $N(\sigma, \Sigma_\lambda)$  относительно некоторого приемлемого покрытия  $\Sigma_\lambda$ .

## ПОТЕНЦИАЛЫ И ЕМКОСТИ. РАЗМЕРНОСТЬ ФРОСТМАНА

Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D$  играет центральную роль в современной теории классических и обобщенных потенциалов (потенциалов Марселя Рисса) с ядрами вида  $|u|^{-F}$ , где  $F \neq E - 2$ . Из появившихся в недавнее время неэлементарных исследований теории потенциалов рекомендую обратить внимание на книги Дюплесси ([122], глава 3) и Ландкофа [287] (в последней материал изложен более подробно).

### 1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ

Мы вскоре сможем убедиться в том, что особое значение  $D = 1$  тесно связано с ньютоновым потенциалом в  $\mathbb{R}^3$ . Эта связь лежит в основе замечаний, высказанных в главе 9 относительно различных космологических теорий, согласно которым  $D = 1$ , — таких, например, как теории Фурнье и Джинса–Хойла.

Я полагаю, должна существовать возможность переформулировать эти теории в виде следствий из ньютонова закона всемирного тяготения.

Следовательно, должна существовать и возможность вывести отклонение наблюдаемого значения  $D \sim 1,23$  от единицы из неньютоновских (релятивистских) эффектов.

### 2. РАЗМЕРНОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛЫ: ЭВРИСТИКА

Как уже упоминалось в главе 9, Бенгли и Ньютону было известно о том, что в теории гравитационного потенциала имеет место эффект, аналогичный кеплерову эффекту пылающего неба («парадоксу Ольберса»). Предположим, что  $E = 3$ , что масса  $M(R)$ , заключенная внутри сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $\omega$ , пропорциональна  $R^D$ , где  $D = 3$ , и что ядро потенциала является ньютоновским и имеет вид  $R^{-F}$ , где  $F = 1$ . Масса, заключенная внутри оболочки толщины  $dR$  и радиуса  $R$ , пропорциональна  $R^{D-1}$ ; следовательно, полный потенциал в точке  $\omega$ , определяемый как  $\propto \int R^{-F} R^{D-1} dR = \int R dR$ , расходится в бесконечности. Расхождения в бесконечности не будет, если  $D = 3$ , а  $F > 3$ , т.е. если потенциал не является ньютоновским. Тот же результат мы получим и в модели Фурнье–Шарлье с  $F = 1$  и  $D < 1$ .



Для общего интеграла  $\int R^{D-1-F} dR$  условие сходимости в бесконечности очевидно:  $D < F$ . Условие же сходимости в начале координат имеет вид  $D > F$ . Таким образом, устанавливается однозначная связь между  $D$  и  $F$ ; значению  $F = 1$ , в частности, соответствует  $D = 1$ .

### 3. ПОТЕНЦИАЛ И ЕМКОСТЬ

Эту связь исследовали Д. Пойа и Д. Сегё, в окончательном же виде ее сформулировал О. Фростман в [158]. Главное усовершенствование заключается в том, что рассуждение теперь распространяется не только на точку начала координат  $\omega$ , но на все точки, принадлежащие множеству  $S$  (компактному). Рассмотрим единичную массу, распределенную на множестве  $S$  так, что область  $du$  содержит массу  $d\mu(u)$ . В точке  $t$  ядро  $|u|^{-F}$  дает потенциальную функцию

$$\Pi(t) = \int |u - t|^{-F} d\mu(u).$$

Для измерения «протяженности» множеств де Ла Валле Пуссен применил физическую концепцию электростатической емкости. Идея такова, что если емкость  $C(S)$  множества  $S$  достаточно высока, то масса, которую мы можем «перетасовать» для достижения наименее возможного максимального потенциала, равна  $\mu$ .

**Определение.** Найдем супремум потенциала по всем точкам  $t$ , затем — инфимум полученного результата относительно всех возможных распределений единичной массы на множестве  $S$  и, наконец, положим

$$C(S) = \{\inf_t [\sup \Pi(t)]\}.$$

Если используется ядро  $1/r$ , то такой минимальный потенциал и в самом деле создается электрическими зарядами на проводящем множестве.

**Эквивалентное определение.** Величина  $[C(S)]^{-1}$  представляет собой инфимум (среди всех распределений массы, носителем которой является множество  $S$ ) энергии, определяемой двойным интегралом

$$\int \int |t - u|^{-F} d\mu(s) d\mu(t).$$

### 4. D КАК РАЗМЕРНОСТЬ ФРОСТМАНА

Между величинами  $C(S)$  и  $F$  имеет место простое соотношение. Когда показатель  $F$ , используемый при определении емкости  $C(S)$ , больше, чем размерность  $D$  Хаусдорфа–Безиковича,  $C(S)$  обращается

в нуль, — это означает, что даже при «наиболее эффективном» распределении массы по множеству  $S$  потенциал в какой-то из точек бесконечен. Когда же  $F$  меньше  $D$ , емкость множества  $S$  положительна. То есть размерность Хаусдорфа–Безиковича выступает здесь, согласно Пойа и Сегё, как емкостная размерность. Тожественность этих понятий была в наиболее общем виде доказана Фростманом [158].

В этой связи стоит упомянуть и о сложном соотношении между емкостной мерой и мерой Хаусдорфа в размерности  $D$ , полученном Тейлором (см. [559]).

### 5. «АНОМАЛЬНАЯ» РАЗМЕРНОСТЬ

Ядра  $|u|^{-F}$ , где  $F \neq E - 2$ , ассоциируются в сознании физика с пространством вложения с «аномальной евклидовой» размерностью  $2 - F$ . (Я не склонен думать, что под этими терминами подразумеваются какие-то реальные обобщения размерности  $E$  на какие-либо положительные вещественные числа, кроме целых.) Принимая во внимание а) наличие связи между размерностями  $D$  и  $F$  (размерность Фростмана) и б) роль размерности  $D$  в описании скоплений галактик (установленную в главе 9), мы приходим в рамках «аномально-размерностной» терминологии к следующему утверждению: фрактальная размерность скоплений галактик  $D = 1$  не является аномальной, однако наблюдаемая фрактальная размерность  $D = 1,23$  требует, по всей видимости, пространства вложения с аномальной размерностью.

## РАЗМЕРНОСТЬ И ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВА (ИЛИ ЕГО ДОПОЛНЕНИЯ) ШАРАМИ

В моем понимании фрактальная размерность и все ее допустимые варианты являются не топологическими, но *метрическими* понятиями. Они включают в себя некое метрическое пространство  $\Omega$ , то есть пространство, в котором соответствующим образом определяется расстояние между любыми двумя точками. Замкнутый (либо открытый) шар с центром  $\omega$  и радиусом  $\rho$  в таком пространстве представляет собой множество всех точек, находящихся от точки  $\omega$  на расстоянии  $\leq \rho$  (либо  $< \rho$ ). (Шары суть сплошные тела, а сферами мы называем их поверхности.)

Существует много способов покрытия некоторого заданного ограниченного множества  $S$  в пространстве  $\Omega$ . Часто (как, например, в случаях, рассматриваемых в данном разделе) эти способы естественным образом включают в себя понятие размерности. В фундаментальных прецедентных исследованиях упомянутые размерности имеют одинаковые значения. Однако в других примерах их значения могут быть различными.

## 1. КАНТОР И МИНКОВСКИЙ

Самый приблизительный способ покрытия, восходящий еще к Кантору, заключается в том, что каждая точка множества  $S$  объявляется центром шара; объединение этих шаров рассматривается далее как сглаженный вариант множества  $S$  и обозначается через  $S(\rho)$ .

Добавим сюда допущение о том, что  $\Omega$  является  $E$ -мерным евклидовым пространством. В этом случае понятие объема ( $\text{vol}$ ) определено, и можно записать

$$\text{vol}\{d\text{-мерный шар радиуса } \rho\} = \gamma(d)\rho^D,$$

где

$$\gamma(d) = [\Gamma(1/2)]^d / \Gamma(1 + d/2).$$

Если  $S$  — куб, объем которого много больше  $\rho^3$ , то

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim \text{vol}[S].$$

Если  $S$  — квадрат, площадь которого много больше  $\rho^2$ , то

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim 2\rho \times \text{площадь}[S].$$

Если  $S$  — интервал, длина которого много больше  $\rho$ , то

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim \pi\rho^2 \times \text{длина}[S].$$

Уточним наше выражение. Введем для обозначения объема, площади или длины общий термин «протяженность», а буквой  $d$  обозначим стандартную размерность. Положив

$$V = \text{vol}[S(\rho)] / \gamma(E - d)\rho^{E-d},$$

мы увидим, что и для кубов, и для квадратов, и для прямых верно следующее выражение:

$$\text{протяженность}[S] = \lim_{\rho \rightarrow 0} V.$$

Эта формула представляет собой вовсе не пустячное соотношение, связывающее два в равной степени безобидных понятия, как это может показаться на первый взгляд. Как показывает пример, представленный Х. А. Шварцем (1882), по мере увеличения точности триангуляции кругового цилиндра сумма площадей треугольников *вовсе не обязательно* сходится к площади поверхности цилиндра. Для того, чтобы избежать такого парадоксального поведения, Минковский [431] предпринял попытку свести понятия длины и площади к простой и здравой концепции

объема с помощью вышеописанного метода покрытия множества  $\mathcal{S}$  шарами.

Здесь, однако, с самого начала возникает небольшое затруднение: выражение для  $V$  при  $\rho \rightarrow 0$  может и не иметь предела.

В этом случае предел  $\lim$  заменяется парой  $\lim \sup$  и  $\lim \inf$ . Любому вещественному числу  $A$  из открытого интервала  $]\lim \inf, \lim \sup[$  соответствует, по меньшей мере одна последовательность значений  $\rho_m \rightarrow 0$ , таких, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vol} \{[\mathcal{S}(\rho_m)]/\gamma(E-d)\rho_m^{E-d}\} = A.$$

Такой последовательности, однако, не существует, если либо  $A < \lim \inf$ , либо  $A > \lim \sup$ . В соответствии с этими определениями Минковский [431] называет величины

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \text{vol} [\mathcal{S}(\rho)]/\gamma(E-d)\rho^{E-d}$$

и

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \text{vol} [\mathcal{S}(\rho)]/\gamma(E-d)\rho^{E-d}$$

верхней и нижней  $d$ -протяженностью множества  $\mathcal{S}$ . Если они равны, их значение совпадает с  $d$ -протяженностью  $\mathcal{S}$ . Минковский также отмечает, что в случае стандартных евклидовых фигур существует некая величина  $D$ , такая, что при  $d > D$  верхняя протяженность  $\mathcal{S}$  обращается в нуль, а при  $d < D$  нижняя протяженность  $\mathcal{S}$  бесконечна.

## 2. БУЛИГАН

Обобщение определения Минковского на случай нецелочисленных  $d$  было предпринято Булиганом в [47, 48]. На роль *размерности Минковского–Булигана*  $D_{MB}$  из упомянутых выше пределов, пожалуй, больше подходит  $\lim \inf$ , способный принимать дробные значения.

Булиган, безусловно, понимал, что размерность  $D_{MB}$  подчас противоречит здравому смыслу и, в общем, менее удобна, чем размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D$ . Однако она часто совпадает с  $D$  и легче поддается оценке, а значит, может иногда оказаться полезной. В [255] (с. 29) рассматривается случай  $E = 1$  и подтверждается, что размерность  $D_{MB}$  часто равна  $D$ , может быть больше  $D$ , но не может быть меньше.

## 3. ПОНТЯГИН И ШНИРЕЛЬМАН. КОЛМОГОРОВ И ТИХОМИРОВ

Среди всевозможных наборов шаров радиуса  $\rho$ , покрывающих множество  $\mathcal{S}$  в метрическом пространстве  $\Omega$ , наиболее экономичным по определению является тот, который содержит наименьшее количество

шаров. Если множество  $\mathcal{S}$  ограничено, это наименьшее количество конечно и может быть обозначено как  $N(\rho)$ . Учитывая это обстоятельство, Понтрягин и Шнирельман [481] выдвинули в качестве альтернативного определения размерности следующее выражение:

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \ln N(\rho) / \ln(1/\rho).$$

Дальнейшее развитие этот подход получил в работе Колмогорова и Тихомирова [278], авторы которой, почерпнув вдохновение в шенноновской теории информации, окрестили величину  $\ln N(\rho)$   $\rho$ -энтропией множества  $\mathcal{S}$ . Хокс [204] называет соответствующую размерность *нижней энтропийной размерностью*, а ее вариант, получаемый заменой  $\liminf$  на  $\limsup$  — *верхней энтропийной размерностью*. Кроме того, Хокс показывает, что размерность Хаусдорфа–Безиковича не может превышать нижней энтропийной размерности; они часто совпадают, но не всегда.

В [278] рассматривается также величина  $M(\rho)$ , определяемая как наибольшее количество точек в  $\mathcal{S}$ , отстоящих друг от друга на расстояние, превышающее  $2\rho$ . Для множеств, расположенных на прямой,  $N(\rho) = M(\rho)$ . Для других множеств величину

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \ln M(\rho) / \ln(1/\rho)$$

можно считать еще одной размерностью.

$\triangleleft$  У Колмогорова и Тихомирова [278] величина  $\ln M(\rho)$  называется *емкостью*, что в высшей степени неудачно ввиду того, что в теории потенциала уже существует такой термин с совершенно иным и, на мой взгляд, более оправданным значением. В особенности следует избегать искушения определить выведенную в предыдущем абзаце размерность, как емкостную размерность. См. раздел ПОТЕНЦИАЛЫ И ЕМКОСТИ, 3.  $\blacktriangleright$

#### 4. БЕЗИКОВИЧ И ТЕЙЛОР. БОЙД

Из главы 8 нам известно, что в том случае, когда пространство  $\Omega$  представляет собой интервал  $[0, 1]$  или вещественную прямую, пыль  $\mathcal{S}$  полностью определяется своим дополнением, т. е. объединением максимальных открытых интервалов или пустот (в некоторых построениях все пустоты являются тремами).

**Троичная канторова пыль  $\mathcal{C}$  НА ИНТЕРВАЛЕ  $[0, 1]$ .** Длины пустот составляют в сумме единицу и следуют гиперболическому распределению  $\text{Pr}(U > u) = Fu^{-D}$ . Следовательно, порядок длины  $\lambda_n$   $n$ -й пустоты (в порядке уменьшения размера) равен  $n^{-1/D}$ .

### Обобщенные линейные множества нулевой меры Лебега.

Поведение длины  $\lambda_n$  при  $n \rightarrow \infty$  рассмотрено в работе Безиковича и Тейлора [29]. Существует некоторый вещественный показатель  $D_{BT}$ , такой, что ряд  $\sum \lambda_n^d$  сходится при  $d > D_{BT}$  (в частности, сходится к 1 при  $d = 1$ ). Таким образом,  $D_{BT}$  представляет собой инфимум вещественных чисел  $d$ , при которых  $\sum \lambda_n^d < \infty$ . Можно показать, что  $D_{BT} \geq D$ . Хокс (см. [204], с. 707) доказывает, что величина  $D_{BT}$  совпадает с верхней энтропийной размерностью, причем иногда легче поддается оценке.

**Предостережение.** Если  $S$  не является множеством нулевой меры, показатель  $D_{BT}$  не является размерностью. Этот показатель средни показателю, описанному в главе 15, и показателю  $\Delta$  из главы 17.

**Показатель аполлониевой упаковки.** У показателя  $D_{BT}$  имеется аналог в случае аполлониевой упаковки (см. главу 18). Он был введен в 1966 г. З. А. Мельзаком, а Бойд в работе [51] показывает, что этот показатель представляет собой (как и предполагалось) размерность Хаусдорфа–Безиковича остаточного множества.

## РАЗМЕРНОСТЬ ПОДОБИЯ: НЕКОТОРЫЕ ТОНКОСТИ

В некоторых открытых множествах (т. е. не содержащих свои предельные точки) можно наблюдать серьезное несоответствие размерностей.

Множество концевых точек трех канторовой пыли самоподобно и характеризуется теми же значениями  $N$  и  $r$ , что и вся канторова пыль, т. е. его размерность подобия совпадает с размерностью подобия канторовой пыли. Однако оно является счетным, а это означает, что его размерность Хаусдорфа–Безиковича равна нулю. Если добавить сюда предельные точки пыли, то мы получим саму канторову пыль, и несоответствие исчезнет «в пользу» размерности подобия, которая для этого множества является более важной характеристикой.

Еще один простой пример, который я называю множеством Безиковича, рассматривается в разделе НЕЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЫ, 3.

## РАЗМЕРНОСТЬ ФУРЬЕ И ЭВРИСТИКА

Пусть  $\mu(x)$  — некоторая неубывающая функция от  $x \in [0, 1]$ . Если максимальные открытые интервалы, в которых значение  $\mu$  постоянно, составляют в сумме дополнение замкнутого множества  $S$ , то мы говорим, что множество  $S$  является *опорным* для  $d\mu(x)$ . Преобразование Фурье–Стилтьеса функции  $\mu$  имеет вид

$$\hat{\mu}(f) = \int \exp(ifx) d\mu(x).$$

Самые гладкие функции  $\mu$  дают наивысшую возможную скорость уменьшения  $\hat{\mu}$ . Обозначим через  $D_F$  наибольшее вещественное число, при котором по меньшей мере одна функция  $\mu(x)$  с носителем  $\mathcal{S}$  удовлетворяет равенству

$$\hat{\mu}(f) = o(|f|^{-D_F/2+\varepsilon}) \quad \text{при } f \rightarrow \infty \quad \text{для всех } \varepsilon > 0,$$

но ни одна  $\mu(x)$  не удовлетворяет

$$\hat{\mu}(f) = o(|f|^{-D_F/2-\varepsilon}) \quad \text{при } f \rightarrow \infty \quad \text{для некоторых } \varepsilon > 0.$$

Выражение « $a = o(b)$  при  $f \rightarrow \infty$ » означает здесь, что  $\lim_{f \rightarrow \infty} (a/b) = 0$ . Когда множество  $\mathcal{S}$  заполняет весь интервал  $[0, 1]$ , величина  $D_F$  бесконечна. И напротив, когда  $\mathcal{S}$  — одна-единственная точка,  $D_F = 0$ . Интересно, что, когда  $\mathcal{S}$  представляет собой множество нулевой меры Лебега, величина  $D_F$  конечна и не превышает размерности Хаусдорфа–Безиковича  $D$  этого множества. Неравенство  $D_F \leq D$  показывает, что фрактальные и гармонические свойства фрактального множества связаны между собой, но не обязательно совпадают.

Для доказательства того, что эти размерности могут различаться, предположим, что  $\mathcal{S}$  — это множество на прямой, причем его размерность  $D$  равна  $D_F$ . Если рассматривать  $\mathcal{S}$  как множество на плоскости, то размерность  $D$  не изменится, а  $D_F$  обратится в нуль.

**Определение.** В качестве удобного способа обобщения некоторых гармонических свойств  $\mathcal{S}$ , предлагаю назвать величину  $D_F$  *размерностью Фурье* множества  $\mathcal{S}$ .

**Множества Сейлема.** Равенство  $D_F = D$  описывает целую категорию множеств, называемых множествами единственности, или множествами Сейлема (см. [255, 248]).

**Эмпирическое правило и эвристика.** Интересующие нас в прецедентных исследованиях фракталы оказываются, как правило, множествами Сейлема. Поскольку величина  $D_F$  во многих случаях легко определяется из экспериментальных данных, можно использовать ее для оценки  $D$ .

**Неслучайные множества Сейлема.** Неслучайная канторова пыль является множеством Сейлема только тогда, когда коэффициент  $r$  удовлетворяет определенным теоретико-числовым свойствам.

**Случайные множества Сейлема.** Случайная канторова пыль является множеством Сейлема тогда, когда ее случайность достаточно велика для нарушения любой арифметической закономерности.

Оригинальный пример, предложенный самим Р. Сейлемом, очень сложен. В качестве альтернативного примера можно привести пыль Леви: в [253] показано, что спектр  $dL(x)$  (здесь  $L(x)$  — лестница Леви, см. рис. 399) в среднем почти совпадает со спектром дробной броуновской функции из прямой в прямую и представляет собой сглаженный вариант спектра функции Гаусса–Вейерштрасса.

◁ В монографии [248] (теоремы 1, с. 165, и 5, с. 173) показано, что образ компактного множества  $S$  с размерностью  $\delta$  относительно дробной броуновской функции из прямой в прямую с показателем  $H$  представляет собой множество Сейлема с размерностью  $D = \min(1, \delta/H)$ . ►

**Канторова пыль не является множеством Сейлема.** Троицкая канторова пыль появилась в свое время на свет в результате поисков Георгом Кантором множества единственности (см. [616], I, с. 196), — поисков, которые не увенчались успехом. (Кантор тогда забросил гармонический анализ и — за неимением лучшего — создал теорию множеств.) Обозначим канторову лестницу через  $C(x)$ . Спектр  $dC(x)$  имеет ту же общую форму, что и спектр  $dL(x)$ , однако содержит, в отличие от последнего, некоторое количество случайно расположенных острых пиков неубывающего размера, из чего можно заключить, что  $D_F = 0$ . См. [216].

Для теории множеств единственности наличие этих пиков играет решающую роль, однако на практике они вовсе не столь значимы. В большинстве случаев при оценке спектральной плотности пики игнорируются, и в расчет принимается только общая форма спектра, определяемая размерностью  $D$ .

## СЕРЕДИННЫЕ И ПРЕРЫВИСТЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Материалы по этой теме (связанной с кривыми Пеано) можно найти в главе XII «Фракталов» 1977 г.

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ С ПРИМЕНЕНИЕМ НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА $R/S$

До недавних пор в прикладной статистике принимались как само собой разумеющиеся два следующих допущения в отношении временных рядов: предполагалось, что  $\langle X^2 \rangle < \infty$  и что случайная величина  $X$  обладает краткосрочной зависимостью. Я, однако, показал (см. главу 37), что эмпирические последовательности данных с длинными хвостами часто лучше интерпретируются в свете допущения  $\langle X^2 \rangle = \infty$ . С вопросом же о том, является та или иная последовательность данных слабо (краткосрочно) или сильно (долгосрочно) зависимой, мы впервые столкнулись



еще тогда, когда я ввел долгосрочную зависимость для интерпретации феномена Херста (см. главу 27).

Такая смесь длинных хвостов и очень долгосрочной зависимости могла бы завести статистиков в тупик, поскольку стандартные методы второго порядка, рассчитанные на неизменную зависимость (корреляцию, спектры), руководствуются допущением  $\langle X^2 \rangle < \infty$ . Есть, однако, альтернатива.

Можно пренебречь распределением величины  $X(t)$  и проанализировать ее долгосрочную зависимость с помощью нормированного размаха; иначе такая процедура называется  $R/S$ -анализом. Этот статистический метод, предложенный в [408] и получивший математическое обоснование в [384], основан на различии между краткосрочной и очень долгосрочной зависимостями. В этом методе вводится постоянная  $J$ , которая называется *коэффициентом Херста*, или  $R/S$ -показателем, и может принимать любые значения в интервале от 0 до 1.

Значимость постоянной  $J$  можно описать еще до ее определения. Особое значение  $J = 1/2$  характерно для независимых, марковских и других случайных функций с краткосрочной зависимостью. Таким образом, для того, чтобы узнать, присутствует ли в эмпирических данных или в выборочных функциях очень долгосрочная непериодическая статистическая зависимость, достаточно *проверить*, приемлемо ли статистически предположение  $J = 1/2$ . Если нет, то такая зависимость присутствует, а мера ее интенсивности определяется разностью  $J - 1/2$ , значение которой можно *оценить* на основании имеющихся данных.

Главное достоинство такого подхода заключается в том, что показатель  $J$  *устойчив* по отношению к маргинальному распределению. То есть он эффективен не только в тех случаях, когда последовательности данных или случайные функции являются почти гауссовыми, но и тогда, когда распределение  $X(t)$  настолько далеко от гауссова, что  $\langle X^2(t) \rangle$  расходится, а в этом случае не работает ни один из методов второго порядка.

**Определение статистического  $R/S$ -размаха.** В непрерывном времени  $t$  определим  $X^*(t) = \int_0^t X(u) du$ ,  $X^{*2}(t) = \int_0^t X^2(u) du$  и  $X^{*2} = (X^*)^2$ . В дискретном времени  $i$  определим  $X^*(0) = 0$  и  $X^*(t) = \sum_{i=1}^{[t]} X(i)$ ; здесь  $[t]$  — целая часть  $t$ . Для всякого  $d > 0$  (величину  $d$  назовем запаздыванием) определим *скорректированный размах* суммы  $X^*(t)$  на временном промежутке от 0 до  $d$  в виде

$$R(d) = \max_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - (u/d) X^*(d)\} - \min_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - (u/d) X^*(d)\}.$$

Оценим далее *выборочное среднеквадратическое отклонение* величины  $X(t)$ :

$$S^2(d) = X^{2*}(d)/d - X^{*2}/d^2.$$

Величина  $Q(d) = R(d)/S(d)$  называется *статистическим  $R/S$ -размахом* или *самонормированным самоскорректированным размахом* суммы  $X^*(t)$ .

**Определение  $R/S$ -показателя  $J$ .** Предположим, что существует некоторое вещественное число  $J$ , такое, что при  $d \rightarrow \infty$  величина  $(1/d^J)[R(d)/S(d)]$  сходится по распределению к некоторой невырожденной предельной случайной величине. Как доказано в [384], из этого предположения следует, что  $0 \leq J \leq 1$ . В этом случае говорят, что функция  $X$  имеет  *$R/S$ -показатель  $J$*  и постоянный  *$R/S$ -префактор*.

Сделаем более общее предположение: пусть к некоторой невырожденной предельной случайной величине сходится по распределению отношение  $[1/d^J L(d)][R(d)/S(d)]$ , где  $L(d)$  — некоторая медленно изменяющаяся на бесконечности функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию  $L(td)/L(d) \rightarrow 1$  при  $d \rightarrow \infty$  для всех  $t > 0$ . Простейшим примером такой функции является  $L(d) = \ln d$ . В этом случае говорят, что функция  $X$  имеет  *$R/S$ -показатель  $J$*  и  *$R/S$ -префактор  $L(d)$* .

**Основные результаты [384].** Когда  $X(t)$  — белый гауссов шум, имеем  $J = 1/2$  и постоянный префактор. Если точнее, то отношение  $e^{-\delta J} R(e^\delta)/S(e^\delta)$  является стационарной случайной функцией от  $\delta = \ln d$ .

В более общем виде, равенство  $J = 1/2$  справедливо во всех случаях, когда  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$ , а нормированная сумма  $a^{-1/2} X^*(at)$  при  $a \rightarrow \infty$  слабо сходится к  $B(t)$ .

Когда  $X(t)$  — дискретный дробный гауссов шум (т. е. последовательность приращений функции  $B_H(t)$ , см. с. 488), имеем  $J = H$ , где  $H \in ]0, 1[$ .

В более общем виде, для получения  $J = H \neq 1/2$  и постоянно-го префактора достаточно, чтобы  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$  и чтобы сумма  $X^*(t)$  приближалась к функции  $B_H(t)$  так, что  $\langle X^*(t) \rangle \sim t^{2H}$ .

В еще более общем виде, значение  $J = H \neq 1/2$  и префактор  $L(d)$  преобладают, если  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$ , а  $X^*(t)$  приближается к функции  $B_H(t)$  и удовлетворяет соотношению  $\langle X^{*2}(t) \rangle \sim t^{2H} L(t)$ .

И наконец,  $J \neq 1/2$ , если  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$ , а  $X^*(t)$  приближается к некоторой негауссовой масштабнo-инвариантной случайной функции с показателем  $H = J$ . Примеры можно найти в [551, 554, 555].

С другой стороны, если  $X$  — белый устойчивый по Леви шум (т. е.  $\langle X^2 \rangle = \infty$ ), то  $J = 1/2$ .

Когда функция  $X$  в результате дифференцирования становится стационарной, то  $J = 1$ .

## СТАЦИОНАРНОСТЬ. СТЕПЕНИ СТАЦИОНАРНОСТИ

Используя в научных текстах «обыкновенные» слова, мы либо а) имеем в виду их общеупотребительные, «мирские» значения (выбор которых зависит от автора), либо б) придаем им статус формальных определений (для чего выделяем какое-либо особое значение и заносим его на — в данном случае — математические «скрижали»). Терминам *стационарный* и *эргодический* повезло в том смысле, что математики достигли согласия относительно их значения. Я, однако, имел возможность на собственном опыте убедиться в том, что многие инженеры, физики и статистики-практики, признавая математическое определение на словах, на деле придерживаются более узких взглядов. Мне же, напротив, хотелось бы расширить математическое определение. Ниже я перечислю основные недоразумения, возникающие при употреблении упомянутых терминов, и попытаюсь объяснить, почему математическое определение нуждается в расширении.

**Математическое определение.** Процесс  $X(t)$  является стационарным, если распределение величины  $X(t)$  не зависит от  $t$ , а совместное распределение  $X(t_1 + \tau)$  и  $X(t_2 + \tau)$  не зависит от  $\tau$ ; причем то же верно и для совместных распределений  $X(t_1 + \tau) \dots X(t_k + \tau)$  при всех  $k$ .

**Первое недоразумение (философия).** Согласно распространенному мнению, научной может считаться только та деятельность, объектом которой являются феномены, подчиняющиеся неизменным правилам. Неверное понимание стационарности чаще всего является следствием именно такого взгляда на вещи: многие полагают, что под стационарностью подразумевается всего лишь инвариантность во времени управляющих процессом правил. Это далеко не так. Например, приращение броуновского движения  $B(t_1 + \tau) - B(t_2 + \tau)$  представляет собой гауссову случайную величину, среднее и дисперсия которой не зависят от  $\tau$ . Не зависит от  $\tau$  и правило построения множества нулей броуновского движения. К стационарности, однако, имеют отношение только те правила, которые управляют значениями самого процесса. В случае броуновского движения *эти* правила *не* являются инвариантными во времени.

**Второе недоразумение (прикладная статистика).** Статистики предлагают нам множество методов (иногда даже в виде программно-го обеспечения для компьютеров) «анализа временных рядов»; на деле же диапазон возможностей этих методов оказывается гораздо уже, чем можно было бы ожидать, судя по ярлыку. Это неизбежно, так как математическая стационарность — понятие слишком общее для того, чтобы какой-нибудь отдельный метод оказался бы применим ко всем возможным случаям. Однако тем самым статистики невольно воспитывают в

своих клиентах убежденность в том, что понятие «стационарного временного ряда» тождественно другим, более узким понятиям, охватываемым тем или иным методом. Даже в тех случаях, когда авторы методов берут на себя труд проверить свои творения на «устойчивость», они учитывают лишь минимальные отклонения от простейшего состояния, не принимая в расчет весьма радикальных отклонений, ничуть не противоречащих стационарности.

**Третье недоразумение (инженеры и физики).** Многие исследователи (отчасти благодаря более ранним недоразумениям) полагают, что если выборочный процесс стационарен, то это означает, что он «может сдвигаться вверх и вниз, но остается в некотором роде статистически тем же». Такая интерпретация вполне годилась на раннем, «неформальном», этапе, однако в настоящий момент она неприемлема. Математическое определение описывает лишь правила порождения, но никак не затрагивает порождаемые объекты. Когда математики впервые столкнулись со стационарными процессами с чрезвычайно беспорядочными выборками, они были поражены тем, что понятие стационарности может включать в себя такое изобилие самых различных и неожиданных форм поведения. К сожалению, именно такие формы поведения многие практики наотрез отказываются признавать стационарными.

**Серая зона.** Нет никаких сомнений в том, что граница между стационарными и нестационарными процессами проходит где-то между белым гауссовым шумом и броуновским движением; споры вызывает лишь точное ее местонахождение.

**Уточнение границы с помощью масштабно-инвариантных шумов.** Гауссовы масштабно-инвариантные шумы (см. главу 27) могут послужить весьма удобным средством для уточнения спорной границы, поскольку их спектральная плотность имеет вид  $f^{-B}$ , где  $B \geq 0$ . Для белого шума  $B = 0$ , для броуновского движения  $B = 2$ , граница же между стационарными и нестационарными процессами попадает на различные значения  $B$  в зависимости от того, какими соображениями руководствуются «зсмлсмсры».

Математики, желая избежать «инфракрасной катастрофы», помещают границу при значении  $B = 1$ , так как условие  $\int_0^1 f^{-B} df < \infty$  эквивалентно  $B < 1$ .

Однако поведение выборки масштабно-инвариантного шума при  $B = 1$  изменяется весьма плавно. В сущности, гораздо более заметные изменения происходят при переходе от  $B = 0$  к  $B > 0$  — настолько, надо сказать, заметные, что исследователи-практики склонны считать нестационарной *любую* выборку с  $B > 0$ . Стремясь быть последователь-

ными, они также заявляют, что для представления данных, которые выглядят, как выборка с  $B > 0$ , необходима исключительно *нестационарная* модель.

Я, в свою очередь, обнаружил, что вследствие исключения из рассмотрения значений  $B > 1$  определение стационарности оказывается *недостаточно* общим для многих прецедентных исследований.

**Условно стационарные спорадические процессы.** Например, теория фрактальных шумов (см. главу 9) позволяет предположить, что процесс, состоящий из броуновских нулей стационарен в ослабленной форме. В самом деле, предположим, что где-то в промежутке между  $t = 0$  и  $t = T$  имеется хотя бы один нуль. Результатом такого предположения будет случайный процесс, зависящий от  $T$  как от дополнительного внешнего параметра. Я отмечал, что совместное распределение значений  $X(\tau + t_m)$  не зависит от  $t$  при условии, что все моменты времени  $\tau + t_m$  находятся между 0 и  $T$ . Таким образом, нестационарный процесс броуновских нулей неявно включает в себя целый класс случайных процессов, каждый из которых *условно* стационарен, чего часто бывает вполне достаточно.

Процессы этого класса так тесно взаимосвязаны, что в [352] я даже предложил рассматривать их как один *обобщенный* стохастический процесс, называемый *спорадическим процессом*. Отличие такого процесса от стандартного случайного процесса заключается в том, что мера  $\mu(\Omega)$  всего выборочного пространства  $\Omega$  бесконечна. То есть эту меру никак нельзя нормализовать к виду  $\mu(\Omega) = 1$ . О бесконечной мере  $\mu(\Omega)$  для случайных *переменных* писал еще Реньи [489]. Для того чтобы мера  $\mu(\Omega) = \infty$  не привела к катастрофе, в теории обобщенных случайных величин делается допущение о том, что эти величины наблюдаются только будучи обусловленными некоторым событием  $C$ , таким, что  $0 < \mu(C) < \infty$ .

Хотя применимость случайных переменных Реньи очень ограничена, спорадические функции оказываются иногда весьма полезными: в частности, с их помощью мне в [352] удалось избежать в нескольких случаях инфракрасной катастрофы, объяснив тем самым существование некоторых масштабно-инвариантных шумов с  $B \in [1, 2]$ .

**Эргодичность. Перемешивание.** Различным интерпретациям подвергается также и понятие эргодичности. В математической литературе понятие эргодичности включает в себя различные формы *перемешивания*. Существуют процессы с *сильным перемешиванием* и процессы со *слабым перемешиванием*. Различие между этими формами (если судить о нем по математическим трудам) может показаться весьма незначительным и далеким от реальных природных феноменов. Не позволяйте ввести себя в заблуждение — это не так. Например, масштабно-инвариантные шумы с  $0 < B < 1$  представляют собой

процессы со слабым перемешиванием и ни в коем случае не с сильным.

**Четвертое недоразумение (относительно возможности предельной сходимости к  $B(t)$ )**. Широко распространено мнение, согласно которому высказывание «процесс  $X(t)$  стационарен» равносильно утверждению о том, что его текущую сумму  $X^*(t) = \sum_{s_0}^t X(s)$  можно

нормализовать таким образом, чтобы она сходилась к броуновскому движению. Математикам давно известно, что это мнение лишено каких бы то ни было оснований (см. [177]), а во многих из прецедентных исследований настоящего эссе участвуют функции  $X(t)$ , которые ему прямо противоречат благодаря либо эффекту Ноя ( $\langle X^2(t) \rangle = \infty$ ), либо эффекту Иосифа (бесконечная зависимость, как в  $f^{-B}$ -шумах с  $B > 0$ ). Следует сказать, однако, что почти все мои прецедентные исследования были на некотором этапе *a priori* раскритикованы неким «экспертом», который утверждал, что исследуемые феномены явно нестационарны, и следовательно, мои стационарные модели изначально обречены на неудачу. Рассуждение ошибочное, но психологически очень значимое.

**Заключение.** Вокруг границы между математически стационарными и нестационарными процессами не прекращаются бурные семантические диспуты. На практике же граница оккупирована процессами, которые хотя и не отвечают нашим интуитивным представлениям о стационарных процессах, все же способны выступать в роли объектов научного исследования. Эти процессы весьма пригодились и мне — как в настоящем эссе, так и в остальной исследовательской работе.

**Лексические проблемы.** И снова возникает необходимость в новых терминах. Возьму на себя смелость порекомендовать термин *установившийся* в качестве а) синонима того, что математики называют «стационарный и такой, что сумма  $X^*(t)$  сходится к  $B(t)$ », и б) термина для обозначения того интуитивного понятия, которое исследователи-практики склонны именовать «стационарностью». Обратное понятие можно обозначить терминами *неустановившийся* или *блуждающий*.

В одной из своих ранних работ (а именно: в [373]) я предложил называть *установившиеся* процессы *лапласовыми* и *мягкими*. Последнее слово употреблено в значении «безопасный, легко контролируемый»; это значение показалось мне вполне подходящим, поскольку, имея дело с таким случайным процессом, можно не опасаться каких-либо сюрпризов с его стороны — не стоит ждать от него тех резких отклонений и разнообразных конфигураций, благодаря которым анализ блуждающих случайных процессов представляет собой более сложное, но и гораздо более интересное занятие.

## УСТОЙЧИВЫЕ ПО ЛЕВИ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ

Среди достоинств гиперболического распределения отметим непрезойденную формальную простоту и инвариантность при усечении (см. раздел МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ УСЕЧЕНИИ). Другие преобразования, оставляющие его инвариантным, нас сейчас не интересуют. Гораздо большее значение для нас имеют сейчас распределения, инвариантные при сложении. Гиперболическими они являются лишь асимптотически, а Поль Леви выбрал для них в свое время в качестве названия донельзя перегруженный термин: «устойчивые распределения». Он же ввел и понятие устойчивого процесса, в котором участвуют как гиперболическое, так и устойчивое распределения.

До публикации моих работ устойчивые случайные величины считались явлениями «патологическими» и даже «чудовищными»; единственное исключение составлял случайный вектор Хольтсмарка, о котором мы поговорим в подразделе 9. Я предложил некоторые области приложения устойчивых случайных величин, важнейшие из которых описаны в главах 31, 32 и 37; кроме того, ниже (подраздел 4) упоминается о возможности применения таких величин в генетике.

**Литература.** Существует огромное количество различных источников, но ни один из них нельзя считать удовлетворительным. В монографии Феллера ([148], том II) материал по устойчивости представлен, пожалуй, в самом полном объеме, однако он разбросан по всей книге, и порой очень трудно отыскать необходимые сведения. Книга Ламперти [284] может послужить неплохим введением в курс дела. Рекомендую также и работу Гнеденко и Колмогорова [172], несмотря на ее почтенный возраст. Много полезных подробностей можно найти у Лукача [320]. Оригинальные трактаты Леви [302, 304] вряд ли придутся по вкусу всем, поскольку эти великие научные труды являют собой яркие образцы авторского стиля (см. главу 40).

### *1. ГАУССОВЫ С. В. МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫ ПРИ СЛОЖЕНИИ*

Известно, что гауссово распределение обладает следующим свойством: возьмем две независимые гауссовы случайные величины  $G_1$  и  $G_2$  и запишем

$$\langle G_1 \rangle = \langle G_2 \rangle = 0; \quad \langle G_1^2 \rangle = \sigma_1^2; \quad \langle G_2^2 \rangle = \sigma_2^2;$$

тогда их сумма удовлетворяет равенству

$$\langle G_1 + G_2 \rangle = 0; \quad \langle (G_1 + G_2)^2 \rangle = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Что более важно, величина  $G_1 + G_2$  сама является гауссовой случайной величиной. Таким образом, гауссово свойство инвариантно при сложении независимых случайных величин. Иными словами, гауссову случайную величину можно рассматривать как возможное решение системы уравнений, состоящей из функционального уравнения

$$(L) \quad s_1 X_1 + s_2 X_2 = sX$$

и вспомогательного соотношения

$$(A : 2) \quad s_1^2 + s_2^2 = s^2.$$

В действительности же, только гауссово распределение удовлетворяет как уравнению  $(L)$ , так и соотношению  $(A : 2)$  (без учета масштаба).

Более того, если в качестве вспомогательного соотношения выступает  $\langle X^2 \rangle < \infty$ , то гауссова случайная величина опять оказывается единственным решением.

Функциональное уравнение  $(L)$ , для обозначения которого Леви использует термин *устойчивость*, подвергнуто весьма глубокому исследованию в его работе [302]. Во избежание возможной двусмысленности я использую в соответствующих случаях несколько громоздкую конструкцию *устойчивость по Леви*.

## 2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА КОШИ

Поскольку практически настроенные ученые не склонны подвергать сомнению соотношение  $\langle X^2 \rangle < \infty$ , широко распространено мнение о том, что гауссово распределение является единственным устойчивым распределением. Это определенно не соответствует истине, о чем нам первым поведал Коши еще в 1853 г. (см. [71], с. 206). Коши приводит в пример некую случайную величину (впервые рассмотренную Пуассоном и называемую теперь «приведенной переменной Коши»), которая удовлетворяет следующему равенству:

$$\Pr(X > -x) = \Pr(X < x) = \frac{1}{2} + \pi^{-1} \operatorname{tg}^{-1} x;$$

отсюда

$$\text{плотность Коши} = 1/[\pi(1+x^2)].$$

Коши показал, что эта случайная величина является решением системы уравнений, составленной из  $(L)$  и альтернативного вспомогательного соотношения

$$(A : 1) \quad s_1 + s_2 = s.$$

Для случайной величины Коши  $\langle X^2 \rangle = \infty$  или, точнее,  $\langle X \rangle = \infty$ . То есть для выражения такой очевидной вещи, как равенство масштаба



произведения случайной величины  $X$  на некоторое неслучайное число  $s$  произведению  $s$  на масштаб  $X$ , нам потребуется для измерения масштаба величина, отличная от среднеквадратического значения. Одним из кандидатов на эту роль является расстояние между квартилями  $Q$  и  $Q'$ , где  $\Pr(X < Q') = \Pr(X > Q) = 1/4$ .

Чаще всего случайная величина Коши используется в качестве контрпримера, как это сделано, например, в [33], с. 321–323. См. также [212].

**Геометрическая порождающая модель.** Вышеприведенную формулу  $\Pr(X < x) = 1/2 + \pi^{-1} \operatorname{tg}^{-1} x$  можно реализовать геометрически, разместив точку  $W$  с равномерным распределением вероятностей на окружности  $u^2 + v^2 = 1$  и определив  $X$  как абсциссу точки, в которой прямая, проходящая через начало координат  $O$  и точку  $W$ , пересекает прямую  $v = 1$ . Случайная величина  $Y$ , определяемая в этом же построении как ордината точки, в которой прямая, проходящая через  $O$  и  $W$ , пересекает прямую  $u = 1$ , имеет то же распределение, что и  $X$ . Поскольку  $Y = 1/X$ , получается, что величина, обратная случайной величине Коши, также является случайной величиной Коши.

Более того: всякий раз, когда вектор  $OW = (X, Y)$  является изотропно распределенным случайным вектором в плоскости, величина  $Y/X$  является случайной величиной Коши. В частности, отношение двух независимых гауссовых случайных величин есть случайная величина Коши.

### 3. ВОЗВРАЩЕНИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Составим систему из уравнения  $(L)$  и вспомогательного соотношения

$$(A : 0, 5) \quad s_1^{0,5} + s_2^{0,5} = s^{0,5}.$$

Решением этой системы будет случайная величина, плотность которой при  $x < 0$  равна нулю, а в остальных случаях имеет вид

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-1/2x) x^{-3/2}.$$

Величина  $p(x) dx$  представляет собой вероятность того, что броуновская функция, удовлетворяющая равенству  $B(0) = 0$ , удовлетворяет также равенству  $B(t) = 0$  при некотором значении  $t$  из интервала  $[x, x + dx]$ .

### 4. ОБОБЩЕННЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ ПО ЛЕВИ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Коши рассмотрел также обобщенное вспомогательное соотношение

$$(A : D) \quad s_1^D + s_2^D = s^D.$$

**Симметричные решения.** Основываясь на формальных расчетах, Коши утверждает, что система уравнений  $(L)$  и  $(A : D)$  имеет при любом значении  $D$  единственное решение: случайную величину, плотность которой имеет вид

$$\pi^{-2} \int_0^{\infty} \exp(-u^D) \cos(ux) du.$$

Пойа и Леви показывают, что при  $0 < D \leq 2$  предположение Коши и в самом деле подтверждается, а гауссово распределение и распределение Коши являются частными случаями этого правила. Однако при  $D > 2$  это предположение оказывается несостоятельным, поскольку в этом случае вышеприведенная формальная плотность принимает отрицательные значения, что есть абсурд.

**Крайние несимметричные решения.** Леви, кроме того, показывает, что система уравнений  $(L)$  и  $(A : D)$  допускает и *несимметричные* решения. В случае наиболее экстремально асимметричных решений порождающая функция (преобразование Лапласа) определена и равна  $\exp(g^D)$ .

**Другие несимметричные решения.** Общим решением системы уравнений  $(L)$  и  $(A : D)$  является взвешенная разность двух независимых одинаково распределенных решений с крайней асимметрией. Веса принято обозначать через  $\frac{1}{2}(1 + \beta)$  и  $\frac{1}{2}(1 - \beta)$ .

**Окончательное обобщение уравнения  $(L)$ .** При неизменном  $(A : D)$  заменим условие  $(L)$  условием

$$(L^*) \quad s_1 X_1 + s_2 X_2 = sX + \text{const.}$$

При  $D \neq 1$  такая замена ничего не меняет, однако при  $D = 1$  система допускает дополнительные решения, которые называются асимметричными случайными величинами Коши.

**Бактерии-мутанты.** В статье [377] я показал, что общее количество мутировавших бактерий в старой культуре (задача Луриа–Дельбрюка) представляет собой устойчивую по Леви случайную величину с крайней асимметрией.

## 5. ФОРМА УСТОЙЧИВЫХ ПО ЛЕВИ ПЛОТНОСТЕЙ

Если не считать трех исключений ( $D = 2$  с  $\beta = 0$ ,  $D = 1$  с  $\beta = 0$  и  $D = \frac{1}{2}$  с  $\beta = 1$ ), нам *не* известны устойчивые по Леви распределения в замкнутой аналитической форме, однако свойства этих простых исключений можно обобщить и на другие случаи.

Во всех крайних асимметричных случаях с  $0 < D < 1$  плотность при  $x < 0$  обращается в нуль.

В результате обобщения того факта, что гауссова плотность равна  $\exp(-1/2x^2)$ , мы имеем небольшой хвост крайних асимметричных случаев с  $1 < D < 2$ . Плотность здесь  $\propto \exp(-c|x|^{D/(D-1)})$ .

При  $x \rightarrow \infty$  плотность Коши  $\propto (\pi)^{-1}x^{-D-1}$ , а плотность возвращений броуновской функции  $\propto (2\pi)^{-1/2}x^{-D-1}$ . В общем виде, при любом  $D \neq 2$  плотность в длинном хвосте (или хвостах)  $\propto x^{-D-1}$ .

В иных случаях поведение плотности  $p(u)$  приходится находить численно. В [335] приведены графики для крайнего асимметричного случая, в [336] к ним добавлены примечания относительно очень близких к 2 значений  $D$ , а в [341] — графики для симметричного случая. Методы быстрого преобразования Фурье значительно облегчают эту задачу, см. [120, 121].

## 6. НЕРАВЕНСТВО СЛАГАЕМЫХ И ПРОИСТЕКАЮЩАЯ ИЗ НЕГО КЛАСТЕРИЗАЦИЯ

Пусть  $X_1$  и  $X_2$  независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности  $p(u)$ . Плотность вероятности величины  $X = X_1 + X_2$  имеет вид

$$p_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)p(u-y)dy.$$

Если известно значение суммы  $u$ , то плотность условного распределения каждого из слагаемых  $y$  равна  $p(y)p(u-y)/p_2(u)$ . Рассмотрим подробно форму этой плотности.

**Примеры.** Когда плотность  $p(u)$  является гауссовой плотностью с единичной дисперсией, т.е. унимодальной функцией (или функцией с одним максимумом), условное распределение также является гауссовым с центром в точке  $1/2u$ , а его дисперсия равна  $1/2$ , т.е. не зависит от  $u$  (см. раздел БРОУНОВСКИЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА, 3). При  $u \rightarrow \infty$  относительные значения слагаемых почти равны.

Когда плотность  $p(u)$  представляет собой приведенную плотность Коши, т.е. снова унимодальную функцию, следует различать два очень непохожих случая. При  $|u| \leq 2$ , что составляет половину всех значений  $u$ , условное распределение также унимодально, а наиболее вероятным значением снова является  $1/2u$ . В противоположном случае (при  $|u| > 2$ ) значение  $1/2u$  становится *наименее* вероятным (локально). При  $|u| = 2$  условное распределение разветвляется на две отдельных «огивы», центры которых расположены в окрестности точек  $y = 0$

и  $y = u$ . По мере того, как  $u \rightarrow \pm\infty$ , становится все труднее отличить эти огины от огины Коши с центрами в точках 0 и  $u$ .

Когда плотность  $p(u)$  представляет собой плотность возвращений броуновской функции, ситуация напоминает случай Коши, только еще более крайний, причем плотность условного распределения является бимодальной с вероятностью  $> 1/2$ .

Вывод: рассмотрим три последовательных возвращения в нуль некоторого случайного блуждания:  $T_{k-1}$ ,  $T_k$  и  $T_{k+1}$ . Если значение разности  $T_{k-1} - T_{k+1}$  велико, то точка среднего возвращения с *наибольшей* вероятностью располагается *чрезвычайно* близко либо к точке  $T_{k-1}$ , либо к  $T_{k+1}$ , вероятность же того, что она окажется где-нибудь посередине между крайними возвращениями, можно полагать *наименьшей*.  $\triangleleft$  Этот результат сродни одному знаменитому «противоестественному» правилу из теории вероятности: закону арксинуса Леви.  $\blacktriangleright$

Рассмотрим теперь условное распределение величины  $U$ , если известно, что сумма  $M$  величин  $U_g$  принимает очень большое значение  $u$ . В случае гауссова распределения результат, скорее всего, окажется таким: каждое слагаемое  $U_g$  будет приблизительно равно  $u/M$ . В случае же Коши (равно как и в случае броуновских возвращений) следует ожидать прямо противоположного результата: все слагаемые, кроме одного, будут очень малы.

**Несоответствие, заключенное в идее «одинаковых» вкладов в сумму.** Из того, что слагаемые *a priori* одинаковы (т. е. имеют одинаковое распределение), следует, что их значения могут *a posteriori* оказаться либо почти равными (как в случае гауссова распределения), либо в различной степени неравными (как в случае устойчивого по Леви распределения при очень большом значении суммы).

## 7. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. РОЛЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Дана бесконечная последовательность  $X_n$ , составленная из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Центральная предельная задача формулируется следующим образом: возможно ли выбрать такие веса  $a_n$  и  $b_n$ , чтобы сумма  $a_N \sum_1^N X_n - b_N$  имела нетривиальный предел при  $N \rightarrow \infty$ ?

В стандартном случае  $\langle X_n^2 \rangle < \infty$  ответ на этот вопрос стандартен и утвердителен:  $a_N = 1/\sqrt{N}$ ,  $b_N \sim \langle X_n \rangle \sqrt{N}$ , а предел является гауссовым.

Нестандартный случай  $\langle X_n^2 \rangle = \infty$  намного сложнее: а) выбор  $a_N$  и  $b_N$  не всегда возможен; б) когда выбор возможен, предел оказывается устойчивым негауссовым; в) для того, чтобы показатель предела был

равен  $D$ , достаточно, чтобы последовательность  $X_n$  имела асимптотически гиперболическое распределение с показателем  $D$  (см. главу 38); г) необходимое и достаточное условие приводится в источниках, переписанных в начале этого раздела.

## 8. УСТОЙЧИВЫЕ ПО ЛЕВИ ФУНКЦИИ ИЗ ПРЯМОЙ В ПРЯМУЮ

Эти функции представляют собой случайные функции со стационарными независимыми приращениями, причем величина приращений  $X(t) - X(0)$  является устойчивой по Леви случайной величиной. Масштабный коэффициент  $a(t)$ , благодаря которому величина  $[X(t) - X(0)]a(t)$  остается независимой от  $t$ , должен иметь вид  $a(t) = t^{-1/D}$ . Этот процесс является обобщением обыкновенного броуновского движения на случай  $D \neq 2$ .

Наиболее поразительное свойство функции  $X(t)$  заключается в том, что она разрывна и содержит скачки.

**Случай  $D < 1$ .** В этом случае  $X(t)$  не содержит ничего, кроме скачков, причем количество скачков, происходящих за интервал от  $t$  до  $t + \Delta t$  и имеющих абсолютное значение, превышающее  $u$ , представляет собой распределенную по закону Пуассона случайную величину с математическим ожиданием  $|\Delta t|u^{-D}$ .

Относительные количества положительных и отрицательных скачков равны, соответственно,  $1/2(1 + \beta)$  и  $1/2(1 - \beta)$ . Крайний асимметричный случай  $\beta = 1$  допускает только положительные скачки; такая функция называется *устойчивым субординатором* и служит для определения лестниц Леви, изображенных на рис. 399 и 400.

**Парадокс.** Поскольку  $u^{-D} \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow 0$ , общее ожидаемое количество скачков бесконечно, какой бы малой ни была величина  $\Delta t$ . То обстоятельство, что связанная с этим ожиданием вероятность также окажется бесконечной, представляется парадоксальным. Однако парадоксальность исчезает, как только мы обращаем внимание на то, что общее количество скачков, для которых  $u < 1$ , составляет конечную величину. Этот вывод выглядит вполне естественным, если отметить, что ожидаемая длина малого скачка конечна и пропорциональна

$$\int_0^1 Du^{-D-1}u \, du = D \int_0^1 u^{-D} \, du < \infty.$$

**Случай  $1 < D < 2$ .** В этом случае вышеприведенный интеграл расходится, т. е. общий вклад малых скачков составляет бесконечную величину. Вследствие этого функция  $X(t)$  содержит два члена, непрерывный и скачковый; каждый из членов бесконечен, однако сумма их конечна.

## 9. УСТОЙЧИВЫЕ ПО ЛЕВИ ВЕКТОРЫ И ФУНКЦИИ

Заменим случайную величину  $X$  в функциональном уравнении  $(L)$ , участвующем в определении устойчивости, случайным вектором  $X$ . Если задан некоторый единичный вектор  $V$ , то очевидно, что система уравнений  $(L)$  и  $(A : D)$  имеет элементарное решение — произведение вектора  $V$  на скалярную устойчивую случайную величину.

Леви [304] показывает, что общее решение есть просто сумма всех элементарных решений, каждое из которых соответствует своему направлению в пространстве и взвешено в соответствии с некоторым распределением по поверхности единичной сферы. Вклады этих решений могут быть дискретными (конечными или счетно бесконечными), либо бесконечно малыми. Для того, чтобы вектор  $X$  был изотропным, элементарные вклады должны быть распределены равномерно по всем направлениям.

**Устойчивые по Леви векторные функции от времени.** Подобно устойчивым скалярным функциям, векторные функции допускают разложение в сумму скачков, следующих гиперболическому распределению. Размеры и направления скачков определяются распределением по поверхности единичной сферы.

**Распределение Хольтсмарка.** Спектроскопические исследования Хольтсмарка [220] пережили свое время благодаря тому, что их результаты оказалось возможным переформулировать в терминах ньютоновского притяжения (см. [76]); до появления моих работ только в этих исследованиях фигурировал конкретный пример устойчивого по Леви распределения. Предположим, что в точке  $O$  имеется некая звезда, а в пространстве распределено (независимо друг от друга и с ожидаемой плотностью  $\delta$ ) еще некоторое количество звезд единичной массы. Какова общая сила притяжения, испытываемая звездой  $O$  со стороны этих звезд? Вскоре после того, как Ньютон открыл свой знаменитый обратно-квадратичный закон притяжения, преподобный Бентли написал ему письмо, в котором указал на то, что притяжение звезд, заключенных внутри узкого конуса  $d\Omega'$  с вершиной в точке  $O$ , имеет бесконечное математическое ожидание; то же можно сказать и о притяжении звезд, заключенных внутри узкого конуса  $d\Omega''$ , симметричного конусу  $d\Omega'$  относительно точки  $O$ . Бентли заключил, что разница между этими бесконечностями не определена.

При решении задачи Хольтсмарка (в том виде, в каком ее обычно формулируют) подобная трудность нам не грозит, так как здесь мы имеем дело не с самими математическими ожиданиями, а с разностями между действительными и ожидаемыми величинами притяжения. Для начала рассмотрим звезды, заключенные внутри области, ограниченной вышеописанным конусом угловой величины  $d\Omega$  и сферами радиусов  $r$

и  $r + dr$ . Каждая звезда притягивает с силой  $u = r^{-2}$ , а их количество представляет собой пуассонову случайную величину с ожиданием  $\delta|d\Omega|d(r^3) = \delta|d\Omega|d(u^{-3/2})$ . Следовательно, для разности между действительным притяжением и его математическим ожиданием имеем характеристическую функцию

$$\exp\left\{\delta|d\Omega| \int_0^{\infty} [\exp(i\zeta u) - 1 - i\zeta u] |d(u^{-3/2})|\right\}.$$

Как выясняется, эта разность соответствует устойчивой по Леви случайной величине с показателем  $D = 3/2$  и  $\beta = 1$ . Из подраздела 6 (см. выше) нам известно, что большое положительное значение  $u$  обусловлено, скорее всего, присутствием *одной-единственной* звезды вблизи точки  $O$  и не зависит от плотности звезд в других местах; распределение случайной величины  $U$  при очень больших  $u$  ведет себя как распределение величины притяжения ближайшей звезды.

Таким образом, общее избыточное притяжение представляет собой изотропный устойчивый по Леви вектор с  $D = 3/2$ .

Смысл устойчивости можно объяснить так: допустим, звезда  $O$  испытывает притяжение со стороны двух равномерно распределенных звездных облаков, состоящих, скажем, из красных и голубых звезд; тогда величины силы притяжения только красных звезд, только голубых звезд и всех звезд вместе различаются лишь масштабным коэффициентом, а не аналитической формой их распределений.

## 10. УСТОЙЧИВЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА В ПРЯМУЮ

Построение броуновской функции из пространства в прямую, предложенное Ченцовым [79], обобщено мною для устойчивого случая в [379].

## 11. РАЗМЕРНОСТИ

Самые ранние вычисления размерности устойчивого процесса для негауссова случая можно найти в работах [420] и [39, 41]. Полная библиография приведена у Прюитта и Тейлора [484].

## 12. МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРИ ВЗВЕШЕННОМ СЛОЖЕНИИ

В разделе НЕЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЫ (подраздел 4) описывается представленное в статьях [376, 378] семейство обобщений устойчивых по Леви случайных величин. Эти обобщения основываются на

обобщении условия устойчивости по Леви ( $L$ ), заключающемся в замене весов  $s_i \mu$  случайными величинами.

## ФРАКТАЛЫ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ)

Хотя в главе 3 мы и определили термин *фрактал*, я все же продолжаю считать, что наша тема представляет собой как раз такой случай, когда лучше всего обойтись совсем без определения (в эссе 1975 г., кстати, никакого определения не было).

Самый простой довод в пользу такого нежелания состоит в том, что настоящее определение, как мы вскоре увидим, исключает из семейства фракталов кое-какие множества, которые нам не хотелось бы терять.

Имеется и более фундаментальное соображение: мое определение включает размерности  $D$  и  $D_T$ , однако понятие фрактальной структуры является, по всей видимости, более базовым, чем  $D$  или  $D_T$ . По сути, понятия размерностей получили неожиданное новое применение и, как следствие, бóльшую значимость!

Иными словами, должна существовать возможность определить фрактальную структуру как инвариантную под воздействием некоторой соответствующей определенным требованиям совокупности гладких преобразований. Задача эта, однако, едва ли окажется простой. Для того чтобы оценить ее сложность в стандартном контексте, вспомним хотя бы о том, что под некоторые определения *комплексного числа* подпадают и вещественные числа! На данном этапе основной для нас является необходимость провести границу между простыми фрактальными множествами и стандартными множествами евклидовой геометрии. Этой необходимости мое определение отвечает.

Мое очевидное отсутствие энтузиазма в отношении определения фракталов было, несомненно, отмечено (и, надеюсь, правильно понято) многими выдающимися математиками, не обнаружившими такового в эссе 1975 г. Тем не менее, мы вполне можем предпринять кое-какие шаги для уточнения существующего определения.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Впервые *фрактальное множество* было определено в предисловии к эссе 1975 г. как множество в метрическом пространстве, для которого верно следующее неравенство:

$$D > D_T,$$

где  $D$  — размерность Хаусдорфа–Безиковича, а  $D_T$  — топологическая размерность.



Фракталы, описанные в этой книге, представляют собой, за одним исключением, множества в евклидовом пространстве размерности  $E < \infty$ . Их можно назвать евклидовыми фракталами. Исключение представлено в главе 28: броуновскую береговую линию на сфере можно рассматривать как риманов фрактал.

## 2. КРИТИКА. РАЗМЕРНОСТИ ЧАСТИЧНО АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И ЧИСТО ФРАКТАЛЬНЫЕ

Вышеприведенное математическое определение является *строгим*, но *не окончательным*. Желая уточнить его, мы могли бы предложить несколько, на первый взгляд, вполне естественных поправок, однако здесь следует соблюдать известную осторожность.

Давным-давно, в поисках подходящей меры для свойств, которые впоследствии назовут фрактальными, я решил остановиться на размерности Хаусдорфа–Безиковича  $D$ , так как она была изучена основательнее остальных. Мне, однако, до сих пор не дает покоя то обстоятельство, что авторы трактатов, подобных [141], считают своим долгом вводить все новые и новые бесчисленные варианты мер, отличающихся от  $D$  весьма незначительными деталями. Как бы то ни было, рассмотрение этих деталей можно пока отложить.

Кроме того, при наличии нескольких возможных вариантов размерностей *необходимо* избегать тех, что связаны с явно внешними характеристиками. Наиболее же существенно то, что в понятии размерности  $D$  совершенно отсутствует арифметический аспект, чего нельзя сказать ни о размерности Фурье  $D_F$  (с. 511), ни о показателе Безиковича–Тейлора (с. 510, см. также [251], с. 89).

## 3. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ СЛУЧАИ ХАУСДОРФА

Промежуточные случаи всегда очень проблематичны. Неспрямляемую кривую с размерностью  $D = 1$  можно *a priori* назвать как фрактальной, так и нефрактальной; то же верно и в случае любого множества, для которого  $D = D_T$ , а хаусдорфова мера, полученная с помощью пробной функции  $h(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ , бесконечна (не может обратиться в нуль). Приведу еще более раздражающий пример: канторова чертова лестница (см. рис. 125) на интуитивном уровне воспринимается как фрактал, поскольку она самым очевидным образом демонстрирует различные масштабы длины. Меня решительно не устраивает, что ее нельзя считать фракталом, пусть даже и  $D = 1 = D_T$  (см. с. 541). За неимением иных критериев, я провожу границу, руководствуясь соображениями краткости определения. Если (и когда) будет предложен другой достойный критерий, определение нужно будет соответствующим образом изменить. См. также раздел ХАУСДОРФОВА МЕРА. . . , 8.

#### 4. ВАРИАНТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие *емкостной размерности* или *размерности Фростмана* (см. ПОТЕНЦИАЛЫ И ЕМКОСТИ, 4) удовлетворяет критерию, установленному в подразделе 2 данного раздела, просто потому, что ее значение совпадает со значением  $D$ . Следовательно, можно сформулировать альтернативное определение фрактала как множества, *емкостная размерность которого больше его топологической размерности*.

#### 5. ФРАКТАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА, ВНУТРЕННИЕ И ЛОКАЛЬНЫЕ

Некоторое количество сырого материала на эту тему можно найти в главе XII «Фракталов» 1977 г.

### ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ. УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ И ИНФРАКРАСНАЯ КАТАСТРОФЫ

Комплексная функция Вейерштрасса имеет вид

$$W_0(t) = (1 - w^2)^{-1/2} \sum_0^{\infty} w^n \exp(2\pi i b^n t),$$

где  $b > 1$  — некоторое вещественное число, а  $w$  записывается либо как  $w = b^{-H}$  ( $0 < H < 1$ ), либо как  $w = b^{D-2}$  ( $1 < D < 2$ ). Вещественная и мнимая части функции  $W_0(t)$  называются, соответственно, косинусоидой и синусоидой Вейерштрасса.

Функция  $W_0(t)$  непрерывна, но нигде не дифференцируема. Однако ее формальное обобщение на случай  $D < 1$  и непрерывно, и дифференцируемо.

Кроме самой функции  $W_0(t)$  в настоящем разделе рассматриваются некоторые ее варианты; необходимость в их представлении обусловлена тем новым смыслом, который придала функции Вейерштрасса теория фракталов.

**Частотный спектр функции  $W_0(t)$ .** Термин «спектр», на мой взгляд, перегружен значениями. Под *частотным спектром* понимается множество допустимых значений частоты  $f$  безотносительно к амплитудам соответствующих составляющих.

Частотный спектр периодической функции представляет собой последовательность положительных целых чисел. Частотный спектр броуновской функции — это  $\mathbb{R}^+$ . Частотный же спектр функции Вейерштрасса есть дискретная последовательность  $b^n$  от  $n = 1$  до  $n = \infty$ .

**Энергетический спектр функции  $W_0(t)$ .** Под энергетическим спектром понимается множество допустимых значений частоты  $f$  вместе со значениями энергии (квадратами амплитуд) соответствующих составляющих. На каждое значение частоты вида  $f = b^n$  в функции  $W_0(t)$  имеется спектральная линия энергии вида  $(1 - w^2)^{-1} w^{2n}$ . Следовательно, суммарное значение энергии на частотах  $f \geq b^n$  сходится и пропорционально  $w^{2n} = b^{-2nH} = f^{-2H}$ .

**Сравнение с дробным броуновским движением.** Суммарная энергия пропорциональна  $f^{-2H}$  еще в нескольких рассмотренных нами ранее случаях: а) дробные периодические случайные функции Фурье–Броуна–Винера, допустимые частоты для которых имеют вид  $f = n$ , а соответствующие коэффициенты Фурье равны  $n^{H-1/2}$ ; б) случайные процессы с непрерывной спектральной плотностью совокупности, пропорциональной  $2H f^{-2H-1}$ . Последние процессы суть не что иное, как дробные броуновские функции  $B_H(t)$ , описанные в главе 27. Например, при  $H = 1/2$  можно обнаружить кумулятивный спектр функции Вейерштрасса ( $f^{-1}$ ) в обыкновенном броуновском движении, спектральная плотность которого пропорциональна  $f^{-2}$ . Существенное различие: броуновский спектр абсолютно непрерывен, тогда как спектры функций Фурье–Броуна–Винера и Вейерштрасса дискретны.

**Недифференцируемость.** Для доказательства отсутствия у функции  $W_0(t)$  конечной производной при любом значении  $t$  Вейерштрассу пришлось объединить два следующих условия: а)  $b$  — нечетное целое число, вследствие чего функция  $W_0(t)$  представляет собой ряд Фурье, и б)  $\log_b(1 + 3\pi/2) < D < 2$ . Необходимое и достаточное условия ( $b > 1$  и  $1 < D < 2$ ) взяты нами из статьи Харди [194].

**Расходимость энергии.** Привычному к спектрам физику условия Харди представляются очевидными. Применяя эмпирическое правило, гласящее, что производная функции вычисляется умножением ее  $k$ -го коэффициента Фурье на  $k$ , физик находит для формальной производной функции  $W_0(t)$ , что квадрат амплитуды коэффициента Фурье с  $k = b^n$  равен  $(1 - w^2)^{-1} w^{2n} b^{2n}$ . Так как совокупная энергия на частотах, больших  $b^n$ , бесконечна, физику становится ясно, что производную  $W'_0(t)$  определить невозможно.

Интересно отметить, что Риман в поисках примера недифференцируемости пришел к функции  $R(t) = \sum_1^{\infty} n^{-2} \sin(2\pi n^2 t)$ , энергия спектра которой на частотах, больших  $f = n^2$ , пропорциональна  $n^{-3} = f^{-2H}$ , где  $H = 3/4$ . Таким образом, применяя то же эвристическое рассуждение, можно предположить, что производная  $R'(t)$  неопределима, а значит, функция  $R(t)$  недифференцируема. Заключение это верно лишь

отчасти, поскольку при определенных значениях  $t$  производная  $R'(t)$  все-таки существует (см. [169, 528]).

**Ультрафиолетовая расходимость / катастрофа.** Термин «катастрофа» появился в физике в первом десятилетии XX века, когда Рэлей и Джинс независимо друг от друга разработали теорию излучения абсолютно черного тела, согласно которой энергия частотного диапазона ширины  $df$  в окрестности частоты  $f$  пропорциональна  $f^{-4}$ . Это означает, что совокупная энергия спектра на высоких частотах бесконечна — что оказывается весьма катастрофичным для теории. Поскольку источником неприятностей являются частоты, лежащие за ультрафиолетовой частью спектра, явление получило название *ультрафиолетовой (УФ) катастрофы*.

Всем известно, что Планк построил свою квантовую теорию на руинах, в которые обратила теорию излучения именно УФ-катастрофа.

**Историческое отступление.** Отметим (хотя я не совсем понимаю, почему *никто* не сделал этого раньше; во всяком случае, в доступных мне источниках я ничего похожего не обнаружил), что причиной смерти как старой физики (†1900), так и старой математики (†1875) является одна и та же расходимость, подорвавшая их веру в то, что непрерывные функции просто обязаны быть дифференцируемыми. Физики отреагировали простым изменением правил игры, математикам же пришлось научиться жить с недифференцируемыми функциями и их формальными производными. (Последние представляют собой единственный часто применяемый в физике пример обобщенной функции Шварца.)

**В поисках масштабно-инвариантного дискретного спектра. Инфракрасная расходимость.** Хотя частотный спектр броуновской функции непрерывен, масштабно-инвариантен и существует при  $f = 0$ , частотный спектр функции Вейерштрасса, соответствующей тому же значению  $H$ , дискретен и ограничен снизу значением  $f = 1$ . Наличие нижней границы обусловлено исключительно тем обстоятельством, что число  $b$  у Вейерштрасса изначально было целым, а функция — периодической. Для устранения этого обстоятельства следует, очевидно, позволить  $n$  принимать любое значение от  $-\infty$  до  $+\infty$ . А для того, чтобы энергетический спектр стал масштабно-инвариантным, достаточно сопоставить каждой частотной компоненте  $b^n$  амплитуду  $w^n$ .

К сожалению, получаемый в результате ряд расходится, и повинны в этом низкочастотные компоненты. Такой дефект называется *инфракрасной (ИК) расходимостью* (или «катастрофой»). Как бы то ни было, с этой расходимостью приходится мириться, поскольку иначе нижняя граница  $f = 1$  вступает в противоречие с самоподобием, присущим энергетическому спектру  $f^{-2H}$ .

**Модифицированная функция Вейерштрасса, самоаффинная относительно фокального времени  $t = 0$ .** Самая простая процедура, позволяющая продолжить частотный спектр  $f^{-2H}$  функции Вейерштрасса до значения  $f = 0$  и избежать при этом катастрофических последствий, состоит из двух этапов: *сначала* получаем выражение  $W_0(0) - W_0(t)$ , и лишь *затем* позволяем  $n$  принимать любое значение от  $-\infty$  до  $\infty$ . Добавочные члены, соответствующие значениям  $n < 0$ , при  $0 < H < 1$  сходятся, а их сумма непрерывна и дифференцируема. Модифицированная таким образом функция

$$W_1(t) - W_1(0) = (1 - w^2)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} w^n [\exp(2\pi i b^n t) - 1]$$

по-прежнему является непрерывной, но нигде не дифференцируемой. Вдобавок, она масштабно-инвариантна в том смысле, что

$$\begin{aligned} W_1(tb^m) - W_1(0) &= (1 - w^2)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} w^{-m} w^{n+m} [\exp(2\pi i b^{n+m} t) - 1] = \\ &= w^{-m} [W_1(t) - W_1(0)]. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $w^m [W_1(b^m t) - W_1(0)]$  не зависит от  $m$ . Можно сказать иначе: при  $r = b^m$  функция  $r^{-H} [W_1(rt) - W_1(0)]$  не зависит от  $h$ . То есть функция  $W_1(r) - W_1(0)$ , ее вещественная и мнимая части самоаффинны относительно значений  $r$  вида  $b^{-m}$  и фокального времени  $t = 0$ .

Подробное исследование функций Вейерштрасса  $W_1(t)$  (модифицированных) в сопровождении очень наглядной и информативной графики дается в работе Берри и Льюиса [26].

**Гауссовы случайные функции с обобщенным спектром Вейерштрасса.** Следующим шагом на пути к реализму и широкой применимости является рандомизация обобщенной функции Вейерштрасса. Простейший и наиболее естественный метод заключается в умножении ее коэффициентов Фурье на независимые комплексные гауссовы случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Вещественная и мнимая части получаемой в результате функции могут с полным правом называться *функциями Вейерштрасса–Гаусса (модифицированными)*. В некоторых смыслах эти функции можно считать приближенными дробными броуновскими функциями. Когда значения  $H$  совпадают, их спектры настолько похожи, насколько позволяет то обстоятельство, что один из этих спектров непрерывен, а другой дискретен. Более того, к функциям Вейерштрасса–Гаусса применимы результаты Орея [457] и Маркуса [412] (см.

с. 490), а фрактальные размерности их множеств уровня совпадают с фрактальными размерностями множеств уровня дробных броуновских функций.

**Фрактальные свойства.** Согласно теореме, доказанной в работах [317] и [30] (см. раздел ЭВРИСТИКА ЛИПШИЦА – ГЁЛЬДЕРА), фрактальная размерность графика функции с некоторым показателем  $H$ , удовлетворяющей при всех  $x$  условию Липшица, находится в интервале от 1 до  $2 - H$ . Известно, что в случае броуновской функции с тем же кумулятивным спектром  $f^{-2H}$  размерность принимает наибольшее возможное значение  $2 - H = D$ . Я предполагаю, что то же верно и для кривой Вейерштрасса. А размерность ее нуль-множества равна  $1 - H$ .

**Нуль-множества родственных функций.** Функции Радемахера представляют собой «ступенчатые» варианты синусоид вида  $\sin(2\pi b^n t)$ , где  $b = 2$ . Когда синус положителен (отрицателен, обращается в нуль), значение функции Радемахера равно 1 (соответственно,  $-1$  и 0) (см. [616], I, с. 202). Естественным обобщением функции Вейерштрасса является ряд,  $n$ -й член которого представляет собой произведение  $w^n$  на  $n$ -ю функцию Радемахера. Эта обобщенная функция разрывна, однако ее спектральный показатель по-прежнему равен  $2H$ . Учитывая прецедент в лице дробного броуновского движения, можно предположить, что размерность нуль-множеств функции Вейерштрасса – Радемахера окажется равной  $1 - H$ . Это предположение находит подтверждение в [31], однако только для целочисленных  $1/H$ .

Сингх [526] упоминает о многих других вариантах функции Вейерштрасса. Размерность  $D$  нуль-множеств некоторых из них легко поддается оценке. Вообще, эта тема явно заслуживает более подробного исследования с учетом достижений современной теоретической мысли.

## ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ И КОХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Классическое определение *характеристической* функции  $J(t)$  при заданном множестве  $S$  имеет следующий вид:  $J(x) = 1$ , если  $x \in S$ , и  $J(x) = 0$ , если  $x \notin S$ . Когда множество  $S$  представляет собой канторово множество, решетку (салфетку или ковер) Серпинского, фрактальную сеть или любое множество из нескольких других классов фракталов, функция  $J(x)$  не совсем удобна. На мой взгляд, часто бывает удобнее заменить функцию  $J(x)$  другой функцией,  $C(x)$ , которую ввел я и которую предлагаю назвать *кохарактеристической*.

Функция  $C(x)$  представляет собой случайно взвешенное среднее характеристических функций пустот множества  $S$ . Иными словами, в каждом отдельном пустом промежутке  $C(x)$  постоянна, а ее значения

в других пустотах являются независимыми случайными величинами с одинаковым распределением.

Под старым и часто неверным названием *ядерной функции* функция  $C(x)$  вводится и исследуется в работах [347, 352, 357].

## ХАУСДОРФОВА МЕРА И РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА – БЕЗИКОВИЧА

В качестве удобных источников общих сведений по теме рекомендую [231], [35], [497], [3].

### 1. МЕРА КАРАТЕОДОРИ

Кантору приходила в голову мысль о том, что «при исследовании размерностей непрерывных множеств невозможно обойтись без общего понятия объема или величины», однако он, по всей видимости, не уделил ей должного внимания. Лебег полагает, что, имея Кантор полное представление о сложности стоящей перед ним задачи, ему вряд ли удалось бы достичь сколько-нибудь значительных результатов. Эта мысль получила дальнейшее развитие в работе Каратеодори [67] и была впоследствии воплощена Хаусдорфом [203].

Классическая процедура оценки площади плоской фигуры начинается с аппроксимации множества  $S$  с помощью набора очень маленьких квадратов; далее сторона каждого квадрата возводится в степень  $D = 2$  и полученные результаты складываются. Каратеодори [67] расширяет рамки этого традиционного подхода. Заменяя квадраты дисками, он избегает зависимости от координатных осей; кроме того, с самого начала предполагается, что мы не знаем, является ли множество  $S$  стандартной евклидовой фигурой известной размерности, вложенной в известное пространство  $\mathbb{R}^E$ .

Заметим теперь, что если плоскую фигуру, вложенную в трехмерное пространство, можно покрыть дисками, то ее *a fortiori* можно покрыть шарами, экваторами которых являются эти диски. Следовательно, если мы не хотим заранее считать множество  $S$  плоским, нам достаточно покрыть его вместо дисков шарами. Если же  $S$  и в самом деле является поверхностью, ее приближенную меру можно получить простым сопоставлением каждому шару выражения вида  $\pi \rho^2$  и последующим сложением этих выражений. В более общем виде, для получения меры какой-либо  $d$ -мерной фигуры следует складывать выражения вида  $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$ ; входящая сюда функция  $\gamma(d) = [\Gamma(1/2)]^d / \Gamma(1 + d/2)$  была определена ранее в этой главе как протяженность шара единичного радиуса. На этом основании Каратеодори [67] распространяет понятия «длины» и «площади» и на нестандартные фигуры.

## 2. ХАУСДОРФОВА МЕРА

Хаусдорф [203] расширяет определение Каратеодори, допуская возможность дробного значения  $d$  (функция  $\gamma(d)$  записывается таким образом, что она при этом продолжает иметь смысл). Таким образом, мы больше не ограничены степенями  $\rho$ , а вольны использовать любую положительную пробную функцию  $h(\rho)$ , которая стремится к нулю вместе с  $\rho$ .

Более того, поскольку шар представляет собой всего лишь множество точек, расстояние до которых от центра  $\omega$  не превышает заданного радиуса  $\rho$ , шар продолжает оставаться определенным даже в случае неевклидова пространства  $\Omega$  — при условии, что в этом пространстве определено расстояние. Как мы уже отмечали, такие пространства называются метрическими, следовательно, и хаусдорфова мера представляет собой метрическое понятие.

Если задана некоторая пробная (или «калибровочная») функция  $h(\rho)$ , то можно сказать, что мера конечного покрытия множества  $S$  шарами радиуса  $\rho_m$  равна  $\sum h(\rho_m)$ . Для получения наиболее экономичного покрытия мы рассматриваем все покрытия шарами, радиус которых меньше  $\rho$ , и образуем инфимум

$$\inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m).$$

При  $\rho \rightarrow 0$  ограничение  $\rho_m < \rho$  становится чрезвычайно жестким. То есть выражение  $\inf \sum h(\rho_m)$  может только возрастать; у него есть предел, который имеет вид

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m).$$

Этот предел может быть конечным положительным, отрицательным или нулевым. Он определяет  $h$ -меру множества  $S$ .

Если  $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$ , то  $h$ -мера называется  $d$ -мерной. Точнее говоря, из-за префактора  $\gamma(d)$   $h$ -мера является нормированной  $d$ -мерной мерой.

Если  $h(\rho) = 1/\ln|\rho|$ , то  $h$ -мера называется логарифмической.

## 3. ВНУТРЕННЯЯ ПРОБНАЯ ФУНКЦИЯ МНОЖЕСТВА

Функцию  $h(\rho)$  можно назвать *внутренней* для множества  $S$  и обозначить как  $h_S(\rho)$ , если  $h_S$ -мера  $S$  положительна и конечна. Эту меру можно назвать *фрактальной мерой* множества  $S$ .

Для стандартных фигур евклидовой геометрии внутренняя пробная функция всегда имеет вид  $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ , где  $D$  — некоторое целое число. Хаусдорф показал, что внутренней для канторовых пылей и



кривых Коха является функция  $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$  с нецелочисленным значением  $D$ .

Типичные случайные фракталы, пусть даже и статистически самоподобные, также обладают внутренней функцией  $h_S(\rho)$ , однако она имеет более сложный вид — например,  $h_S(\rho) = \rho^D |\ln \rho|$ . В этом случае  $h$ -мера множества  $S$  относительно функции  $h(\rho) = \gamma(D)\rho^D$  обращается в нуль, т. е. фигура содержит меньше «вещества», чем если бы она была  $D$ -мерной, но больше, чем если бы она была  $D - \varepsilon$ -мерной. В качестве примера можно привести траекторию броуновского движения на плоскости, внутренняя функция для которого, согласно Леви, имеет вид  $h_S(\rho) = \rho^2 \ln \ln(1/\rho)$ . См. [560].

Поскольку двумерная мера любого ограниченного множества на плоскости конечна, пробные функции вида  $\rho^2 / \ln(1/\rho)$  не могут быть внутренними ни для какого плоского множества.

Автором (либо соавтором) многих работ, посвященных определению внутренних функций  $h_S(\rho)$  случайных множеств, является С. Дж. Тейлор; особо рекомендую обратить внимание на статью [484] (написанную им в соавторстве с У. Э. Приюттом).

#### 4. РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Если известно, что множество  $S$  двумерно, вполне достаточно оценить хаусдорфову  $h$ -меру для  $h(\rho) = \pi\rho^2$ . Однако определение хаусдорфовой меры сформулировано таким образом, что предварительного знания размерности  $D$  не требуется. Имея дело со стандартной фигурой неизвестной размерности, мы будем оценивать ее меру для всех пробных функций  $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$ , где  $d$  — целое число. Если длина фигуры бесконечна, а объем равен нулю, то она может быть только двумерной.

Безикович распространил суть последнего заключения на случаи, в которых показатель  $d$  не является целым числом, а множество  $S$  — стандартной фигурой. Он показал, что для каждого множества  $S$  существует такое вещественное значение  $D$ , что  $d$ -мера этого множества при  $d < D$  бесконечна, а при  $d > D$  обращается в нуль.

*Эта величина  $D$  и называется размерностью Хаусдорфа–Безиковича множества  $S$ .*

Для физика это означает, что величина  $D$  представляет собой *критическую* размерность.

$D$ -мерная хаусдорфова мера  $D$ -мерного множества  $S$  может быть либо равна нулю, либо бесконечна, либо положительна и конечна. Хаусдорф ограничился только последним, самым простым, случаем и показал, что в эту категорию входят канторовы множества и кривые Коха. Если множество  $S$  ко всему прочему еще и самоподобно, легко заметить, что его размерность подобия должна быть равна  $D$ . С другой стороны,

мы знаем, что типичные случайные множества имеют в качестве естественной размерности нулевую меру.

Долгое время Безикович являлся автором или соавтором почти всех публикуемых по данной теме работ. Если Хаусдорфа можно назвать отцом нестандартной размерности, то Безикович, несомненно, заслужил себе звание ее матери.

**Коразмерность.** Когда в роли пространства  $\Omega$  выступает  $\mathbb{R}^E$ ,  $D \leq E$ , а разность  $E - D$  называется *коразмерностью*.

## 5. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ (СЛОЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ)

Рассмотрим множества  $S_1$  и  $S_2$ , принадлежащие, соответственно,  $E_1$ -пространству и  $E_2$ -пространству, и обозначим через  $S$  множество в  $E$ -пространстве ( $E = E_1 + E_2$ ), представляющее собой произведение множеств  $S_1$  и  $S_2$ . (Если  $E_1 = E_2 = 1$ , то  $S$  — это множество расположенных на плоскости точек  $(x, y)$ , причем  $x \in S_1$  и  $y \in S_2$ .)

Эмпирическое правило гласит, что если множества  $S_1$  и  $S_2$  «независимы», то размерность множества  $S$  равна сумме размерностей множеств  $S_1$  и  $S_2$ .

Понятие «независимости», входящее в это правило, оказывается неожиданно сложно сформулировать и представить в общем виде. См. [413, 414], [204] и [416]. К счастью, в подобных прецедентных исследованиях (в таких, например, какие мы рассматриваем в настоящем эссе) нас, как правило, спасает интуиция.

## 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОЖЕСТВ (СЛОЖЕНИЕ КОРАЗМЕРНОСТЕЙ)

Эмпирическое правило выглядит следующим образом: если  $S_1$  и  $S_2$  суть независимые множества в  $E$ -пространстве, и

$$\text{коразмерность}(S_1) + \text{коразмерность}(S_2) < E,$$

то левая часть этого неравенства почти наверное равна коразмерности  $S_1 \cap S_2$ . Если сумма коразмерностей больше  $E$ , то размерность пересечения почти наверное равна нулю.

В частности, два множества одинаковой размерности не пересекаются, если  $D \leq E/2$ . Размерность  $E = 2D$  можно, таким образом, назвать *критической*.

Примечательно, что два броуновских следа (при том, что размерность броуновского следа  $D = 2$ ) пересекаются при  $E < 4$  и совершенно не соприкасаются при  $E \geq 4$ .

Правило очевидным образом распространяется и на пересечения более чем двух множеств.

**Самопересечения.** Множество  $k$ -кратных точек  $S$  можно рассматривать, как пересечение  $k$  реплик  $S$ . Напрашивается предположение, что, с точки зрения размерности пересечения, упомянутые  $k$  реплик можно считать независимыми. По крайней мере, в одном случае эта догадка оказывается верной. С. Дж. Тейлор в работе [561] исследует следы броуновского движения и движения Леви в  $\mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^2$  (обобщая результаты, полученные Дворжецким, Эрдешем и Какутани). Размерность следа равна  $D$ , а размерность множества, состоящего из его  $k$ -кратных точек, составляет  $\max[0, E - k(E - D)]$ . Тейлор предположил, что этот результат верен в  $\mathbb{R}^E$  для всех  $k$  вплоть до  $k = \infty$ .

## 7. ПРОЕКЦИИ МНОЖЕСТВ

Эмпирическое правило таково: когда фрактал  $S$  размерности  $D$  проецируется вдоль независимого от  $S$  направления на евклидово подпространство размерности  $E_0$ , для проекции  $S^*$  верно равенство:

$$\text{размерность } S = \min(E_0, D).$$

**Приложение.** Пусть  $x_1 \in S_1$  и  $x_2 \in S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — фракталы в  $\mathbb{R}^E$  с размерностями  $D_1$  и  $D_2$ . Через  $a_1$  и  $a_2$  обозначим некие неотрицательные вещественные числа и определим множество  $S$  как множество, составленное из точек вида  $x = a_1x_1 + a_2x_2$ . Размерность  $D$  этого множества удовлетворяет неравенству:

$$\max(D_1, D_2) \leq D \leq \min(E, D_1 + D_2).$$

Для доказательства находим прямое произведение  $\mathbb{R}^E$  на  $\mathbb{R}^E$  и проецируем.

В случае независимости множеств скорее всего подойдет и верхний предел размерности. При  $D = E = 1$  множество  $S$  является либо фракталом, либо множеством с интервалами.

## 8. СУБОРДИНАЦИЯ МНОЖЕСТВ (УМНОЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТЕЙ)

См. главу 32.

## 9. СУБРАЗМЕРНОСТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Если внутренняя пробная функция множества  $S$  имеет вид  $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ , свойства фрактала полностью описываются его размерностью  $D$ . Если же

$$h_S(\rho) = \rho^D [\ln(1/\rho)]^{\Delta_1} [\ln \ln(1/\rho)]^{\Delta_2},$$

то описание фрактальных свойств множества  $S$  оказывается более громоздким. Одной размерностью в этом случае не обойтись, требуется

последовательность  $D, \Delta_1, \Delta_2$ . Величины  $\Delta_m$  можно назвать *субординатными размерностями* или *субразмерностями*.

Субразмерности в состоянии пролить свет на вопрос, следует ли считать фракталами пограничные множества, описанные в разделе ФРАКТАЛЫ, 3. Возможно, имеет смысл называть фракталами любое множество  $S$ , размерность  $D$  которого равна  $D_T$ , но хотя бы одна субразмерность  $\Delta$  отлична от нуля.

## ЭВРИСТИКА ЛИПШИЦА – ГЁЛЬДЕРА

Фрактальная размерность является по своему происхождению локальным свойством, несмотря на то, что в настоящем эссе локальные свойства оказывают влияние на свойства глобальные. Таким образом, имея дело с графиком во всех иных отношениях произвольной непрерывной функции  $X(t)$ , следует соотносить размерность  $D$  с другими локальными свойствами. Одним из наиболее полезных локальных свойств является показатель Липшица–Гёльдера (ЛГ)  $\alpha$ . Суть условия ЛГ при  $t+$  состоит в том, что

$$X(t) - X(t_0) \sim |t - t_0|^\alpha \quad \text{при } 0 < t - t_0 < \varepsilon;$$

аналогично оно выглядит и для случая  $t-$ . Глобальный ЛГ-показатель в интервале  $[t', t'']$  имеет вид  $\lambda[t', t''] = \inf_{t' \leq t \leq t''} \alpha$ . Если функция  $X(t)$  не является постоянной,  $\lambda \leq 1$ .

**ЛГ-эвристика и размерность  $D$ .** Если известен показатель  $\alpha$ , то количество квадратов со стороной  $r$ , необходимых для покрытия графика функции  $X$  между моментами времени  $t$  и  $t+r$ , приблизительно равно  $r^{\alpha-1}$ . Таким образом, можно покрыть график функции  $X(t)$  на участке  $t \in [0, 1]$  с помощью  $N$  квадратов и приблизительно оценить размерность функции как  $D = \ln N / \ln(1/r)$ . Этот способ оценки  $D$  мы будем называть *эвристикой Липшица–Гёльдера*. Он устойчив и весьма эффективен.

**Примеры.** Если функция  $X$  дифференцируема для всех  $t$  между 0 и 1, а точки, в которых  $X'(t) = 0$ , в расчет не принимаются, то на всем интересующем нас интервале  $\alpha = 1$ , и количество квадратов, необходимых для покрытия графика функции, равно  $N \sim r^{\alpha-1}(1/r) = r^{-1}$ . Отсюда  $D = 1$ , что, конечно же, верно.

Если  $X(t)$  – броуновская функция (обыкновенная или дробная), то можно показать, что  $\alpha \equiv \lambda = H$ . Эвристическое значение  $N$  приблизительно равно  $r^{H-1-1}$ , т.е.  $D = 2 - H$ , что опять же согласуется с известной размерностью  $D$ .

$\triangleleft$  Харди [194] показывает, что для функций, описанных в разделе ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА... ,  $\alpha \equiv H$ . Следовательно, можно предположить, что их размерность Хаусдорфа–Безиковича равна  $2 - H$ .  $\blacktriangleright$

Совершенно иначе обстоит дело с канторовой лестницей (см. рис. 125). Областью определения функции  $X$  являются здесь только те значения  $t$ , которые принадлежат фрактальной пыли с фрактальной размерностью  $\delta < 1$ , а показатель  $\alpha$  зависит от  $t$ . Разделим интервал  $[0, 1]$  на  $1/r$  временных промежутков длины  $r$ . В  $r^{-\delta}$  этих промежутков  $\alpha = \delta$ , в других промежутках показатель  $\alpha$  не определен, однако если повернуть координатные оси на небольшой угол, то  $\alpha = 1$ . Отсюда эвристически получаем для количества покрывающих квадратов значения  $r^{-1} + r^{\delta-1}r^{-\delta} = 2r^{-1}$ , а для размерности  $D = 1$ . Это в самом деле так, что и отмечено в пояснении к рис. 125.

Кроме того, для суммы броуновской функции и канторовой лестницы с  $\delta < H$  получаем  $D = 2 - H$  и  $\lambda = \delta$ , следовательно,  $1 < D < 2 - \lambda$ .

**Резюме.** Подтверждение эвристически полученного неравенства  $1 \leq D \leq 2 - \lambda$  можно найти в работах [317] и [30]. См. также [255], с. 27.

**Об определении «фрактала».** В разделе ФРАКТАЛЫ упоминается о желательности расширения рамок определения термина *фрактал* с тем, чтобы они включали и канторову лестницу. Может быть, нам следует сказать так: кривая фрактальна, если показатель  $\lambda < 1$ , а показатель  $\alpha$  близок к  $\lambda$  при «достаточно многих» значениях  $t$ ? Мне бы не хотелось следовать этим путем, так как подобные расширения довольно громоздки и, кроме того, в них проводится принципиальное различие между случаями  $D_T = 0$  и  $D_T > 0$ .

**Функции из прямой в плоскость.** Возьмем две непрерывные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  с ЛГ-показателями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Эвристически рассуждая, можно предположить, что для покрытия графика векторной функции от координат  $X(t)$  и  $Y(t)$  на участке  $t \in [0, 1]$  потребуется не больше  $r^{\lambda_1 + \lambda_2 - 3}$  кубов со стороной  $r$ ; следовательно,  $1 \leq D \leq 3 - (\lambda_1 + \lambda_2)$ . Размерность обыкновенного броуновского следа из прямой в плоскость  $D = 2$  вполне согласуется с этим неравенством.

**Проекции.** Построим непрерывный след, проецируя функцию  $\{X(t), Y(t)\}$  на плоскость  $(x, y)$ . При  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  эвристика подсказывает, что для покрытия графика нам понадобится не более  $1/r$  квадратов со стороной  $r^\lambda$ ; следовательно,  $1 \leq D \leq \min(2, 1/\lambda)$ . Рассмотрим аналогичным образом непрерывный след функции  $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$ , координаты которой имеют одинаковые ЛГ-показатели  $\lambda$ . Эвристическое рассуждение дает  $1 \leq D \leq \min(3, 1/\lambda)$ . При  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  непрерывный след функции  $\{X(t), Y(t)\}$  следует покрывать квадратами со стороной  $r^{\max \lambda}$ , значит:

$$1 \leq D \leq 2 - \max\{0, (\lambda_1 + \lambda_2 - 1)/\max(\lambda_1, \lambda_2)\}.$$

Все эти выводы нашли подтверждение в [317]. ■

## ХII ◇ О ЛЮДЯХ И ИДЕЯХ

---

### 40 ◇ БИОГРАФИЧЕСКИЕ ОЧЕРКИ

В качестве вступления к этой главе, посвященной исключительно жизнеописаниям, отметим, что ученым, придерживающимся в широкой реке научной мысли главного течения, редко достается в награду (или в наказание?) жизнь, о которой интересно рассказывать. Возьмем, например, биографию Джона Уильяма Стретта, третьего барона Рэля. Следующие одна за другой с завидным постоянством научные победы прославили его имя почти во всех областях науки. А жизнь его, между тем, протекала без каких-либо особых происшествий, умеренно и спокойно, посвященная исключительно его развитию как ученого. Единственное событие, способное сойти за происшествие, случилось, когда юный Уильям отказался при поступлении в кембриджский Тринити-Колледж от аристократических привилегий, полагавшихся ему как старшему сыну лорда-землевладельца.

Был в науке и Великий Романтик — Эварист Галуа, история которого как нельзя лучше соответствует канонам высокой французской трагедии, поскольку сочетает в пределах одного дня написание работы, положившей начало развитию современной алгебры, и смерть на дуэли. И все же жизни большинства ученых подобны жизни Рэля: их почти не затрагивают даже самые кардинальные перемены в окружающем мире (примером может служить биография А. С. Безиковича), и в конечном итоге их жизненные истории почти предсказуемы, если не считать случайных красочных подробностей, описывающих первые проявления их таланта или их вступление в большую науку. Трехлетний Карл Фридрих Гаусс исправляет ошибку в арифметических расчетах своего отца. Юный Шриниваса Рамануджан заново изобретает математику. Харлоу Шепли, обнаружив, что для поступления на факультет журналистики ему придется ждать целый семестр, решает выбрать себе другой факультет из алфавитного списка. Он пропускает археологию, так как не знает, что означает это слово, переходит к астрономии. . . и находит свою судьбу. Менее типична история Феликса Хаусдорфа. До 35 лет он посвящает большую часть своего времени философии, поэзии, сочинению и

постановке пьес и другим подобным занятиям. Затем он останавливается на математике и вскоре представляет научной общественности свой знаменитый шедевр — «Основы теории множеств» [202].

Биографии, скроенным по единому образцу, несть числа; истории же, отобранные для этой главы, — особенные. В них все не так. Вступление в большую науку откладывается на неопределенный срок — во многих случаях оно происходит лишь посмертно. Герой всерьез задумывается о том, в свое ли время его угораздило родиться. Как правило, герой — индивидуалист-одиночка. Его можно назвать *наивным* или *утопистом* — так называют определенного рода художников, — однако, на мой взгляд, ему больше подходит просторечное «белая ворона». И в тот момент, когда опускается занавес, символизируя окончание пролога в пьесе его жизни, мы видим, что наш герой все еще — по прихоти ли судьбы, по собственному ли выбору — не выбрал себе цвета.

Работы «белых ворон» отличаются какой-то особенной свежестью. Даже те, кто в конечном итоге так и не достиг сколько-нибудь значительных результатов, демонстрируют ярко выраженный оригинальный стиль, что роднит их с их более удачливыми собратьями, титанами научной мысли. Причина здесь, похоже, заключается в наличии достаточного количества свободного времени. Как однажды заметила дочь д'Арси Томпсона по поводу его книги «Рост и форма» [568]: «Можно только гадать, была бы вообще написана [подобная книга], если бы [ее автор] не провел тридцать лет жизни в глуши». К моменту выхода книги д'Арси Томпсону было уже 57. Максимум научной активности многих других белых ворон также приходится на довольно преклонные годы. Расхожее клише о том, что наука — дело молодых, к данному случаю неприменимо.

Меня привлекают такие истории; некоторые из них оказали на меня сильное эмоциональное воздействие, которым я и хотел бы поделиться с читателем.

Как и следовало ожидать, наши герои очень отличаются друг от друга. Поль Леви, например, прожил жизнь, достаточно долгую для того, чтобы оставить глубокий след в своей области науки, однако его поклонники (среди которых я числю и себя) полагают, что он заслуживает большего; назовем это истинной славой. (То же можно сказать и о д'Арси Уэнтворте Томпсоне, который прекрасно вписался бы в компанию наших героев; нет его здесь только потому, что в сокращенном переиздании «Роста и формы» 1962 г. (см. [568]) уже имеется его подробная и хорошо документированная биография.) Льюису Ф. Ричардсону это также удалось, но едва-едва. А вот с Луи Башелье судьба обошлась суровее: никто не воспринял его статьи и монографии всерьез, и он прожил жизнь незадачливого просителя, а все его открытия были в конечном счете продублированы другими. Херсту повезло больше, и история его жизни весьма увлекательна. Что касается Фурнье д'Альба и Ципфа, то они, как мне кажется, заслуживают чего-то большего, чем постоянные под-

строчные примечания. Таким образом, каждая из историй, собранных в настоящей главе, вносит посильный вклад в понимание психологии оригинально и глубоко мыслящих индивидуумов.

Я старался не пересказывать без крайней необходимости сведений из официальных биографий (если таковые существуют) интересующих нас персонажей. В большом «Словаре биографий ученых» под редакцией Гиллиспи (см. [170]) приводятся также и библиографии; кстати, как в биографиях, так и в библиографиях имеются очень многозначительные пропуски.

## ЛУИ БАШЕЛЬЕ (1870–1946)

Об истории возникновения и развития теории броуновского движения — предмете занимательном и полезном — мы поговорим в следующей главе. Заметим только, что в данном случае физика не может претендовать на первенство, которое, судя по всему, принадлежит математике и (весьма необычное стечение обстоятельств!) экономике.

Дело в том, что подробное описание большинства положений математической теории броуновского движения появилось еще за пять лет до Эйнштейна. Автором этого описания является Луи Башелье («Словарь биографий ученых», т. I, с. 366–367).

В центре нашего повествования — докторская диссертация по математике, защищенная 19 марта 1900 г. в Париже. Шестьдесят лет спустя она удостоивается редкой чести быть переведенной на английский язык с добавлением пространных комментариев. Начало же у этой истории было неудачным: диссертация не произвела на принимавшую защиту комиссию особого впечатления, и та вынесла крайне необычный и чуть ли не оскорбительный вердикт — *mention honorable*<sup>1</sup>, и это при том, что ни один потенциальный кандидат на соискание докторской степени в тогдашней Франции вообще не брался за дело, если не видел перед собой конкретной академической карьеры и не рассчитывал на получение при защите хотя бы *mention très honorable*<sup>2</sup>.

Таким образом, нет ничего удивительного в том, что диссертация Башелье не оказала непосредственного влияния ни на одного из его современников. Надо сказать, что и современникам не удалось оказать какое бы то ни было влияние на Башелье, хотя он и продолжал вести активную научную деятельность и опубликовал (в самых лучших журналах) несколько своих работ, состоящих, по большей части, из нескончаемых алгебраических манипуляций. Вдобавок, он написал научно-популярную книгу [13], которая выдержала несколько переизданий и даже сейчас продолжает оставаться вполне читабельной. Впрочем, я не стал бы рекомендовать ее всем подряд, так как ее предмет претерпел

<sup>1</sup> Поощрительный отзыв (франц.). — Прим. перев.

<sup>2</sup> Буквально, «очень поощрительный отзыв» (франц.), т. е. несколько более высокая по сравнению с предыдущей оценка. — Прим. перев.



за прошедшие годы очень значительные изменения; кроме того, иногда не совсем ясно, что именно скрывается за краткими фразами Башелье — то ли подтвержденные опытом теоретические заключения, то ли формулировка задач, которые еще предстоит решить. В совокупности такая двусмысленность способна произвести на неподготовленного читателя весьма обескураживающий эффект. Лишь через много лет, после нескольких неудачных попыток, Башелье удалось получить должность университетского профессора — в крохотном университете города Безансон.

На фоне его серой, ничем не примечательной карьеры и скудости дошедших до нас сведений о его личности (какими бы тщательными ни были мои поиски, мне удалось обнаружить лишь разрозненные обрывки воспоминаний о нем студентов и коллег — и ни одной фотографии), с одной стороны, — и шумной посмертной славы его диссертации — с другой, фигура Башелье приобретает некий почти романтический ореол. В чем же причина столь резкого контраста?

Заметим для начала, что его жизнь могла бы сложиться совсем иначе, если бы не одна математическая ошибка. Изложение этой истории можно найти у Поля Леви (см. [311], с. 97–98); более подробно Поль рассказал мне об этом в письме, написанном 25 января 1964 г. Ниже приводятся выдержки из этого письма:

«Впервые я услышал о нем несколькими годами позже выхода моего «Исчисления вероятностей»<sup>1</sup>, то есть году в 1928 плюс-минус год. Он был тогда кандидатом на должность профессора в Дижонском университете. Один из университетских преподавателей по фамилии Жевре обратился ко мне, желая услышать мое мнение о работе, опубликованной Башелье в 1913 г. (в сборнике «*Annales de l'École Normale*»). В этой работе Башелье определил функцию Винера (причем еще до Винера) следующим образом: сначала он взял в каждом из интервалов  $[n\tau, (n+1)\tau]$  некую функцию  $X(t|\tau)$  с постоянной производной, равной с одинаковой вероятностью либо  $+v$ , либо  $-v$ ; далее он перешел к пределу этой функции (при  $v = \text{const}$  и  $\tau \rightarrow 0$ ) и объявил, что получил верную функцию  $X(t)$ ! Жевре был шокирован этой ошибкой. Я согласился с ним и подтвердил ошибочность статьи в письме, которое он зачитал своим коллегам в Дижоне. Башелье должности не получил. Узнав о моем участии в этом деле, он затребовал объяснений, каковые я ему немедленно предоставил, однако они не убедили его в ошибочности его рассуждений. Думаю, нет нужды вспоминать здесь об иных прямых последствиях этого инцидента.

Я благополучно забыл о нем и не вспоминал до 1931 г., когда при чтении фундаментальной работы Колмогорова наткнулся на слова «*der Bacheliers Fall*»<sup>2</sup>. Я просмотрел другие работы Башелье и обнаружил,

<sup>1</sup>Lévy Paul. *Calcul des probabilités*. См. [302]. — Прим. перев.

<sup>2</sup>Случай Башелье (нем.). — Прим. перев.

что та прошлая ошибка, от которой он так и не отказался, не помешала ему получить выводы, которые были бы верны, если бы вместо  $v = \text{const}$  он записал  $v = \text{const} \cdot \tau^{-1/2}$ , и что еще до Эйнштейна и Винера Башелье удалось разглядеть некоторые важные свойства так называемой функции Винера (или Винера–Леви), а именно: уравнение диффузии и распределение  $\max_{0 \leq \tau \leq t} X(t)$ .

Мы помирились. Я написал ему о своем сожалении, что впечатление, произведенное одной ошибкой в начале статьи, отвратило меня от дальнейшего чтения работы, содержащей так много интересных мыслей. Он ответил длинным письмом, в котором выразил большой энтузиазм в отношении продолжения исследований».

То, что Леви довелось сыграть столь неприглядную роль, поистине трагично, поскольку его собственная карьера, как мы вскоре увидим, также едва не оказалась погублена из-за того, что его работы были недостаточно строги.

Перейдем теперь ко второй, более серьезной, причине карьерных проблем Башелье. Причина эта заключается в названии его диссертации, о котором я до сих пор не упомянул (намеренно, разумеется) и которое выглядит так: «Математическая теория спекуляций». Название это никоим образом не относится к спекуляциям философским (например, о природе случайности); скорее, здесь имеются в виду спекуляции в «стяжательском» смысле, т. е. получение доходов за счет падений и повышений цен на рынке консолидированных государственных облигаций (тех самых, которые французы называют «*la rente*»<sup>1</sup>). Упомянутая Леви функция  $X(t)$  как раз и имеет своим значением цену этих облигаций в момент времени  $t$ .

Предвестником профессиональных трудностей, ожидавших Башелье в результате выбора такого названия, могло бы послужить деликатно сдержанное замечание Анри Пуанкаре (который писал официальную рецензию на диссертацию) о том, что «тема работы несколько отличается от тех, над какими имеют обыкновение работать наши кандидаты». Кто-то может сказать, что Башелье не следовало отдавать свою диссертацию на рассмотрение математикам, вовсе к этому не расположенным (надо сказать, что французские профессора того времени понятия не имели о том, что тему диссертации можно назначать заранее), однако у Башелье просто не было выбора: предыдущую степень он получил за математическое исследование, а за преподавание математики отвечал именно Пуанкаре (хотя исследованиями в области теории вероятности он практически не занимался).

Трагедия Башелье в том, что он был человеком прошлого и будущего, но не настоящего. Человеком прошлого его можно назвать потому, что он работал с историческими корнями теории вероятности, которая, как известно, начиналась с исследования азартных игр. Стохастические

<sup>1</sup>Рента (франц.). — Прим. перев.

процессы в непрерывном времени он решил ввести, опираясь на ту непрерывную азартную игру, которая называется «*La Bourse*»<sup>1</sup>. В то же время он был человеком будущего как в математике (свидетельством тому может служить приведенный выше отрывок из письма Леви), так и в экономике, где он известен как автор теоретико-вероятностного понятия «мартингал» (в котором должным образом отражены понятия *честной игры* и *эффективного рынка*, см. главу 37); кроме того, он намного опередил свое время в понимании многих частных аспектов неопределенности в применении к экономике. Самую большую славу принесла Башелье концепция, согласно которой цены следуют броуновскому процессу. К сожалению, ни одно из официальных научных сообществ того времени не оказалось в состоянии понять и принять его. Для распространения идей, столь несоответствующих времени и месту, требуется талант политика, а таким талантом Башелье, по всей видимости, не обладал.

Для того, чтобы выжить и продолжать работать в подобных условиях, Башелье должен был очень хорошо представлять себе важность своей работы. В частности, он прекрасно понимал, что является создателем теории диффузии вероятности. В неопубликованной «*Записке*», которую Башелье написал в 1921 г. (в очередной раз хлопоча о какой-то оставшейся неизвестной академической должности), он заявил, что его главным вкладом в науку было введение в нее «образов, извлеченных из явлений природы; среди этих образов, например, теория излучения вероятности, в которой абстракция уподобляется энергии — странное и неожиданное сочетание и в то же время отправная точка для дальнейшего движения вперед. Именно эту концепцию имел в виду Анри Пуанкаре, когда писал: "Мсье Башелье демонстрирует оригинальный и педантичный склад ума"».

Фраза Пуанкаре взята из уже упоминавшейся рецензии на докторскую диссертацию Башелье, из каковой рецензии я позволю себе привести еще одну цитату: «Способ, которым кандидат получает закон Гаусса, весьма оригинален; еще более интересно то, что это же рассуждение можно, с небольшими изменениями, распространить и на теорию ошибок. Само рассуждение приведено в главе, которая может, на первый взгляд, показаться весьма странной, благодаря, в первую очередь, своему названию — «Излучение вероятности». По сути дела, автор прибегает здесь к сравнению теории вероятности с аналитической теорией распространения теплового излучения. По небольшому размышлению становится ясно, что аналогия вполне действенна, а сравнение — обоснованно. К этой задаче почти без изменений применимо рассуждение Фурье, несмотря на то обстоятельство, что создавалось оно для совершенно иных целей. Очень жаль, что [автор] не разработал глубже эту часть своей диссертации».

---

<sup>1</sup>Биржа (франц.). — Прим. перев.

Таким образом, Пуанкаре увидел-таки, что Башелье подошел к порогу создания общей теории диффузии. Но Пуанкаре уже тогда был печально знаменит своими провалами в памяти. Несколькими годами спустя он принял активное участие в обсуждении броуновской диффузии, однако о диссертации Башелье 1900 г. к тому времени, очевидно, забыл.

Обратимся еще раз к «*Zanucke*» Башелье: «1906: *Théorie des probabilités continues*<sup>1</sup>. Эта теория не имеет совершенно никакого отношения к теории геометрической вероятности, рамки которой весьма ограничены. Это наука более высокого уровня сложности и общности, нежели исчисление вероятностей. Концепция, анализ, метод и все остальное в ней ново и оригинально. 1913: *Probabilités cinématiques et dynamiques*<sup>2</sup>. Оригинальная идея этих приложений теории вероятности к механике принадлежит исключительно автору и ниоткуда не заимствована. Подобной работы никто и никогда не проводил. Концепция, метод, результаты и все остальное в ней ново».

Злополучным авторам академических «*Zanuck*» не приходится быть излишне скромными, и Луи Башелье и в самом деле до некоторой степени преувеличил свои заслуги. Более того, в «*Zanucke*» нет ни намека на то, что Башелье прочел хоть что-нибудь из того, что выходило в двадцатом веке. А современники в очередной раз самым прискорбным образом проигнорировали все его красноречие и отказали ему в получении должности, на которую он претендовал!

Больше мне о Луи Башелье ничего не известно.

Цитаты из Пуанкаре приводятся (с любезного разрешения владельцев) по оригиналу рецензии, хранящемуся в Архиве Университета имени Марии и Пьера Кюри (Париж), преемнике архивов бывшего парижского Факультета наук. Читая этот документ, написанный тем же прозрачным стилем, что и большая часть научно-популярных работ Пуанкаре, приходишь к мысли о необходимости публикации как можно в более полном объеме личной и служебной переписки Пуанкаре. Имея в распоряжении лишь его монографии и «*Собрание сочинений*», практически невозможно составить сколько-нибудь адекватное представление о разносторонней и чрезвычайно интересной личности Пуанкаре.

## ПОЛЬ ЛЕВИ (1886–1971)

Поль Леви — человек, который не признавал учеников, но которого я, тем не менее, считаю лучшим из моих учителей — преуспел в достижении тех целей, которые Башелье лишь видел издали. Леви удалось еще при жизни снискать себе славу самого, пожалуй, выдающегося специалиста по теории вероятности и даже занять (в возрасте почти

<sup>1</sup>Теория непрерывных вероятностей (франц.). — Прим. перев.

<sup>2</sup>Кинематические и динамические вероятности (франц.). — Прим. перев.

восьмидесяти лет) то место в Парижской Академии наук, которое прежде занимал Пуанкаре, а после него Адамар (см. «Кто есть кто в мировой науке», с. 1035).

И все же на протяжении почти всей сознательной жизни Поля Леви доступ в «организованную» науку был для него закрыт. Его неоднократные попытки получения университетской должности оканчивались неудачей, и даже предложения о проведении публичных лекций администрация университета принимала очень неохотно, опасаясь, что они могут так или иначе нарушить учебный план.

О своей жизни, мыслях и суждениях Леви подробно рассказывает в [311] — эту книгу стоит прочесть хотя бы потому, что ее автор не делает ни одной попытки, даже неосознанной, казаться лучше или хуже, чем он есть на самом деле. Конец лучше не читать вовсе, однако отдельные абзацы просто великолепны. В частности, очень проникновенно описывает Леви свой страх оказаться «лишь пережитком прошлого века» и ощущение того, что он — математик, «не похожий на других». Надо сказать, что ощущение его непохожести возникло не у него одного. Я помню, как Джон фон Нейман говорил в 1954 г.: «Мне думается, я понимаю, как работают все остальные математики, но Леви — это словно пришелец с другой планеты. Создается впечатление, что у него есть какие-то свои, особенные методы докапываться до истины, от которых мне, если честно, становится не по себе».

Неудачи Леви в академической карьере, в конечном счете, пошли науке только на пользу. Кроме ежегодного курса лекций по математическому анализу, который он читал в Политехнической школе, и некоторых других обязательств, ничто не отвлекало его от исследований. Работая в одиночку, Леви превратил теорию вероятности из скудного набора разрозненных фактов в научную дисциплину, позволяющую получать самые разнообразные результаты с помощью классических в своей прямоте методов. Интерес к этой теме возник у него во время подготовки заказанной ему лекции об осечках при стрельбе из ружей. Когда «Исчисление вероятностей» (см. [302]) наконец увидело свет, Леви было уже почти сорок лет — выдающийся ученый на грани совершения своего великого открытия и преподаватель в Политехнической школе в те периоды, когда школьная комиссия по распределению решила проявить любезность к бывшему выпускнику. Свои главные книги Леви написал между пятьюдесятью и шестьюдесятью годами, а большая часть работы по броуновским функциям из гильбертова пространства в прямую была сделана еще позднее.

В одной из бесчисленных занимательных историй, собранных Леви в своей автобиографии, повествуется о короткой статье, посвященной парадоксу Бентли в отношении ньютоновского гравитационного потенциала (см. главу 9). В 1904 г. восемнадцатилетний студент Поль Леви совершенно самостоятельно построил модель вселенной Фурнье. Однако предоставим слово ему самому: «... построение было настолько про-

стым, что мысль о публикации даже не приходила мне в голову до тех пор, пока, двадцать пять лет спустя, я случайно не подслушал разговор между Жаном Перреном и Полем Ланжевенном. Два прославленных физика согласились на том, что парадокса можно избежать, лишь допустив, что Вселенная конечна. Я выступил вперед и указал им на ошибочность их рассуждений. Они, похоже, не совсем поняли, о чем я говорю, однако Перрен, потрясенный моей самоуверенностью, попросил меня записать мои соображения, что я и сделал».

Кстати о результатах, «слишком простых для публикации» — эта фраза встречается в воспоминаниях Леви довольно часто. Вообще многим творчески мыслящим людям свойственно переоценивать значимость самых сложных и причудливых из своих работ, недооценивая при этом работы простые и, казалось бы, ничем не примечательные. Когда впоследствии история расставляет все по местам, оказывается, что мы помним того или иного плодотворного мыслителя исключительно как автора какой-либо «леммы» или предположения, «слишком простых», на его взгляд, и опубликованных только лишь в качестве предварительных замечаний к некой забытой гениальной теореме.

Приведенная ниже цитата представляет собой приблизительный пересказ части моего выступления на церемонии, посвященной памяти Леви: «Я очень смутно помню лекции, которые он читал в Политехнической школе, так как мне досталось место в самом заднем ряду большой аудитории, а говорил Леви довольно тихо. Отчетливее всего мне запомнилась одна деталь — сходство высокой, худощавой и подтянутой фигуры Леви со знаком интеграла, который он рисовал на доске.

Иное дело — написанные им для этих лекций конспекты. Они ничем не напоминали традиционные конспекты, в которых стройными рядами следуют друг за другом определения, леммы и теоремы, а каждое допущение сформулировано предельно четко; величественное это шествие может лишь изредка прерваться тем или иным недоказанным выводом, который тут же недвусмысленно клеймится как таковой. Конспекты же Леви я бы сравнил, скорее, с бурным, неуправляемым потоком замечаний и наблюдений.

В своей автобиографии Леви пишет, что для того, чтобы пробудить у детей интерес к геометрии, учителю следует по возможности быстрее переходить к теоремам, которые они никак не смогут счесть очевидными. Похожий метод он применял и при чтении лекций в Политехнической школе. Эффективность его, возможно, объясняется тем, что для человека неотразимо привлекательны образы, связанные с земным рельефом вообще, и с горными восхождениями, в частности. На память приходит старый обзор, посвященный другому великому *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*<sup>1</sup>. Тот курс читал Камиль Жордан, а ав-

<sup>1</sup>Курс математического анализа, читаемый в Политехнической школе (франц.). — Прим. перев.

тором обзора был Анри Лебег. Лебег никогда не скрывал своего крайне пренебрежительного отношения к работе Леви, поэтому весьма забавно видеть, что все его восхваления Жордану с тем же успехом можно применить и к Леви. Он был не из тех, кто "пытается достичь вершины, на которую не ступала нога человека, не позволяя себе при этом оглядеться по сторонам. Если бы на эту вершину его вел кто-то другой, наш альпинист, возможно, оказался бы способен отвести взор от вершины и посмотреть на расстилающиеся вокруг красоты, но ему неоткуда было бы узнать, что именно они собой представляют. Вообще говоря, с очень высокой вершины ничего увидеть нельзя; альпинисты взбираются на горы исключительно ради самого процесса".

Нет нужды говорить о том, что конспекты лекций Леви не пользовались популярностью. Многие отличники Политехнической школы воспринимали их не иначе как лишнюю головную боль при подготовке к экзаменам. В окончательном варианте, который мне довелось изучать в качестве *Maître de Conférences*<sup>1</sup> профессора Леви, все характерные особенности его конспектов проявились еще отчетливее. Теория интегрирования, например, трактуется здесь лишь как приближение. Леви однажды писал, что, принуждая свой талант, хорошо работу не выполнить. Создается ощущение, что при написании последнего конспекта талант Леви испытывал серьезное принуждение.

И все же о курсе, который он читал студентам, поступившим в Школу в 1944 г., я храню исключительно положительные воспоминания. Интуиции нельзя научить, но ее очень легко подавить. Я думаю, что именно такого исхода Леви стремился избежать прежде всего, и мне кажется, что в большинстве случаев это ему удавалось.

За время пребывания в Политехнической школе я слышал много различных мнений о творческой работе Леви. Чаще всего, однако, мнение сводилось к следующему рассуждению: сначала превозносилась важность и значимость деятельности Леви, сразу же за похвалой следовало замечание о том, что в его трудах нет ни единого безупречного в математическом смысле доказательства, зато до неприличия много рассуждений сомнительной обоснованности. В заключение провозглашалась настоятельная необходимость привести все в математически строгий вид. К настоящему моменту эта задача уже решена, и сегодня интеллектуальные потомки Леви наслаждаются всеобщим признанием за ним звания полноправных математиков. Как только кто заметил один из них, они превратились в "обуржуазившихся пробабилистов".

Боюсь, что за это признание было заплачено слишком много. Мне кажется, в любой области знания существует множество последовательных уровней точности и обобщения. Находясь на «нижних» уровнях, мы оказываемся в состоянии справиться лишь с самыми тривиальными задачами. Можно, однако, двинуться дальше и (это справедливо почти

<sup>1</sup>Председатель конференции (франц.). — *Прим. перев.*

для всех областей) довести точность и обобщение до крайности. Например, мы можем извести сотню страниц на предварительные замечания и допущения только для того, чтобы доказать одну-единственную теорему, причем в виде, немногим более общем, чем было до нас, и не открыть при этом никаких новых горизонтов. И лишь в немногих благословенных областях знания допускается существование некоторого промежуточного уровня точности и обобщения, который можно назвать классическим. Почти уникальное величие Поля Леви заключается в том, что он был для своей области одновременно и предтечей, и *единственным* классиком.

Мысли Леви редко занимало что-либо, не имеющее отношения к чистой математике. При этом тем, кто желает найти решение какой-либо предварительно и конкретно поставленной задачи, редко удастся обнаружить в его трудах готовую формулу, не требующую никакой дополнительной доработки. С другой стороны, насколько я могу доверять своему личному опыту, именно благодаря особому подходу к фундаментальным вопросам формулировки случайности, Леви стал тем, кем он стал — титаном среди математиков».

При исследовании различных феноменов — тех, что составляют предмет настоящего эссе, и тех, что я рассматривал в других своих работах — очень часто возникают ситуации, когда для должной математической формализации того или иного явления оказывается необходим либо один из концептуальных инструментов, предоставленных нам Полем Леви, либо иной инструмент, но созданный по тому же образу и подобию и обладающий той же степенью обобщения. Чем глубже погружаешься в удивительный и таинственный мир, исследованию которого Леви посвятил всего себя, тем яснее осознаешь царящую в нем гармонию — я усматриваю в этом несомненное свидетельство гениальности Леви, поскольку совершенно та же гармония присуща и другому миру, тому, в котором живем мы.

## ЛЬЮИС ФРАЙ РИЧАРДСОН (1881–1953)

Даже по стандартам настоящей главы жизнь Льюиса Фрая Ричардсона необычна — составляющие ее нити разбредаются в разные стороны, и отыскать среди них какое-либо преобладающее направление совсем не просто. Заметим, между прочим, что наш герой приходится дядей знаменитому актеру сэру Ральфу Ричардсону, а сведения из его биографии почерпнуты мною из справочника «Кто есть кто в науке» (с. 1420), из «Некрологов членам Королевского общества» (9, 1954, с. 217–235) (краткое изложение этих статей имеется в посмертных изданиях работ Ричардсона [492] и [493]), а также из очерка М. Грейзера, опубликованного в журнале «Datamation» (июнь 1980). Помимо этого, кое-какими материалами со мной любезно поделился один из родственников Льюиса Фрая Ричардсона, Дэвид Эдмундсон.



Ричардсон, как сообщает его влиятельный современник Дж. И. Тейлор, был «очень интересным и оригинальным человеком, который обо всем имел собственное мнение, почти никогда не совпадавшее с общепринятым; часто люди просто не понимали его». Научные труды Ричардсона, по свидетельству другого его современника, Э. Голда, также отличались оригинальностью, иногда за его мыслью было непросто уследить, а местами сухое изложение озарялось неожиданными яркими примерами. При чтении его работ по турбулентности и публикаций, которые впоследствии переросли в монографии [492] и [493]), время от времени создается впечатление, что Ричардсон движется словно на ощупь, причем выглядит это почему-то вполне естественно и, похоже, мало его смущает. Он вторгается на неведомые земли и прокладывает себе путь с помощью отнюдь не элементарной математики, которую он изучает по мере продвижения, а не черпает из запасов, скопленных за университетские годы. Учитывая его склонность к изучению новых дисциплин (или хотя бы их «отдельных разделов»), можно только удивляться, что он вообще смог хоть чего-то достичь — то есть можно было бы удивляться, не зная мы о его поразительной организованности и трудолюбии.

Ричардсон окончил Кембриджский университет и получил степени бакалавра по физике, математике, химии, биологии и зоологии, так как был не совсем уверен, какую именно карьеру ему следует избрать. Он полагал, что Гельмгольц (который сначала был врачом, а лишь затем стал физиком) начал пир своей жизни не с того блюда.

По какой-то причине Ричардсон оказался в натянутых отношениях с кембриджской администрацией, и когда много лет спустя ему понадобилась докторская степень, он отказался получать необходимую для этого степень магистра в Кембридже (что обошлось бы ему всего лишь в десять фунтов). Вместо этого он поступил на общих правах в Лондонский университет, где он в то время преподавал, разделил скамью со студентами и в возрасте 47 лет получил степень доктора по математической психологии.

Свою карьеру Ричардсон начинал в Метеорологической службе, однако, когда после Первой мировой войны Метеорологическая служба вошла в состав только что созданного Министерства ВВС, Ричардсону, истовому квакеру и убежденному противнику войны, пришлось уйти в отставку.

Предсказание погоды с помощью численных процессов — тема одноименной монографии Ричардсона [490], впервые опубликованной в 1922 г., и яркий пример того, чем обычно занимаются фантазеры-практики. Через тридцать три года книга была переиздана как классическая, однако в течение первых двадцати лет после выхода в свет она пользовалась весьма сомнительной репутацией. Оказалось, что аппроксимируя дифференциальные уравнения эволюции атмосферы уравнениями в конечных разностях, Ричардсон выбрал для элементарных пространственных и временных шагов неподходящие значения. Поскольку

о необходимости проявлять осторожность при выборе значений таких шагов тогда еще никто не подозревал, этой ошибки едва ли можно было избежать.

Тем не менее, благодаря этому исследованию Ричардсон вскоре был избран членом Королевского общества. Кроме того, широкую известность приобрели следующие пять строчек из его книги (см. [490], с. 66):

*На завитках больших пасутся малые,  
На малых — еще меньшие, пожалуй;  
Есть, впрочем, предел уменьшению сему,  
Вязкость — достойное имя ему  
(в молекулярном, конечно же, смысле).*

Популярность этих строк дошла до того, что цитирующие их люди уже не считают нужным упоминать имя автора. Когда я показал это стихотворение одному специалисту по английской литературе, он тут же указал мне на его сходство с неким образцом классической поэзии. Очевидно, что стихотворение Ричардсона является пародией на следующие строки из «Рапсодии о поэзии» Джонатана Свифта (см. [549], строки 337–340):

*Блох больших кусают блошки,  
Блошек тех — малютки-крошки,  
Нет конца сим паразитам,  
Как говорят, ad infinitum.*

Ричардсон не первым обратил внимание на эти строки Свифта. У Де Моргана (см. [100], с. 377) находим альтернативный вариант (который Ричардсона, по понятным причинам, не устроил):

*Блох больших кусают блошки,  
Вот забава паразитам.  
Блошек тех — малютки-крошки  
И так дальше, ad infinitum.*

*Большие же блохи живут на блошицах,  
В благой пребывая беспечности,  
Блошицы пасутся на блохах огромных  
Все большие и больше, до бесконечности.*

Различие между двумя вариантами вовсе не так незначительно, как может показаться. Более того, благодаря ему возникает приятная уверенность в том, что Ричардсон очень тщательно согласовывал свои литературные модели со своими физическими концепциями. В самом деле, он полагал, что при турбулентности имеет место лишь «прямой» каскад энергии, от больших завихрений к малым — отсюда и Свифт. Если бы при этом Ричардсон допускал и существование «обратного» каскада

от малых завихрений к большим (некоторые современные исследователи придерживаются как раз такого мнения), то он, чем черт не шутит, спародировал бы Де Моргана!

В подобном же легком духе выдержан второй раздел статьи [491], который называется «Обладает ли ветер скоростью?» и начинается с такого предложения: «Этот глупый, на первый взгляд, вопрос при более близком знакомстве оказывается не так уж плох». Далее Ричардсон показывает, как можно исследовать диффузию воздушного потока без единого упоминания его скорости. Для того чтобы дать читателю представление о степени иррегулярности движения воздуха, бегло упоминается функция Вейерштрасса (эта функция непрерывна, но нигде не дифференцируема; она встречается в главе 2 и рассматривается более подробно в главах 39 и 41). К сожалению, он тут же оставляет эту тему и больше о ней не говорит. Таким образом, масштабная инвариантность функции Вейерштрасса от внимания Ричардсона ускользает. Ко всему прочему, как отмечает Дж. И. Тейлор, Ричардсон определил закон взаимного рассеяния частиц при турбулентности, но прошел мимо колмогоровского спектра (причем совсем рядом). И все же каждый свежий взгляд на его работы открывает их под каким-то новым углом, который раньше оставался незамеченным.

Ричардсон также известен как изобретательный и аккуратный экспериментатор. Его ранние эксперименты заключались в измерении скорости ветра в облаках посредством выстреливания в них стальных шариков различных размеров — от размера горошины до размера вишни. Для одного из более поздних экспериментов в турбулентной диффузии (см. [495]) потребовалось большое количество буюв, которые должны были быть заметными издали (то есть предпочтительно белого цвета) и в то же время не слишком торчать из воды, чтобы их не сдувало ветром. Ричардсон купил большой мешок корнеплодов пастернака, которые и были сброшены с одного из мостов через канал Кейп-Код, тогда как сам Ричардсон производил наблюдения с другого моста ниже по течению.

Много лет Ричардсон посвятил преподавательской и административной работе, причем и здесь он всякий раз норовил изобрести для решения повседневных задач свой собственный способ. Благодаря полученному наследству он смог рано уйти в отставку и наконец полностью посвятить себя изучению психологии вооруженных конфликтов между государствами — над этой темой он работал урывками еще с 1919 г. Результаты этих исследований были опубликованы посмертно в виде двух монографий [492] и [493] (в книге Ньюмена [444], с. 1238–1263, приводятся репринты авторских конспектов). Из посмертных статей упомянем [494] — то самое исследование длины береговых линий, которое описано в главе 5 и которое сыграло столь существенную роль в возникновении настоящего эссе.

## ЭДМУНД ЭДВАРД ФУРНЬЕ Д'АЛЬБ (1868–1933)

Фурнье д'Альб («Кто есть кто в науке», с. 593) избрал для себя жизнь независимого научного журналиста и изобретателя: он создал приспособление, позволяющее слепым «слышать» буквы, и первым передателем телевизионный сигнал из Лондона.

Своим именем он обязан предкам-гугенотам. Частично немецкое образование и постоянное проживание в Лондоне, где он по окончании вечернего колледжа получил степень бакалавра гуманитарных наук, не помешали ему за время краткого пребывания в Дублине сделаться ирландским патриотом и активистом Панкельтского движения. Ко всему прочему, он был сторонником спиритуализма и религиозным мистиком.

Известность ему принесла книга «Два новых мира». Она получила очень хорошие рецензии в журнале «*Nature*», где рассуждения автора названы «простыми и разумными», и в газете «*The Times*», которая сочла авторские умопостроения «любопытными и увлекательными». Однако в некрологах Фурнье д'Альбу, опубликованных в тех же «*Nature*» и «*The Times*», о ней почему-то нет ни слова. Сейчас эту книгу почти невозможно найти, и редкое упоминание о ней обходится без саркастических комментариев.

Согласен, это не та книга, в которой физик сможет найти хоть что-нибудь, обладающее непреходящей физической ценностью. Более того, мне советовали не привлекать к ней излишнего внимания из опасения, что кто-нибудь воспримет ее по большей части весьма спорное содержимое всерьез. Однако правильно ли будет с нашей стороны использовать против Фурнье аргумент, который нам и в голову бы не пришло использовать против Кеплера? Я вовсе не хочу сказать, что Фурнье — это Кеплер нашего времени; он едва дотягивает до уровня научных достижений других наших героев. И все же утверждение одного критика, заявившего, что «в научном отношении работа этого самозваного "Ньютона души человеческой" абсолютна пуста», представляется мне чрезмерно резким и поспешным.

В самом деле, Фурнье первым переформулировал старое интуитивное представление о галактических скоплениях (восходящее еще к Канту и современнику Канта Ламберту) в терминах, достаточно точных для того, чтобы мы сегодня могли делать заключения об их размерности  $D = 1$ . Так что хоть чем-то непреходящим мы Фурнье-таки обязаны.

## ГАРОЛЬД ЭДВИН ХЕРСТ (1880–1978)

Большую часть своей жизни Херст — возможно, самый выдающийся — нилолог всех времен, человек, получивший прозвище Абу-Нил («отец Нила») — провел в Каире в качестве гражданского служащего сначала Британской Короны, а затем египетского правительства. (См. «Кто есть

кто», 1973, с. 1625, и «Кто есть кто в британской науке», 1969/1970, с. 417–418.)

О его юношеских годах (о которых я узнал от него самого и от миссис Маргерит Брунель Херст) стоит рассказать подробнее. Он родился в деревушке неподалеку от Лестера в семье строителя с почтенной родословной (его предки жили здесь почти три столетия), но весьма ограниченного в средствах, поэтому Гарольду в возрасте пятнадцати лет пришлось оставить школу. Из школы он вынес, в основном, знание химии, а отец обучил его плотницкому делу. После этого он устроился на работу помощником учителя младших классов в одну из школ Лестера и записался на вечерние курсы для продолжения собственного образования.

К двадцати годам он добился стипендии, которая позволила ему поступить в Оксфорд в качестве вольнослушателя. Через год он уже был полноправным студентом в недавно восстановленном Хартфорд-Колледже, специализирующимся по физике и работающим в Кларендонской лаборатории.

Поначалу из-за недостаточной математической подготовки ему приходилось нелегко, но в конце обучения, благодаря тому, что необычным кандидатом, проявлявшим незаурядные способности к практическим исследованиям, заинтересовался профессор Глейзбрук, Херст получил ко всеобщему удивлению диплом с отличием и был приглашен остаться в колледже на три года в качестве лектора и лаборанта.

В 1906 г. Херст отправился в Египет в краткосрочную командировку, которая продлилась в конечном счете шестьдесят два года, наиболее плодотворными из которых оказались годы, прошедшие после того, как ему исполнены шестьдесят пять. В его первоначальные обязанности входила передача сигнала точного времени из обсерватории в каирскую крепость, в которой ровно в полдень стреляли из пушки. Однако вскоре его мыслями прочно завладел Нил — и именно исследование Нила и его бассейна принесли Херсту мировую славу. Он много путешествовал, как по реке, так и по суше — пешком с носильщиками, на велосипеде, потом на автомобиле, а в последние годы и на самолете. Первая, низкая, Асуанская плотина была построена еще в 1903 году, однако Херст понимал, насколько важно для египетской экономики обезопасить страну не только от единичных засушливых годов, но и от таких периодов, когда несколько засушливых лет следуют один за другим. Схемы сохранения воды для орошения должны быть адекватны любой ситуации — даже такой, как описанные в Ветхом Завете семь засушливых лет, в преддверии которых Иосиф призывал фараона запастись зерно. Херст одним из первых осознал необходимость постройки «Судд-эль-Аали» — высотной плотины и водохранилища в Асуане.

Вероятнее всего, имя Херста войдет в анналы науки благодаря разработанному им статистическому методу и открытию с помощью этого метода важного эмпирического закона долгосрочной зависимости в гео-

физике. На первый взгляд, кажется странным, что подобными вещами мы обязаны человеку, который с детства был не в ладах с математикой и который жил и работал в таком отдалении от главных центров просвещения. Подумав еще раз, понимаешь, что, возможно, именно эти обстоятельства и оказались решающими как для рождения блестящей идеи, так и для ее долголетия. Херст исследовал Нил, используя особый аналитический метод собственного изобретения, который где-нибудь в другом месте заклеили бы как слишком узкий и специальный, но который в данных условиях оказался как нельзя более подходящим. Не будучи стеснен какими бы то ни было сроками и имея в своем распоряжении в изобилии экспериментальных данных, Херст вполне мог позволить себе сопоставить их со стандартной моделью стохастической изменчивости (белым шумом), учитывая их относительное воздействие на конструкцию высотной плотины. В результате он пришел к к выражению, которое в главах 28 и 39 (с. 513) определено как  $R(d)/S(d)$ .

Можно лишь вообразить себе, какое огромное количество тяжелого труда было вложено в это исследование (учитывая, что все это происходило задолго до появления в нашей жизни компьютеров) — однако значение Нила в экономике Египта трудно переоценить, во всяком случае, оно оказалось вполне достаточным, чтобы оправдать сравнительно высокие расходы (а также подавлять в зародыше попытки силой отправить Херста в отставку).

Херст был непоколебимо уверен в значимости своего открытия, даже невзирая на невозможность эту значимость объективно оценить. В 1951 и 1955 гг. Херст опубликовал две большие статьи о своем открытии, и только после этого его потенциальная важность получила признание в научных кругах.

Э. Г. Ллойд однажды писал (обозначения в цитате мои), что Херст «поставил нас в одну из тех ситуаций (оказывающих, помимо прочего, весьма благотворное влияние на теоретиков), в которых эмпирические открытия упорно не желают влезать в рамки теории. Все вышеописанные исследования сходятся к тому, что в долгосрочной перспективе значение  $R(d)$  должно возрастать пропорционально  $d^{0,5}$ , в то время как эмпирический закон Херста, подкрепленный огромным количеством экспериментальных данных, дает рост значения  $R(d)$ , пропорциональный  $d^H$ , где показатель  $H$  равен приблизительно 0,7. Не остается ничего иного, как признать ошибочной либо интерпретацию теоретиками имеющихся данных, либо саму теорию; не исключено, что уместными окажутся оба признания.» В похожем смысле высказывался и Феллер [146]: «Здесь перед нами стоит задача, интересная как со статистической, так и с математической точки зрения».

Моя собственная дробная броуновская модель (см. главу 28) представляет собой прямой отклик на обнаруженный Херстом феномен, однако на этом наша история не заканчивается. Не хочется придирааться, но авторы патетических замечаний, приведенных в предыдущем абзаце,

основываются (уверен, неумышленно) на неверном понимании утверждений Херста. Ллойд почему-то не обратил внимание на то, что  $R$  делится на  $S$ , а Феллер, зная о работе Херста из устных сообщений третьих лиц (по его собственному признанию), просто не понял, что деление на  $S$  вообще производится. Упомянутая статья Феллера, к счастью, от этого не пострадала, а о важности деления на  $S$  можно прочесть в [408] и [384].

Этот пример еще раз показывает, что когда результат является настоящему неожиданным, его очень трудно понять и принять, — трудно даже тому, кто расположен слушать.

## ДЖОРДЖ КИНГСЛИ ЦИПФ (1902–1950)

Американский ученый Джордж Кингсли Ципф начинал свою научную карьеру филологом, однако впоследствии переименовал себя в «эколога-статистика человека». В течение двадцати лет он преподавал в Гарвардском университете и успел незадолго до смерти издать (по всей видимости, за собственный счет) свой главный труд «Человеческое поведение и принцип наименьшего усилия» (см. [615]).

Это одна из тех книг ([152] можно отнести к этому же разряду), в которых искры гениальности, озаряющие многие прежде темные закоулки, теряются в нагромождениях сумасбродных идей и нелепых крайностей. С одной стороны, в ней обоснуется форма половых органов и оправдывается насильственное включение Австрии в состав фашистской Германии (причем в качестве главной причины называется улучшение соответствия некой математической формулы). С другой стороны, она доверху набита цифрами и таблицами, всевозможными способами указывающими на существование эмпирического закона, который заключается в том, что наилучшее сочетание математического удобства и эмпирического соответствия в социологической статистике достигается использованием масштабно-инвариантного распределения вероятностей. Некоторые примеры из книги Ципфа рассматриваются в главе 38.

В «законах Ципфа» ученые-естествоиспытатели видят аналоги скейлинговых законов — которые, будучи подкреплены экспериментальными данными, вовсе не вызывают у физиков и астрономов каких-либо особенных эмоций. Таким образом, физикам будет весьма сложно вообразить, насколько яростным оказалось противодействие, когда Ципф — как и незадолго до него Парето — применил тот же подход (с теми же результатами) к общественным наукам. До сих пор не прекращаются разнообразные попытки авансом дискредитировать всякие экспериментальные данные, полученные с помощью дважды логарифмических графиков. Я, со своей стороны, полагаю, что этот метод не вызвал бы столь ожесточенной полемики, если бы не выводы, к каким он неизбежно подталкивает. К сожалению, дважды логарифмический линейный график указывает на распределение, бросающее прямой вызов гауссовой догме,

которая успела за долгие годы привыкнуть к безраздельному царствованию и не терпит соперников. Практикующие статистики и социологи предпочли проигнорировать открытия Ципфа, чем отчасти и объясняется то поразительное отставание в развитии, какое мы наблюдаем ныне в общественных науках.

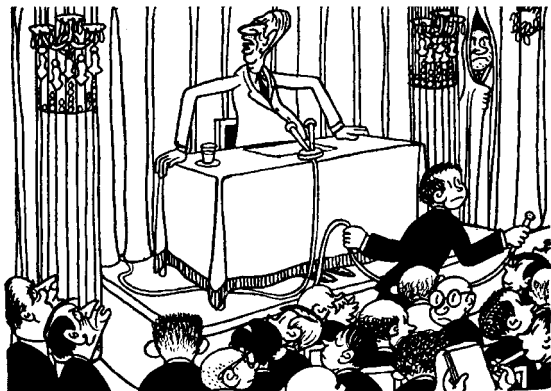
Ципф проявил достойный энциклопедистов пыл при сборе примеров проявлений гиперболических законов в общественных науках и непреклонную стойкость при защите своих открытий (равно как и аналогичных открытий, сделанных другими) от посягательств недругов. Однако читателю настоящего эссе, без сомнения, уже ясно, что фундаментальная идея Ципфа в корне неверна. Феномены, изучаемые общественными науками, *далеко не всегда* демонстрируют гиперболическую плотность распределения, в случае же явлений природы плотность распределения *далеко не всегда* оказывается гауссовой. Еще более серьезным недостатком является то, что Ципф не объединил свои открытия в стройную логически осмысленную структуру, а лишь связал их друг с другом с помощью пустых словесных рассуждений.

Одним из поворотных событий своей жизни (см. главу 42) я считаю прочтение очень мудрой рецензии на «Человеческое поведение», написанной математиком Дж. Л. Уолшем. Эта рецензия, посвященная, в основном, положительным сторонам книги, оказала большое влияние на мою тогдашнюю научную работу, косвенные последствия чего я ощущаю до сих пор. Таким образом, можно сказать, что я многим обязан Ципфу, но лишь благодаря посредничеству Уолша.

В остальном же влияние Ципфа вряд ли окажется сколько-нибудь значительным. Его пример может служить наглядной — если не карикатурной — демонстрацией тех чрезвычайно сложных проблем, которые неизбежно сопутствуют всякой попытке междисциплинарного подхода в науке. ■

Я искренне надеюсь,  
дорогой читатель,  
что ты задашь  
еще много вопросов  
на мои ответы.

Этот рисунок,  
датированный  
30 января 1964 года,  
публикуется  
с любезного разрешения  
мсье Жана Эффеля.



— Veuillez, messieurs les journalistes, fournir vos questions à mes réponses.



## 41 ◊ ИСТОРИЧЕСКИЕ ОЧЕРКИ

«Завершив строительство здания, следует убрать леса». Это изречение Гаусса часто приводят себе в оправдание те математики, которые избегают рассказывать о причинах, побуждающих их заниматься теми или иными исследованиями, и забывают об истории своей области. К счастью, в последнее время набирает силу иная тенденция, и многочисленные отступления в данном эссе служат красноречивым показателем того, какой из двух сочувствую лично я. Как бы то ни было, у меня осталось несколько историй, которые слишком велики для отступлений, но могут оказаться занятными и поучительными. Сюда входят и разрозненные трофеи, собранные мною во время библиотечных набегов, спровоцированных моим нынешним увлечением Лейбницем и Пуанкаре.

### АРИСТОТЕЛЬ И ЛЕЙБНИЦ, ВЕЛИКАЯ ЦЕПЬ БЫТИЯ, ХИМЕРЫ И ФРАКТАЛЫ

В серьезных научных работах давно уже не требуется обязательная ссылка на Аристотеля и Лейбница. Однако раздел этот, как ни странно, написан отнюдь не шутки ради. Некоторые фундаментальные понятия теории фракталов можно рассматривать как математическую реализацию тех восходящих еще к Аристотелю и Лейбницу идей, одновременно глубоких и широких, которые пронизывают всю нашу культуру и оказывают воздействие даже на людей, считающих себя невосприимчивыми к философским веяниям.

Первую нить я обнаружил у Бурбаки [49]: идея дробного интегро-дифференцирования, рассмотренного нами в главе 27, пришла Лейбницу в голову вскоре после того, как он разработал свою версию дифференциального исчисления и предложил обозначения  $d^k F/dx^k$  и  $(d/dx)^k F$ . В письме Лейбница де Лопиталлю от 30 сентября 1695 года (см. [296], II, XXIV, с. 197 и далее) сказано (в моем вольном переводе) приблизительно следующее: «Похоже, Иоганн Бернулли уже сообщил тебе о том, как я рассказывал ему об одной удивительной аналогии, используя которую, можно сказать, что последовательные дифференциалы образуют в некотором роде геометрическую прогрессию. Можно задаться вопросом, каким же будет дифференциал, обладающий дробным показателем. Оказывается, такой дифференциал можно выразить в виде бесконечного ряда. Этот результат, на первый взгляд, далек от геометрии, которой пока

еще ничего не известно о дробных показателях, однако можно предположить, что настанет день, когда эти парадоксы принесут какие-нибудь полезные плоды, — совершенно бесполезных парадоксов, как тебе известно, не бывает. Идеи, малозначащие сами по себе, вполне могут дать толчок идеям более значительным и красивым». Дальнейшее развитие эти соображения получили в письме Лейбница Иоганну Бернулли от 28 декабря 1695 года (см. [296], III.1, с. 226 и далее).

В то время, как Лейбниц много размышлял о вышеупомянутых материях, Ньютону они, похоже, вовсе не приходили в голову — по крайней мере, в связи с дифференциальным исчислением — и тому есть веская причина. В самом деле (см. «Великую цепь бытия» Лавджоя [318]), Лейбниц глубоко и искренне верил в то, что он называл «принципом непрерывности» или «принципом полноты». Аристотель в свое время также исповедовал аналогичный принцип, полагая, что разницу между любыми двумя живущими видами животных можно заполнить другими видами так, что один вид будет непрерывно перекатываться в другой. Он весьма интересовался этими «промежуточными» видами животных и даже ввел для их обозначения особый термин (о котором я узнал от Дж. Э. Р. Ллойда) — *επιμφοτερισμ*. (См. также раздел в этой главе под названием *NATURA NON FACIT SALTUS* . . .)

В принципе непрерывности находит свое отражение (или оправдание?) вера во всякого рода «недостающие звенья» и «переходные ступени», включая и химер в том смысле, какой это слово имело в греческой мифологии: тварей с львиными головами, козлиными телами, драконьими хвостами и вдобавок плюющих огнем! (Наверное, не стоило мне говорить о химерах именно в этой книге. Если мне теперь случится прочесть где-нибудь, что мое эссе представляет собой фрактальное обоснование химерических понятий, я знаю, кого мне за это благодарить.)

Современная же атомистическая теория в поисках далеких предков стремится привлечь наше внимание к противоположной традиции в греческой философии, а именно — к учению Демокрита. И конфликт между этими двумя противоположными силами продолжает играть центральную созидательную роль в интеллектуальном развитии человечества. Отметим, что канторову пыль можно рассматривать в этой связи как своего рода миротворца, сглаживающего напряженность древнего парадокса: она является бесконечно делимой, но не непрерывной. А вот древнееврейская культурная традиция химер либо отвергает, либо вовсе игнорирует, что продемонстрировано под весьма удивительным углом в работе [532].

В биологических химер никто больше не верит, однако в данном случае это неважно. В математике идея Аристотеля находит приложение в интерполяции последовательности целых чисел отношениями целых чисел и далее — пределами отношений целых чисел. При таком подходе любой феномен, определяемый последовательностью целых чисел, является кандидатом на интерполяцию. Таким образом, к столь ранним

рассуждениям о дробных дифференциалах Лейбница подтолкнула идея, составляющая суть его научного мировоззрения (и лежащая в основе его круговой упаковки, см. главу 18).

А что же Кантор, Пеано, Кох и Хаусдорф? Разве первые трое, создавая свои «чудовищные» множества, не занимались, по сути, воплощением в действительность математических химер? И разве не следует нам рассматривать хаусдорфову размерность как шкалу для упорядочения этих самых химер? Сегодня математики не читают Лейбница и Канта, но в 1900 г. они это делали. Можно представить себе, например, как Хельге фон Кох, прочтя стихотворение Джонатана Свифта, приведенное в предыдущей главе, в разделе о Ричардсоне, строит свою снежинку таким приблизительно манером. Исходный треугольник, изображенный на рис. 70, он определяет как «большую блоху». Затем точно посередине каждого бока большой блохи помещает меньшую треугольную блоху; затем рассаживает еще меньших треугольных блох где только можно на спинах старых или новых блох. И продолжает эту процедуру, «как говорят, *ad infinitum*». Я не знаю, насколько нарисованная мною картина близка к действительности, она лишь иллюстрирует мою мысль. Кох не мог не впитать современных ему культурных течений, у истоков которых стоял не кто иной, как Лейбниц. А в пародии на Свифта находят свое отражение некоторые популярные толкования принципа Лейбница.

Теперь оставим математиков, занятых искусством ради искусства (и убежденных, говоря словами Кантора, в том, что «суть математики есть свобода»), и перейдем к людям, которые воспевают Природу, пытаясь ей подражать.

Уж они-то о химерах не мечтают, скажете вы — и будете не правы. Многие из них именно этим и занимаются. В главе 10 мы говорили о практических исследователях турбулентности, ломающих себе головы в попытке решить, концентрируется изучаемый ими процесс на «фасоли», на «спагетти» или на «салате», раздраженных тем, что ответ на вопрос зависит от способа задания вопроса, и под конец требующих каких-то «промежуточных» форм, природа которых объединяет в себе свойства линий и поверхностей. В главе 34 упоминается о другой группе искателей «промежуточного», обретающихся среди исследователей галактических скоплений; этим ученым приходится описывать текстуру определенных фигур как «потокообразную», хотя упомянутые фигуры совершенно явно состоят из отдельных точек. Не будет ли уместным открыть этим трезвомыслящим искателям, искренне полагающим, что старинные письма и древнегреческие кошмары не имеют к ним никакого отношения, глаза на то, что ступают они по проторенной дорожке, ведущей к химерам?

Еще одна ниточка, указывающая на родство между канторианцами и ричардсонянцами, обнаружилась как раз в исследованиях кластеризации звезд и галактик. Здесь нужно заметить, что тема эта весьма деликатна, и тому, кто решит заняться отысканием концептуальных кор-

ней, следует быть весьма осторожным, поскольку профессиональные астрономы терпеть не могут признавать наличия какого бы то ни было влияния со стороны всякого рода звездочетов-самоучек, «какими бы привлекательными и величественными ни представлялись на первый взгляд их измышления» (цитируя Саймона Ньюкома). Этой нерасположенностью, наверное, и объясняется, почему авторство первой полностью описанной иерархической модели обычно приписывается Шарлье, астроному, а не Фурнье д'Альбу (см. соответствующий раздел главы 40) или Иммануилу Канту.

Замечания Канта об отсутствии однородности в распределении материи красноречивы и предельно ясны. Оцените эти блистательные строки (которые, спешу предупредить, вполне способны привить вам вкус к чтению книг вроде [258] или [438]): «Та часть моей теории, которая придает ей наибольшее очарование . . . включает в себя следующие идеи . . . Вполне естественно . . . рассматривать [туманные] звезды как . . . совокупности многих звезд . . . [Их] с полным правом можно считать целыми вселенными или, если можно так выразиться, Млечными Путиями . . . Можно далее предположить, что эти вышние вселенные каким-либо образом соотносятся одна с другой и посредством этого взаимного соотношения составляют еще более грандиозную совокупность . . . которая, возможно, также является лишь одним из членов нового сочетания чисел! Мы видим только первые члены постепенно расширяющейся соотношенности миров и совокупностей миров; и начало этой бесконечной прогрессии позволяет нам уже сейчас делать предположения относительно целого. Не существует пределов, лишь бездна . . . безграничная бездна».

Кант возвращает нас к Аристотелю и Лейбницу, а описанные ранее прецеденты могут объяснить, почему Кантор и Ричардсон так часто оказываются похожи друг на друга (по крайней мере, на мой взгляд). Для усиления драматического эффекта, позвольте мне обратиться к опере Верди «*Il Trovatore*»<sup>1</sup> и перефразировать кое-какие из последних слов Асусены, адресованных Луне, «*Egl'era tuo fratello*»<sup>2</sup>.

Эти великие вожди великих движений презирали друг друга и яростно сражались между собой, однако по своим интеллектуальным корням они — братья.

Разумеется, история не в состоянии объяснить тайны непостижимой эффективности математики. Тайна просто-напросто уходит вперед и меняет свой характер. Как же получается так, что смесь из предположений, результатов наблюдений и поисков интроспективно удовлетворительных структур, каковой смесью по сути являются рассматриваемые нами здесь древние писания, служит неисчерпаемым источником концепций настолько глубоких, что они до сих пор вдохновляют мате-

<sup>1</sup>«Трубадур» (ит.). — Прим. перев.

<sup>2</sup>«Он был твоим братом» (итал.). — Прим. перев.

матиков и физиков на поразительно эффективные разработки (несмотря на то, что и самим этим концепциям уже, казалось бы, пора умереть от старости, и на то, что не выдержали испытания временем и более качественные наблюдения)?

## БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ЭЙНШТЕЙН

Естественное броуновское движение является «самым значительным из тех фундаментальных феноменов, о которых физики узнали благодаря стараниям биологов» [568]. Открыт этот феномен был биологом (причем задолго до 1800 г.), другой биолог (Роберт Броун) обнаружил в 1828 г., что броуновское движение является по своей природе феноменом не биологическим, но физическим. Последний шаг сыграл в этой истории решающую роль, и стало быть *броуновским* движение называется совсем не зря, хоть некоторые критики и пытаются убедить нас в обратном.

Роберт Броун славен и другими заслугами, а о броуновском движении нет ни слова в его биографии, опубликованной в девятом издании *«Британской энциклопедии»* (1878). В изданиях с одиннадцатого по тринадцатое (1910–1926) о броуновском движении упоминается лишь мимоходом. Ну и, разумеется, в тех изданиях *«Британники»*, которые увидели свет после присуждения Перрену Нобелевской премии в 1926 г., броуновское движение описывается весьма исчерпывающе. О причинах столь неохотного признания физической природы броуновского движения подробно рассказывается в [59] и [452]. Интересующимся могу, кроме того, порекомендовать обратить внимание на общие обзоры в последних изданиях *«Британники»*, а также на труды Перрена [469, 470], Томпсона [568] и Нельсона [442].

События, которым положил начало Броун, достигли своей кульминации в 1905–1909 гг., причем теоретическими разработками занимался, в основном, Эйнштейн, а экспериментальными — в основном Перрен. Может создаться впечатление, что Эйнштейном двигало стремление объяснить результаты старых экспериментов, однако на самом деле это не так.

Свою первую статью, посвященную броуновскому движению [129] (перепечатанную позже в [131]), Эйнштейн начал словами: «В настоящей статье показано, что, в соответствии с молекулярно-кинетической теорией теплоты, взвешенные в жидкости тела микроскопических размеров совершают движение, легко видимое под микроскопом и объясняемое тепловым движением молекул. Возможно, что рассматриваемое далее движение идентично так называемому «броуновскому движению молекул». Однако доступные мне источники содержат о последнем явлении настолько неопределенные сведения, что я просто не смог сформулировать о нем никакого мнения».

Далее, в статье [130] (также перепечатанной в [131]), читаем: «Вскоре после выхода [статьи [129] мне] сообщили, [что] физики — и в первую очередь, Гуи (из Лиона) — на основании непосредственных наблюдений пришли к выводу, что так называемое броуновское движение вызвано иррегулярным тепловым движением молекул жидкости. Как качественные свойства броуновского движения, так и порядок длины описываемых частицами траекторий полностью согласуются с теоретическими положениями. Я воздержусь здесь от попыток сравнения этих данных с тем весьма скудным экспериментальным материалом, что имеется в моем распоряжении».

Значительно позднее, в письме от 6 января 1948 г., адресованном Мишелю Бессо, Эйнштейн вспоминает, что он «вывел [броуновское движение] из механики, не подозревая о том, что кто-то уже наблюдал на практике что-либо подобное».

## «КАНТОРОВЫ» ПЫЛЕВИДНЫЕ МНОЖЕСТВА И ГЕНРИ СМИТ

Один остряк заметил однажды, что наименование броуновского движения в честь Роберта Броуна нарушает основной закон эпонимии, который заключается в том, что слава несовместима со столь простыми именами, как Броун. Может быть, именно поэтому я двадцать лет писал о канторовой пыли, прежде чем случайно обнаружил, что честь ее открытия принадлежит некоему Генри Смигу.

Г. Дж. С. Смит (1826–1883) в течение долгого времени был почетным профессором геометрии в Оксфорде, и его «Научные труды» многократно издавались и переиздавались (см. [529]). Разделив лавры с Германом Минковским, он посмертно сыграл главную роль в одном странном эпизоде, срежиссированном Эрмитом. Смит также стал одним из первых критиков римановой теории интегрирования. Один остряк (не тот, что прежде) как-то заметил, что если теории интегрирования Архимеда, Коши и Лебега можно смело считать богоданными, то теория Римана, вне всякого сомнения, представляет собой неуклюжее человеческое изобретение. В самом деле, Смит в 1875 г. (см. главу XXV в [529]) показал, что она неприменима к функциям, точки разрыва которых принадлежат определенным множествам. И какие же множества он привел в качестве примера? Канторову пыль (описанную в главе 8) и пыль положительной меры (см. главу 15).

Вито Вольтерра (1860–1940) независимо воспроизвел второй контр-пример Смита в 1881 г.

Конечно, ни Смит, ни Вольтерра ничего больше не предприняли в отношении своих примеров, так ведь и Кантор в этом смысле никак не отличился! Все это описано у Хокинса [207], книга вышла в 1970 г., и мне очень интересно, почему больше нигде (насколько мне известно) не упоминается имя Смита как первооткрывателя «канторовых» пылевидных множеств?

## МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ: СТАРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

### **Масштабная инвариантность в упругих шелковых нитях.**

Старейшее эмпирическое наблюдение, которое мы сегодня можем интерпретировать как свидетельство масштабной инвариантности в физической системе, было сделано — как это ни удивительно — *сто пятьдесят лет назад*. Тогда, по настоятельной просьбе Карла Фридриха Гаусса, Вильгельм Вебер занялся исследованием поведения шелковых нитей, применяемых для крепления подвижных катушек в электромагнитных приборах, при натяжении. Он обнаружил, что при приложении к нити нагрузки в продольном направлении происходит некоторое одновременное ее растяжение, причем если систему теперь оставить в покое, то с течением времени растяжение увеличивается. При снятии нагрузки происходит одновременное сжатие, равное по величине первоначальному растяжению, далее длина нити продолжает постепенно уменьшаться до тех пор, пока не достигает своего исходного значения. Остаточные эффекты возмущения следуют закону вида  $t^{-\gamma}$ , т. е. уменьшаются с течением времени гиперболически, а не экспоненциально, чего все ожидали от них тогда — как, впрочем, ожидают и по сей день.

В 1847 г. статью по этой теме публикует Кольрауш [273], далее следуют исследования упругого растяжения стекловолокна, предпринятые в 1865 г. Уильямом Томсоном (тем самым, который позднее стал бароном Кельвином), в 1867 г. — Джеймсом Клерком Максвеллом, и в 1874 г. — Людвигом Больцманом, статью которого Максвелл счел настолько важной, что удостоил ее упоминанием в девятом издании *«Британской энциклопедии»* (1878).

Над этими именами и датами стоит внимательно поразмыслить. Они свидетельствуют: для того, чтобы сделать ту или иную задачу достойной изучения, недостаточно простого проявления интереса со стороны ученых ранга Гаусса, Кельвина, Больцмана и Максвелла. Задача, которая представляется таким людям увлекательной, но в то же время оказывается им не по зубам, имеет все шансы впасть в полнейшее забвение.

### **Масштабная инвариантность в электростатических лейденских банках.**

История вопроса со слов Э. Т. Уиттекера выглядит следующим образом: «В 1745 году Питер ван Мушенбрук (1692–1761), профессор Лейденского университета, попытался отыскать способ предохранить электрические заряды от ослабления, какое происходило при соприкосновении заряженных тел с воздухом. С этой целью он исследовал эффект погружения электрически заряженной массы в воду, заключенную в сосуд из непроводящего материала, например, стекла. В одном из экспериментов сосуд с водой был подвешен к металлической трубке с помощью проволоки, причем проволока на несколько дюймов уходила в воду через пробку; сама же трубка, подвешенная на шелковых нитях,

располагалась настолько близко от заряженного стеклянного шара, что при движении касалась его. В это время его друг по имени Кунсус, взяв стеклянный сосуд в одну руку, другой случайно коснулся металлической трубки и получил при этом сильный электрический удар; так был открыт способ накопления и усиления электрической энергии. Аббат Нолле назвал изобретенный Мушенбруком прибор *лейденской склянкой*.»

Кольрауш [274] установил, что скорость разряда лейденской банки подчиняется той же закономерности, что и растяжение шелковых нитей: заряд уменьшается со временем по гиперболическому закону. В своей докторской диссертации Жак Кюри (брат и первый сотрудник Пьера Кюри) подробно рассмотрел поведение заряда в лейденской банке при замене стекла на другие диэлектрики и обнаружил, что одни диэлектрики дают экспоненциальное убывание заряда, другие же — гиперболическое с различными значениями показателя  $\gamma$ .

## МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ: ЖИВУЧИЕ ПАНАЦЕИ ИЗ ПРОШЛОГО

На протяжении более чем ста лет в самых различных научных журналах с завидным постоянством публиковались бесчисленные попытки объяснения масштабной-инвариантных убываний и шумов. Все эти попытки являют собой довольно жалкое зрелище. Их безуспешность однообразна и предсказуема, поскольку они снова и снова — в различных контекстах и различными словами — упираются в одни и те же тупики, бесперспективность которых была осознана еще в начале XIX в.

**Панацея смеси Хопкинсона.** Столкнувшись с гиперболическим убыванием заряда в лейденской банке, Хопкинсон (кстати, ученик Максвелла) выдвинул в 1878 г. «приблизительное» объяснение, основанное на том, что «стекло можно рассматривать как смесь целого ряда различных силикатов, которые ведут себя по-разному». Это надо понимать так, что функция убывания, которая *выглядит* как гипербола, в действительности представляет собой смесь двух или более различных экспоненциальных функций вида  $\exp(-s/\tau_m)$ , каждая из которых характеризуется своим значением времени релаксации  $\tau_m$ . Однако даже из тогдашних экспериментальных данных можно видеть, что ни двух, ни четырех экспонент недостаточно для получения гиперболической функции, и аргументацию Хопкинсона сочли несостоятельной.

И все же она продолжает время от времени всплывать, как правило при отсутствии достаточного для ее опровержения количества данных.

**Панацея распределенных значений времени релаксации.** Когда данные содержат многие десятичные разряды, в результате чего эмпирическая кривая оказывается представима только в виде смеси какого-нибудь нелепого количества экспоненциальных функций (ска-



жем, 17 или 23), возникает искушение не останавливаться на полпути и рассмотреть возможность существования смеси *бесконечного* числа экспоненциальных функций. Согласно определению гамма-функции Эйлера, имеем

$$t^{-\gamma} = [\Gamma(\gamma)]^{-1} \int_0^{\infty} \tau^{-(\gamma+1)} \exp(-t/\tau) d\tau.$$

Из этого тождества следует, что если «интенсивность» времени релаксации  $\tau$  экспоненциальной функции равна  $\tau^{-(\gamma+1)}$ , то смесь является гиперболической. Перед нами типичный пример логического круга. Предполагается, что на выходе научного объяснения мы должны получить нечто *a priori* менее очевидное, нежели имели на входе, однако в данном случае выражения  $t^{-\gamma}$  и  $\tau^{-(\gamma+1)}$  функционально идентичны.

**Панацея переходного режима.** Вторую по распространенности реакцию при встрече с симптомами масштабной инвариантности, описанными в предыдущем разделе, можно сформулировать следующим образом: все эти гиперболические функции  $t^{-\gamma}$  объясняются, несомненно, какими-либо переходными явлениями, если же наблюдать процесс убывания в течение достаточно долгого времени, то характер закономерности непременно изменится на гиперболический. Первую попытку систематического поиска «точки изменения» предпринял в 1907 г. фон Швейдлер [578]: сначала он измерял величину заряда на лейденской банке с интервалами в 100 секунд, затем интервалы постепенно становились больше, и общее время эксперимента составило 16 миллионов секунд (т.е. 200 суток — начался летом, закончился зимой!). Убывание оказалось гиперболическим, точка в точку. Позднее проводились эксперименты по измерению электрических  $1/f$ -шумов (продолжительность опытов варьировалась от нескольких часов до нескольких дней). Результат —  $1/f$ -убывание в поразительном большинстве случаев.

В предыдущих главах — в частности, при исследовании скоплений галактик в главе 9 — отмечалось, что ученые способны настолько погрузиться в поиски порогового значения, что их совершенно перестает занимать необходимость описания и объяснения феноменов, характерных для диапазона масштабной инвариантности. Как ни странно, инженерам также может быть свойственна чрезмерная увлеченность поисками порога, зачастую даже в большей степени. В главе 27 мы рассматривали предложенную мною модель речного стока, которую гидрологи не спешили брать на вооружение только потому, что в ней предполагается бесконечный порог масштабной инвариантности. Конечность порога в инженерном проекте не имеет абсолютно никакого значения, тем не менее его пылко жаждут во всем остальном, казалось бы, вполне практические люди.

## МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПО ЛЕЙБНИЦУ И ЛАПЛАСУ

Классифицировать научные труды Лейбница — занятие как нельзя более отрезвляющее. Рядом с дифференциальным исчислением и другими идеями, доведенными до логического завершения, взгляду открывается поразительное по количеству и разнообразию множество предвзятых и предвзятых по количеству и разнообразию замыслов. Некоторые примеры мы уже видели: «упаковка» в главе 18 и «принцип непрерывности» в первом разделе настоящей главы. Помимо этого, Лейбниц положил начало формальной логике и первым (в письме к Гюйгенсу, 1679) предположил, что в геометрии должна появиться новая область, позже получившая название топологии. (Перейдя на менее возвышенный уровень, отметим, что именно Лейбниц первым ввел в математические обозначения буквы еврейского алфавита и . . . знаки Зодиака!)

Моя лейбницемания еще более усугубилась, когда я обнаружил, что ее вдохновитель одно время придавал некоторое значение геометрической масштабной инвариантности. В работе «*Euclidis прота*»<sup>1</sup> (см. [296], том II.1, с. 183–211), представляющей собой попытку конкретизировать евклидовы аксиомы, Лейбниц на с. 185 пишет: «IV (2): У меня имеются самые разнообразные определения прямой. Например, *прямая линия* есть кривая, каждая часть которой подобна целому; этим свойством обладает лишь прямая, причем не только среди кривых, но и среди множеств.» Сегодня мы можем доказать это утверждение. Далее Лейбниц описывает более ограниченные самоподобные свойства плоскости.

Независимо от Лейбница, та же мысль пришла в 1860 г. в голову Жозефа Дельбёфа (1831–1896), бельгийского мыслителя, чьи взгляды Б. Рассел подвергает беззлойной критике [506]. Дельбёф, переклочивший свой энтузиазм любителя с классической литературы на философию геометрии, стал поистине необычной личностью в науке. Однако его «принцип подобия» почти ничего не добавляет к вышеприведенной цитате из Лейбница (о которой он, следует сказать, не знал, когда проводил свои исследования, и на которую он впоследствии сослался — благодаря чему о ней узнал и я — с трогательной смесью великодушия и гордости). Дельбёф подвизался у нас еще и на с. 580 (хотя и в несколько второстепенной роли).

Еще одно упоминание о масштабной инвариантности можно усмотреть (но только если вы достаточно великодушны, чтобы быть щедрыми к богачам) в максимах 64 и 69 «Монадологии» Лейбница, где он утверждает, что мельчайшие частицы мироздания обладают в точности настолько же сложной организацией, что и большие его части.

Лаплас также размышлял о вещах, имеющих отношение к масштаб-

<sup>1</sup>«"Начала" Евклида» (лат., гр.). — Прим. перев.

ной инвариантности. В пятом издании его «Системы мироздания», опубликованном в 1842 г. и переведенном на английский язык (в четвертом издании 1813 г. этого нет), в главе V книги V имеется следующее замечание (см. [289], том VI): «Одним из замечательных свойств [ньютоновского тяготения] является то, что если размеры всех тел во Вселенной, расстояния между этими телами и скорости их движения пропорционально увеличить или уменьшить, то они станут описывать кривые в точности подобные тем, что они описывают сейчас; т. е. Вселенная, уменьшенная до наименьших вообразимых размеров, явит внешним наблюдателям тот же самый облик. Законы природы, таким образом, позволяют нам наблюдать лишь относительные размеры . . . [Далее цитата продолжается в подстраничном примечании] Все старания геометров доказать евклидову аксиому о параллельных прямых остаются по сей день безуспешными . . . Понятие . . . окружности не несет в себе ничего, что было бы связано с ее абсолютной величиной. Однако если мы уменьшим ее радиус, нам придется уменьшить пропорционально и ее длину, и длины сторон всех вписанных в нее фигур. Эта пропорциональность представляется мне намного более естественной аксиомой, нежели упомянутая аксиома Евклида. Любопытно наблюдать это же свойство в результатах теории всемирного тяготения.»

## NATURA NON FACIT SALTUS<sup>1</sup> И «ПРАВДИВАЯ ИСТОРИЯ ТЕВТОБОКА»

Фраза «*Natura non facit saltus*» представляет собой наиболее известную формулировку «принципа непрерывности», о котором мы говорили в первом разделе настоящей главы и который Лейбниц полагал одним из «лучших и наиболее подтвержденных» своих достижений. Кроме того, этот принцип можно счесть неявным и отдаленным предтечей геометрических «промежуточных» форм — фракталов. Однако по утверждению Бартлетта [17], автором вышеприведенной фразы является Линней. Подобное приписывание показалось мне не совсем честным, я произвел собственное расследование и обнаружил несколько занятных фактов и целую историю.

Верно, знаменитый ботаник и классификатор восемнадцатого века Карл Линней и в самом деле однажды написал эту фразу, но лишь мимоходом, выражая, скорее, некий обыденный взгляд на вещи, нежели формулируя новый и важный принцип. Фраза Линнея представляет собой перевод французского выражения «*La nature ne fait jamais de sauts*»<sup>2</sup>, которое как раз и встречается у Лейбница. Перу последнего принадлежат и многочисленные вариации на эту тему — такие, например, как

<sup>1</sup>Природа не совершает скачков (лат.). — Прим. перев.

<sup>2</sup>Природа никогда не совершает скачков (фр.). — Прим. перев.

«*Nulla mutatio fiat per saltum*»<sup>1</sup>, «*Nullam transitionem fieri per saltum*»<sup>2</sup>, «*Tout va par degrés dans la nature et rien par saut*»<sup>3</sup>. Возможно даже, что у Лейбница и нет в точности такой же латинской фразы, какую употребил Линней.

Самое же забавное и интригующее заключается в том, что латинская фраза Линнея, была предвосхищена задолго до Лейбница, еще в 1613 году, в следующем виде: «*Natura in suis operationibus non facit saltum*»<sup>4</sup> (Употребление в данном случае единственного числа *saltum* вместо множественного *saltus* выдает в авторе фразы человека, принадлежащего к тому угрюмому меньшинству, которое полагает, что слово *ничто* единственного числа.) Но кто же автор? Стивенсон ([541], с. 1382, № 18) приписывает эту честь некоему Жаку Тиссо. А кто такой Тиссо? У меня сложилось впечатление, что этого уже, по всей видимости, никто не знает, благодаря чему я получил замечательный повод совершить набег на парижскую *Bibliothèque Nationale*<sup>5</sup>.

Искомая фраза обнаружилась в одной пятнадцатистраничной брошюре с очень длинным заглавием, которое выглядит (в сокращенном виде) следующим образом: «*Правдивая история о жизни, смерти и останках великана Тевтобока, короля ... которого сразил в 105 году до Р. Х. римский консул Марий ... погребен же сей великан был вблизи римского поселения*». В брошюре на смеси французского с латынью повествуется об обнаружении недалеко от Гренобля гигантских костей и о том, почему было решено, что принадлежат они указанному Тевтобоку, королю и человеку.

Выяснилось также, что имеется и репринт «Правдивой истории» в сборнике «*Variétés historiques et littéraires, recueil de pièces volantes rares et curieuses, annotées par M. Edouard Fournier*»<sup>6</sup> (том IX, 1859, с. 241–257). Мое любопытство было, наконец, вознаграждено. В чрезвычайно пространным примечании Фурнье описывает, как все происходило на самом деле. 11 января 1613 г. землекопы обнаружили под 17–18 футами песка несколько очень больших костей, и среди окрестного населения распространились слухи о том, что под землей была найдена гробница некого великана, а в ней медаль консула Мария и камень с именем Тевтобока. «Подлинная принадлежность» костей была установлена двумя местными достойными гражданами, история попала в газеты, а сами кости были даже представлены королю Людовику XIII. Относительно происхождения костей разгорелась нешуточная полемика, которая, впрочем, вскоре истощилась. Позже, когда в извлекаемых из-под земли костях ученые

<sup>1</sup> Никакое изменение не происходит скачкообразно (лат.). — *Прим. перев.*

<sup>2</sup> Никакой переход не случается скачкообразно (лат.). — *Прим. перев.*

<sup>3</sup> Все в природе происходит постепенно, а не скачкообразно (фр.). — *Прим. перев.*

<sup>4</sup> Природа в своих действиях не совершает скачка (лат.). — *Прим. перев.*

<sup>5</sup> Национальная библиотека (фр.). — *Прим. перев.*

<sup>6</sup> «*Историческая и литературная смесь. Собрание документов редких и любопытных, с комментариями мсье Эдуара Фурнье*» (фр.). — *Прим. перев.*

стали видеть останки исчезнувших животных, вспомнили и о Тевтобокке. К делу подключили палеонтологов, и те установили, что «король Тевтобок» был мастодонтом.

В примечании также сказано, что *никакого Жака Тиссо* в действительности не существовало, это всего лишь псевдоним, под которым опубликовали «Правдивую историю» ее истинные авторы — упомянутые выше два «специалиста» ... как проспект предполагаемого циркового представления.

И все же первоисточник фразы «*Natura non ...*» так и остается загадкой. Мне почему-то не хочется думать, что ее сочинили два захолустных шарлатана, якобы цитируя Аристотеля. Более вероятно, что они просто бездумно повторяли бытовавшее в те времена присловье, а вопрос о том, кто же в действительности является автором этих слов, все еще остается открыт.

## ПУАНКАРЕ И ФРАКТАЛЬНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Этот раздел, в противоположность другим разделам настоящей главы, посвящен открытиям, которые не просто оказались занимательны, но и оказали непосредственное и долговременное воздействие на мою работу. Когда «Фракталы» 1977 г. пребывали уже на стадии корректуры, мое внимание привлекли кое-какие тексты Анри Пуанкаре (1854–1912), подтолкнувшие меня к новым направлениям в исследованиях, вкратце описанным в главах с 18 по 20 (полный отчет об этих исследованиях я планирую вскоре представить вашему вниманию). Позвольте мне ответить здесь на некоторые вопросы, которые с неизбежностью возникают при чтении этих (и связанных с ними) работ Пуанкаре.

«Да» и «нет»: Пуанкаре определенно был первым исследователем фрактальных («странных») аттракторов. Однако ничто из того, что мне известно о его трудах, не делает его даже отдаленным предтечей фрактальной геометрии доступных взгляду проявлений Природы.

«Да»: Об этом факте никто уже не помнит, но меньше, чем за год до выхода в свет статьи Кантора [62] (1883) ортодоксальные математики познанились с предложенными Пуанкаре множествами, близкими к трюичной пыли и функции Вейерштрасса, и произошло это задолго до создания революционных теорий множеств и функций вещественного переменного.

«Нет»: В те времена подобные разработки незамеченными не оставались. Они вошли в теорию автоморфных функций (см. главу 18), прославивших Пуанкаре и Клейна. В этом же направлении работал и Поль Пенлеве (1863–1933), ученый, к которому прислушивались и люди, далекие от чистой математики. Пенлеве интересовался инженерным делом (он был первым пассажиром Уилбера Райта после несчастного случая с Орвиллом Райтом), а затем решил заняться политикой и даже побывал премьер-министром Франции. Кстати, обнаружив, что близким другом

Пенлеве был Перрен, я склонен думать, что «мечтания», упомянутые во второй главе, не так уж оторваны от жизни.

«Да»: Кантор и Пуанкаре оказались в конце концов по разные стороны интеллектуальных баррикад — причем от едкого сарказма Пуанкаре пострадали и Кантор, и Пеано; чего стоит хотя бы вот такое знаменитое замечание Пуанкаре: «Канторизм [обещает нам] радости врача, исследующего интересный патологический случай». (См. также подраздел ЭРМИТ, с. 578.) Поэтому мне представляется уместным привести здесь свидетельство того, что когда возникла такая необходимость, Пуанкаре признал-таки, что присутствие классических чудовищ можно допустить пусть и не при описании видимой природы, но хотя бы в абстрактной математической физике. Ниже приводятся в моем вольном переводе выдержки из «Новых методов небесной механики» Пуанкаре ([477], том III, с. 389–390).

«Попробуем представить себе рисунок, образуемый двумя кривыми [ $C'$  и  $C''$ ], соответствующими дважды асимптотическому решению [задачи о трех телах]. Точки их пересечения образуют нечто вроде бесконечно плотной . . . решетки. Каждая кривая нигде не пересекает самое себя, однако должна изгибаться весьма сложным образом для того, чтобы бесконечно часто пересекать каждый узел решетки.

Кривая эта, должно быть, поразительно сложна, и я даже не стану пытаться изобразить ее. Вряд ли что-либо другое может дать нам лучшее представление о сложности задачи о трех телах или вообще любой задачи динамики, для которой не существует полного набора интегралов . . .

Перечислим возможные предположения:

- 1) [Множество  $S'$  (или  $S''$ ), определяемое как кривая  $C'$  (или  $C''$ ) плюс ее предельные точки] заполняет полуплоскость. Если так, то Солнечная система неустойчива.
- 2) [Множество  $S'$  (или  $S''$ )] имеет [положительную и] конечную площадь и занимает ограниченную область плоскости с возможными "пустотами" . . .
- 3) И наконец, площадь [множества  $S'$  (или  $S''$ )] обращается в нуль. В этом случае мы имеем дело с аналогом [канторовой пыли]».

С целью укрепить впечатление, оставляемое этими незаслуженно забытыми строками, приведу еще несколько цитат (опять же в моем вольном переводе) из Адамара [187], Пенлеве [459] и Данжуа [101, 102].

Адамар: «Пуанкаре можно считать предтечей теории множеств в том смысле, что еще прежде, чем она была создана, он применил ее в одном из своих самых поразительных и наиболее справедливо знаменитых исследований. В самом деле, он показал, что особенности автоморфных функций образуют либо полную окружность, либо канторову пыль. Что касается последней категории, то у предшественников Пуанкаре не

достало воображения даже представить себе что-либо подобное. Упомянутое множество представляет собой одно из важнейших достижений теории множеств, однако Пуанкаре опередил здесь и Бендиксона, и даже самого Кантора.

Примеры кривых, не имеющих касательных ни в одной точке, стали уже благодаря Риману и Вейерштрассу классическими. Существуют, однако, вполне очевидные различия между, с одной стороны, фактом, установленным посредством умственных упражнений развлекательного характера, проделанных с единственной целью, заключающейся в доказательстве принципиальной возможности установления этого самого факта — очередного экспоната на выставке чудовищ — и, с другой стороны, тем же фактом, но вытекающим из теории, которая опирается на самые обычные и простые задачи, составляющие самую суть анализа».

Пенлеве: «Я должен настаивать на тех отношениях, что сложились на данный момент между теорией функций и канторовыми пылями. Последние построения были в свое время настолько новы по духу, что не у всякого редактора математического журнала доставало отваги публиковать исследования на эту тему. Многие читатели полагали такие исследования скорее философскими, нежели научными. Однако прогресс математики показал несостоятельность подобных суждений. В 1883 г. (году, дважды знаменательном для истории математики XIX в.) в «Acta Mathematica» поочередно публиковались работы Пуанкаре по функциям Фукса и Клейна и работы Кантора».

Упомянутые работы Кантора, помещенные на с. 305–414 второго тома «Acta» (само множество попало на с. 407), являются переводами на французский, выполненными при поддержке Миттаг-Леффлера, тогдашнего редактора «Acta», желающего помочь Кантору в борьбе за признание. Некоторые из них (см. подраздел ЭРМИТ, на с. 578) редактировал Пуанкаре. Однако еще прежде, чем работы Кантора вышли на немецком языке, Пуанкаре уже опубликовал в «Comptes Rendus» вкратце свои результаты. Пуанкаре настолько быстро воспринял одно из нововведений Кантора, что в своей первой статье в «Acta» именовал *множества* исключительно немецким термином *Mengen*<sup>1</sup>, не желая тратить время на поиски французского эквивалента.

И наконец, Данжуа [101]: «Некоторые ученые разделяют истины на две категории: одни истины со вкусом одеты, хорошо образованны и воспитаны в соответствии с приличиями, для других же дверь дома джентльмена должна оставаться закрытой. Я говорю о теории множеств, которая тем не менее открывает перед нами целую новую Вселенную, несравненно более обширную и менее искусственную, более простую и логичную, более пригодную для моделирования физической Вселенной — одним словом, более истинную, чем известная нам Вселенная.

<sup>1</sup>Множества (нем.). — Прим. перев.

Канторова пыль обладает многими свойствами непрерывной материи и демонстрирует весьма глубокое соответствие реальности».

В другой работе ([102], с. 23) Данжуа пишет: «Я считаю очевидным, что разрывные модели гораздо более удовлетворительно и успешно, нежели модели общепринятые, объясняют целый ряд естественных феноменов. И поскольку о законах разрывности известно гораздо меньше, чем о законах непрерывности, первые следует изучать как можно более широко и подробно. Когда степени понимания обоих родов законов сравниваются, физики получают возможность применять тот или другой подход в соответствии с текущей необходимостью».

К сожалению, Данжуа не подкрепляет эти «мечтания» никакими конкретными разработками, ограничиваясь общими местами из Пуанкаре и Пенлеве. Исключение, пожалуй, составляет лишь его работа по дифференциальным уравнениям на поверхности тора (1932). Отвечая на вопрос, поставленный Пуанкаре, Данжуа показывает, что пересечение решения и меридиана может представлять собой весь меридиан или любую заданную канторову пыль. Первый случай — в отличие от последнего — согласуется с физическим понятием эргодического поведения. Аналогичный пример приводит Боль в 1916 г.

Жак Адамар (1865–1963) был знаменитым математиком и специалистом в математической физике, а Арно Данжуа (1884–1974) — выдающимся математиком-теоретиком и не имел среди физиков никакого веса. Так или иначе, их мысли не нашли в то время отклика. Оба отдали дань уважения Пуанкаре и Пенлеве, возродив идеи, которые их авторы так и не удосужились подкрепить повторением.

## ПУАНКАРЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА

Сегодняшнее возрождение интереса к Пуанкаре может послужить оправданием для приведения здесь одной технической подробности, не имеющей непосредственного отношения к настоящему эссе.

Речь идет о конструкции, известной физикам под названием канонического распределения Гиббса, а статистикам — под названием распределения экспоненциального типа. В [476] Пуанкаре стремится найти такие распределения вероятностей, чтобы максимальная оценка параметра правдоподобия  $p$ , вычисляемого на основании  $M$  выборочных

значений  $x_1, \dots, x_m, \dots, x_M$ , имела бы вид  $G \left[ \sum_{m=1}^M F(x_m) / M \right]$ . Ины-

ми словами, должна существовать возможность изменять масштаб значений  $x$  и  $p$  в таких распределениях с помощью функций  $F(x)$  и  $G^{-1}(p)$  так, чтобы максимальная оценка правдоподобия  $p$  была бы равна выборочному среднему переменной  $x$ . Это, конечно же, происходит в том случае, когда параметр  $p$  является математическим ожиданием гауссовой переменной, однако Пуанкаре дает более общее решение, называемое сейчас распределением Гиббса.



Этот факт был заново и независимо от других обнаружен Сцилардом в 1925 г. Затем, около 1935 г., Купман, Питман и Дармуа задались тем же вопросом относительно наиболее общей процедуры оценивания при отсутствии ограничений на максимальное значение оценки правдоподобия. Это свойство распределения Гиббса, называемое статистиками *достаточностью*, играет центральную роль в аксиоматическом представлении статистической термодинамики Сциларда–Гиббса (см. [339, 344]). При таком подходе свойственная статистическим выводам произвольность присутствует в определении температуры замкнутой системы, но отсутствует в выведении канонического распределения. (Более позднее аксиоматическое представление, основанное на «правиле максимальной информации», объявляет само каноническое распределение статистическим выводом, что, на мой взгляд, искажает его смысл.)

## РАЗМЕРНОСТЬ

**Евклид (ок. 300 г. до н. э.).** Понятие размерности лежит в основе определений, которые открывают первую книгу «Начал» Евклида, посвященную геометрии плоскости:

1. Точка есть фигура, не имеющая частей.
2. Линия есть фигура, обладающая длиной, но не обладающая шириной.
3. Оконечностями линии являются точки.
5. Поверхность есть фигура, обладающая только длиной и шириной.
6. Оконечностями поверхности являются линии.

Развитие темы находим в определениях, с которых начинается короткая девятая книга, посвященная геометрии пространства:

1. Тело есть фигура, обладающая длиной, шириной и глубиной.
2. Оконечностями тела являются поверхности.

(На эту тему у Хита [208] имеются подробные комментарии.)

Происхождение перечисленных идей покрыто мраком неизвестности. Гатри (см. [185], т. 1) усматривает следы понятия размерности еще у Пифагора (582–507 г. до н. э.), Ван-дер-Варден же полагает, что эти следы не следует принимать в расчет. С другой стороны, Платон (427–347 г. до н. э.) в седьмой книге своего «Государства» комментирует Сократа следующим образом: «после плоских поверхностей . . . правильным будет добавить к двум измерениям третье . . . то есть измерение, присущее кубам и прочим телам, обладающим глубиной». Было бы весьма полезно разузнать больше о других доевклидовых исследованиях, связанных с понятием размерности.

**Риман.** Отсутствие каких бы то ни было исследований концепции размерности было отмечено Риманом в его диссертации «О гипотезах, сформировавших фундамент геометрии» (1854).

**Эрмит.** Репутация Шарля Эрмита как архиконсерватора от математики (см. его письмо Стиллесу в главе 6) подтверждается также его письмами, адресованными Миттаг-Леффлеру (см. [119]).

13 апреля 1883 г.: «Читать писания Кантора — сущая пытка ... и ни у кого из нас не возникает искушения подражать ему ... Соответствие между прямой и плоскостью абсолютно нас не трогает, и мы полагаем, что это наблюдение (по крайней мере, до тех, пока никто не сделал из него никаких выводов) проистекает из рассмотрения материй настолько произвольных, что автору было бы лучше воздержаться от его обнаружения ... [Однако Кантор вполне может] найти читателей, которые станут изучать его работы с интересом и удовольствием, чего о нас сказать, увы, нельзя».

5 мая 1883 года: «Перевод [статьи Кантора] был отредактирован Пуанкаре со всей тщательностью ... [Он] полагает, что почти всем читателям-французам будут чужды изыскания Кантора, сочетающие в себе философию с математикой и носящие чрезмерно произвольный характер. Я думаю, что Пуанкаре прав».

**Пуанкаре.** Красноречивое и в конечном счете чрезвычайно плодотворное развитие идей Евклида было представлено Пуанкаре в 1903 г. (см. [478], глава III, раздел 3) и в 1912 г. (см. [479], часть 9). Позволю себе процитировать кое-что в моем вольном переводе.

«Что мы имеем в виду, говоря, что размерность пространства равна трем? Если для разделения континуума  $C$  достаточно рассмотреть в качестве сечений определенное количество различных элементов, мы говорим, что *размерность* такого континуума равна *единице* ... Если же ... для разделения континуума достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, равной единице, мы говорим, что *размерность* континуума  $C$  равна *двум*. Если достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, не превышающей двух, мы говорим, что *размерность* континуума  $C$  равна *трем*; и так далее.

Для обоснования этого определения необходимо выяснить, как именно геометры вводят в начале своих работ понятие размерности. Итак, что же мы видим? Как правило, они начинают с определения поверхностей как границ тел либо участков пространства, кривых — как границ поверхностей, точек — как границ кривых, причем утверждают, что далее эту процедуру продолжить невозможно.

Это в точности совпадает с определением, приведенным выше: для разделения пространства необходимы сечения, называемые поверхностями; для разделения поверхностей — сечения, называемые кривыми; точку же разделить нельзя, так как она не является континуумом. Поскольку кривые разделяются сечениями, которые не являются континуу-

мами, размерность кривых равна единице; поскольку поверхности разделяются непрерывными сечениями с размерностью, равной единице, размерность поверхностей равна двум; и, наконец, пространство можно разделить непрерывными сечениями, обладающими двумя измерениями, следовательно, пространство является континуумом с размерностью, равной трем».

◁ Вышеприведенные рассуждения неприменимы к фрактальной размерности. Для внутренних областей всевозможных островов, упоминаемых в нашем эссе, размерности  $D$  и  $D_T$  совпадают, и обе равны двум, однако береговые линии ведут себя совершенно иначе: их топологическая размерность равна единице, а фрактальная — превышает единицу. ►

**От Брауэра до Менгера.** А сейчас заглянем в «Теорию размерности» Гуревича и Уоллмена [231]: «В 1913 г. Брауэр построил на интуитивном фундаменте, предложенном Пуанкаре, точное и топологически инвариантное определение размерности, которое для очень широкого класса пространств эквивалентно тому, что мы используем сегодня. Статью Брауэра в течение многих лет никто не замечал. Затем, в 1922 г., независимо от Брауэра и друг от друга концепцию Брауэра воспроизвели Менгер и Урысон, причем с важными уточнениями.

До тех пор смысл термина *размерность* математики представляли себе довольно расплывчато. Конфигурация считалась  $E$ -мерной, если наименьшее количество вещественных параметров, необходимых для описания (неким неопределенным образом) ее точек, равнялось  $E$ . Опасность и несостоятельность такого подхода стали очевидными благодаря двум выдающимся открытиям конца XIX в.: канторово однозначное соответствие между точками прямой и точками плоскости и непрерывное отображение интервала на всю площадь квадрата, продемонстрированное Пеано. Первое подорвало всеобщую уверенность в том, что плоскость богаче точками, нежели прямая, и показало, что размерность можно изменять однозначным преобразованием. Второе опровергло убеждение, что размерность можно определить как наименьшее число непрерывных вещественных параметров, требуемых для описания пространства, и показало, что с помощью однозначного непрерывного преобразования размерность можно увеличить.

Остался, однако, открытым один чрезвычайно важный вопрос: возможно ли установить соответствие между евклидовыми пространствами с размерностями  $E$  и  $E_0$ , которое сочетало бы в себе признаки построений Кантора и Пеано, т. е. соответствие, которое было бы *одновременно* однозначным и непрерывным? Вопрос этот можно с полным правом считать ключевым, так как существование указанного преобразования евклидова  $E$ -пространства в евклидово же  $E_0$ -пространство означало бы, что размерность (в ее естественном понимании, заключающемся в том, что размерность  $E$ -пространства равна  $E$ ) не имеет абсолютно никакого топологического смысла! Как следствие, класс топологических преобразований оказался бы в этом случае чрезмерно широким для то-

го, чтобы остаться хоть сколько-нибудь полезным для практического геометрического применения.

Первое доказательство того, что евклидово  $E$ -пространство и евклидово  $E_0$ -пространство являются гомеоморфными только в том случае, когда  $E = E_0$ , было дано Брауэром в 1911 г. (см. [57], т. 2, с. 430–434; особый случай  $E \leq 3$  и  $E_0 > E$  был рассмотрен в 1906 году Й. Люротом). Однако в этом доказательстве не указывалось в явном виде какое-либо простое топологическое свойство евклидова  $E$ -пространства, которое отличало бы его от евклидова  $E_0$ -пространства и обуславливало бы невозможность гомеоморфизма этих пространств. Более сильной в этом смысле оказалась процедура, предложенная Брауэром в 1913 г., когда он ввел целочисленную функцию пространства, топологически инвариантного по самому своему определению. В евклидовом пространстве эта функция всегда принимает значение  $E$  (оправдывая тем самым свое название).

Тем временем Лебег подошел к доказательству того, что размерность евклидова пространства топологически инвариантна, с другой стороны. В 1911 г. (см. [295], т. 4, с. 169–210) он отметил, что квадрат можно покрыть произвольно малыми "плитками" таким образом, что ни одна точка квадрата не будет содержаться в более чем трех таких плитках; однако если плитки достаточно малы, то по меньшей мере каждые три из них имеют общую точку. Аналогичным образом может быть разбит на произвольно малые кирпичики куб в евклидовом  $E$ -пространстве так, что общую точку будут иметь не более чем  $E + 1$  таких кирпичиков. Лебег предположил, что это наименьшее число не может быть меньше  $E + 1$ , т. е. при любом разбиении на достаточно малые элементы должна существовать точка, общая для по меньшей мере  $E + 1$  этих элементов. (Теорема доказана Брауэром в 1913 г.) Теорема Лебега указывает и на топологическое свойство, отличающее евклидово  $E$ -пространство от евклидова  $E_0$ -пространства, и тем самым также предполагает топологическую инвариантность размерностей евклидовых пространств».

Об относительных вкладах в развитие теории размерности Пуанкаре, Брауэра, Лебега, Урысона и Менгера можно прочесть в заметках Х. Фрейдентала в [57] (т. 2, глава 6) и Менгера (см. [428], глава 21).

**Фрактальная размерность и Дельбёф.** Эта история гораздо более проста: фрактальная размерность появилась, практически, во всеоружии из трудов Хаусдорфа. Однако без налета таинственности не обошлось и здесь. В самом деле, у Рассела, например, нет ни единого слова о бурях, что бушевали тогда вокруг Кантора и Пеано, но зато есть любопытное примечание ([506], с. 162): «Дельбёф, правда, говорит о геометриях с размерностями вида  $m/n$ , но не указывает при этом никаких источников (Rev. Phil. T. xxxvii, с. 450)». Дельбёф, стало быть, заслуживает нашего особого внимания (см. также раздел МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ПО ЛЕЙБНИЦУ И ЛАПЛАСУ), однако и после самых тщательных поисков (в которых мне помогал Ф. Фербригген) я

не смог обнаружить в работах Дельбёфа больше никаких намеков на фрактальную размерность.

**Булиган.** Определение размерности Кантора–Минковского–Булигана (см. главы 5 и 39) гораздо менее удовлетворительно, нежели определение Хаусдорфа–Безиковича, но мне все же хотелось бы сказать здесь несколько слов в защиту Жоржа Булигана (1889–1979). Его многочисленные труды сейчас мало кто читает, даже в Париже, однако в те времена, когда я был студентом и сдавал ему экзамены, они пользовались большой известностью. Его книги всегда напоминают мне о том, кто именно ввел меня в мир «современной» математики, и я часто задаюсь вопросом, смогли бы другие — не столь мягкие и человечные, но, возможно, более правильные в педагогическом смысле — способы представления материала дать такое же интуитивное понимание предмета, которое в случае необходимости всегда под рукой и никогда меня не подводило. Наверное, нет. Доживи Булиган до сегодняшнего дня и окажись свидетелем великих побед геометрии, которую столь беззаветно любил, он, я уверен, остался бы доволен увиденным.

## ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

Непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции Вейерштрасса оказали столь сильное воздействие на развитие математики, что становился любопытным выяснять, не следует ли их история образу, нарисованному Фаркашем Бойяи в письме к своему сыну, Яношу: «Есть доля истины в том, что у многих вещей есть своя эпоха, в течение которой одни одновременно встречаются в самых различных местах — так весной на каждом склоне можно найти цветущие фиалки». Еще, похоже, слетаются соавторы на мед возможной публикации.

Однако в данном случае события разворачивались совершенно иначе. Трудно поверить, но Вейерштрасс так и не опубликовал своего открытия, хотя и прочел о нем лекцию в Берлинской академии наук 18 июля 1872 г. Конспект лекции попал-таки в изданное значительно позднее «Собрание сочинений» [588], однако мир узнал об открытии Вейерштрасса только в 1875 г. из статьи Дюбуа-Реймона [115] (там же эти функции были впервые названы именем первооткрывателя). Таким образом, год 1875 является не более чем удобной символической датой для обозначения начала Великого кризиса математики.

Дюбуа-Реймон пишет, что «метафизика этих функций скрывает, по всей видимости, множество загадок, и я не могу избавиться от ощущения, что поиски ответов [на них] приведут нас к границе наших интеллектуальных возможностей». Возникает и другое ощущение: никто, похоже, особенно и не спешил выяснить, где же находятся эти самые границы. Те из современников, кто было подступился к задаче (Гастон Дарбу, например), тут же отступили и ударились в крайний консерватизм, у других же и на это духу не хватило. Кроме того, невольно вспоминается

другая — значительно более известная — история о Гауссе, скрывающем свое открытие неевклидовой геометрии «из страха перед бунтом беотийцев<sup>1</sup>» (из письма Гаусса к Бесселю от 27 января 1829 г.). (Позднее, однако, Гаусс открылся сыну своего друга Яношу Бойяи — с катастрофическими последствиями для рассудка последнего — после того, как Янош Бойяи опубликовал статью о собственном открытии неевклидовой геометрии, совершенном, разумеется, независимо от Гаусса.) Наконец, на память приходит данный однажды Кантору совет Миттаг-Леффлера, суть которого заключается в том, что не стоит воевать с редакторами, нужно лишь придержать свои наиболее дерзновенные открытия до тех пор, когда мир созреет для них. Можно по пальцам перечислить случаи, когда самые передовые деятели науки с такой необычайной неохотой воспринимали новое, как в этих трех не похожих одна на другую историях.

Помимо Вейерштрасса здесь следует упомянуть еще три имени. Уже давно ходят слухи (зарегистрированные в письменном виде в [443]), что Риман приблизительно в 1861 г. демонстрировал своим студентам функцию  $R(t) = \sum n^{-2} \cos(n^2 t)$ , которая являлась, по его словам, непрерывной и недифференцируемой. Мы, однако, не располагаем ни точной формулировкой утверждения Римана, ни его доказательством. Более того, если термин «недифференцируемая» означает «нигде не дифференцируемая», то любое предлагаемое доказательство должно быть ошибочным, поскольку в работах [169] и [528] совершенно недвусмысленно показано, что функция  $R(t)$  имеет положительную и конечную производную в определенных точках. Функцией Римана интересовался также и Кронекер, что еще более подчеркивает, насколько занимал этот вопрос умы тогдашних математиков. (Для расширения знаний по истории вопроса рекомендую обратить внимание на [410], [207] и [116, 117, 118, 119].)

Больцано, чье имя связано с именем Вейерштрасса в другом, более широко известном контексте, также фигурирует в этой истории. Бернард Больцано (1781–1848) — один из немногих подпольных героев от математики, большая часть трудов которого оставалась невостребованной вплоть до начала третьего десятилетия XX в. — описал в 1834 г. близкий аналог функции Вейерштрасса, но не смог разглядеть того ее свойства, благодаря которому она приобретает для нас столь большое значение (см. [526], с. 8).

Третий персонаж, не получивший широкой известности ни при жизни, ни посмертно, играет в нашей истории вторую по значимости после Вейерштрасса роль. Шарль Селлерье (1818–1890) преподавал в Женеве и не опубликовал ничего сколько-нибудь заметного, однако в бумагах, оставшихся после его смерти, обнаружилось неожиданное «откровение». Одна из папок, недатированная, но помеченная «Очень важно

<sup>1</sup>Название народа «беотийцы» стало в европейской традиции синонимом тупости и невежества. — Прим. перев.

и, полагаю, ново. Проверено. Можно публиковать в настоящем виде», содержала рукописный текст, описывающий предельный случай  $D = 1$  функции, идентичной функции Вейерштрасса, с известными выводами. Пожелтевшие страницы показали некоему ученому по фамилии Кайе, который добавил к тексту примечание (откуда, собственно, и взяты вышеприведенные сведения) и незамедлительно опубликовал его в виде статьи [73]. Публикация вызвала некоторый умеренный интерес (особенно со стороны Грейс С. Юнг). В 1916 г. Рауль Пикте вспоминал, что когда он был студентом у Селлерье (приблизительно в 1860 г.), тот упоминал на занятиях об этой своей работе. Письменных свидетельств, однако, не сохранилось, и в итоге первенство Селлерье так и осталось недоказанным.

Таким образом, Вейерштрасс — единственный законный претендент, и некому оспорить правомочность именованной рассматриваемой функции в его честь, однако в свете известных нам весьма странных событий здесь есть над чем поразмыслить. Больцано и в самом деле опубликовал некое выражение, полагая его безобидным, но двое других — скромный провинциал, которому незачем было беспокоиться за свою научную репутацию по причине полного отсутствия таковой, и гроссмейстер, который, скорее всего, ясно осознавал, что его научную репутацию ничто запятнать не сможет, — несомненно понимали, что оказалось у них в руках, и все же предпочли промолчать и выждать. Принцип «публикуйся или пропадай» был им, судя по всему, чужд как ничто другое.

Поскольку функция Вейерштрасса часто используется в качестве аргумента в призывах к «разводу по обоюдному согласию» между математикой и физикой, представляется уместным упомянуть об отношении ее первооткрывателя к взаимосвязи между этими двумя путями постижения мира. Имя Вейерштрасса можно встретить в геометрической оптике (точки Юнга–Вейерштрасса на сферической линзе). Кроме того, в своей вступительной лекции в 1857 г. (выдержки из которой приводятся у Гильберта [214], том 3, с. 337–338) Вейерштрасс особо подчеркивал, что физикам не следует видеть в математике всего лишь вспомогательную дисциплину, а математикам не стоит рассматривать вопросы физиков как удобные примеры к своим методам. «На вопрос, возможно ли в действительности извлечь что-нибудь полезное из абстрактных теорий, которыми, на первый взгляд, так увлечена современная [1857 г.] математика, можно ответить, что основываясь на одних только абстрактных умопостроениях, греческие математики вывели свойства конических сечений, причем случилось это задолго до того, как было установлено, что по траекториям, имеющим форму конических сечений, движутся планеты вокруг Солнца». *Амен.*<sup>1</sup> ■

<sup>1</sup>Аминь; в буквальном переводе с греческого означает «истинно», «верно», «да будет так». — *Прим. перев.*

## 42 ◊ ЭПИЛОГ: ПУТЬ К ФРАКТАЛАМ

В эссе о фракталах, написанных мною в 1975 и 1977 г., не было ни вступительного слова, ни заключения. Нет их и в настоящем эссе, однако мне хотелось бы сказать кое-что еще. Теперь, когда фрактальная геометрия находится в опасной близости от черты, перейдя которую, она неминуемо превратится в упорядоченную и благопристойную науку, самое время занести на скрижали краткую историю ее невероятного зарождения. И добавить несколько слов о ее относительном вкладе в научное понимание, описание и объяснение природных феноменов. Пока новая геометрия наступает по всем фронтам от описания до объяснения (общего, как в главах 11 и 20, или учитывающего специфические особенности того или иного прецедентного исследования), неплохо было бы припомнить, почему необычное (и непопулярное) пренебрежение к объяснению посредством «моделей» с самого начала шло ей только на пользу.

К настоящему моменту читатель уже, несомненно, хорошо знает, что характерное для фракталов распределение вероятностей следует гиперболическому закону, и что в теории фракталов в изобилии встречаются и другие соотношения, основанные на степенных законах. Признав действительность масштабной инвариантности и тщательно исследуя ее геометрически-физические воплощения, мы вдруг открываем для себя такое множество увлекательнейших занятий, что мне кажется чрезвычайно странным, как еще вчера все эти богатейшие новые земли принадлежали мне одному (по крайней мере, такое создавалось впечатление). Вокруг моих новых земель располагалось множество населенных и освоенных участков, а некоторые смельчаки даже пробирались через границу, осматривались и уходили прочь — никто не оставался надолго.

Это увлечение на всю жизнь началось с того, что в 1951 г. меня слегка заинтересовала закономерность, описывающая частотность употребления слов в речи, называемая законом Ципфа (см. главы 38 и 40), причем узнал я о ней из книжного обозрения. Сопутствующие обстоятельства представляются мне сейчас настолько символическими, что я начинаю сомневаться в том, так ли оно все и происходило. Упомянутое обозрение я выудил из корзины для ненужных бумаг одного «чистого» математика, имея в виду разжиться легким чтением на время поездки в парижском метро. Закон Ципфа оказалось несложно объяснить, а в качестве побочного эффекта моя работа поспособствовала рождению новой



дисциплины — математической лингвистики. Однако изучение частотности употребления слов — это предприятие из разряда тех, что сами себя закрывают.

Как бы то ни было, последствия этого легкого интереса я продолжаю ощущать до сих пор. Осознав, что проделанная мною работа явилась (используя нашу теперешнюю терминологию) прецедентным исследованием полезности скейлинговых допущений, я начал обращать внимание на аналогичные эмпирические закономерности в различных областях человеческой деятельности, причем начал с экономики. Хотя этих закономерностей обнаруживается поразительно большое количество, в «организованной» науке принято считать их всего лишь незначительными отклонениями. Чем успешнее были мои объяснения упомянутых закономерностей, тем более явственно вырисовывался силуэт некоего повсеместно распространенного феномена, который упорно отказывается признавать официальная наука и которому я мог на некоторое время посвятить свое время и энтузиазм.

Поначалу мои исследования заключались в обычном поиске подходящей порождающей модели, однако постепенно от такого подхода пришлось отказаться, так как я раз за разом сталкивался с ситуациями, когда малейшие изменения в, казалось бы, незначительных допущениях модели вызывали самые что ни на есть кардинальные перемены в результатах предсказания. Например, многочисленные случаи появления гауссова распределения было принято «объяснять» с помощью стандартной центральной предельной теоремы — т. е. гауссово распределение представлялось как результат сложения многих независимых составляющих. Подобная аргументация обладала хоть какой-то объяснительной ценностью лишь постольку, поскольку исследователи-практики понятия не имели о всевозможных *других* центральных предельных теоремах, которые Поль Леви и прочие пионеры теории вероятности считали «патологическими». Между тем, изучение скейлинговых законов привело меня к убеждению, что естественным как раз является нестандартное центральное предельное поведение. К сожалению, как только стало ясно, что использование центральной предельной теоремы дает несколько возможных вариантов объяснения, такой подход потерял всю свою привлекательность и убедительность. Едва ли объяснение способно что-либо объяснить, если оно оказывается сложнее своего результата и если из равновероятных исходных вариантов следуют абсолютно различные предсказания.

Исследование *последствий* самоподобия принесло немало удивительных сюрпризов и помогло мне лучше разобраться в принципах устройства природных конструкций. И напротив, путанные рассуждения относительно *причин* масштабной инвариантности почти ни к чему хорошему не привели. Бывали дни, когда упомянутые рассуждения казались мне ничуть не лучше бредовых разглагольствований Ципфа о принципе наименьшего усилия (см. с. 559).

Настроение это еще усугубилось всплеском нового интереса к модели почти скейлинга в таксономии, первоначально предложенной Юлом в работе [613]. Интересующиеся были уверены, что данная модель предлагает универсальное объяснение любому проявлению масштабной инвариантности в общественных науках. Источником этой уверенности стала банальная техническая ошибка, и я не замедлил на это указать, однако многие из моих тогдашних читателей почему-то лишь укрепились во мнении, что масштабно-инвариантные соотношения в общественных науках имеют исчерпывающее универсальное объяснение и, следовательно (!), не заслуживают внимания.

В результате моя теперешняя склонность придавать последствиям большее значение, нежели причинам, только усилилась. Надо сказать, что очень скоро она вполне себя оправдала, — в частности, именно благодаря ей скейлинговые методы проявили себя в полную силу, когда (в 1961 г.) я обратился к исследованию временных изменений цен на товары в условиях конкуренции (см. главу 37). Экономисты часто жалуются на недостаточность и низкое качество своих данных, однако поток данных о ценах и доходах, на мой взгляд, весьма изобилует. Однако экономическая теория и эконометрика, в силах которых, по их собственным заявлениям, внести ясность во взаимоотношения сотен нечетко определенных переменных, не осмеливаются делать какие-либо прогнозы относительно структуры ценовых изменений. Общепринятые же статистические методы оказываются не в состоянии выявить в имеющихся данных какой бы то ни было порядок. В. Леонтьев как-то заметил, что «ни в какой другой области эмпирического исследования использование такого огромного и сложного статистического аппарата не дает столь посредственных результатов». Результаты же, полученные с помощью скейлинговых методов работают поразительно хорошо. Свойство масштабной инвариантности сочетает в себе два наиболее ярких отличительных признака рыночных цен в условиях конкуренции: высокую дискретность и «цикличность» при отсутствии периодичности. Настоящее исследование, вполне возможно, является единственным примером использования в экономике симметрии инвариантности на физический манер.

В том же 1961 г. я применил идею масштабной инвариантности к нескольким шумовым феноменам. Надо сказать, что все свои разношерстные исследования я проводил в практически полной изоляции как от физиков, так и от математиков. Однако во время моего пребывания в Гарварде в качестве приглашенного профессора (1962–1964), Гаррет Биркгоф указал мне на некоторые аналогии между моим подходом и теорией турбулентности, созданной Ричардсоном и выдвинутой на новые рубежи Колмогоровым [276]. Хотя я и слышал об этой теории в бытность свою студентом, не думаю, чтобы ее влияние оказалось сильнее, чем влияние философской традиции, описанной в главе 41 в разделе АРИСТОТЕЛЬ . . . В любом случае все это происходило задолго до того, как физики увлеклись скейлингом!

Далее, благодаря лекциям Р. У. Стюарта по перемежаемости турбулентности, я познакомился с другой работой Колмогорова ([277], 1962). Препринты этой и моей с Бергером статьи ([21], 1963) вышли буквально друг за другом с промежутком в несколько недель! Хотя Колмогоров ставил перед собой более интересную задачу, в моем распоряжении имелись более мощные инструменты, которые я, кстати, без особых усилий адаптировал к турбулентности, получив в результате материал, составивший основное содержание глав 10 и 11.

Наконец, я узнал о существовании  $1/f$ -шумов, прочел Херста [232, 233] и Ричардсона [494] и познакомился с проблемой кластеризации галактик. И снова я убедился в том, что пониманию как нельзя лучше способствуют хорошее описание и изучение следствий из него. Напротив, те модели, что я строил раньше, показались мне теперь не более чем бесполезными украшениями, подвешенными к описанию. Они отвлекали внимание от главных геометрических идей, которые я тогда формулировал, и по сути дела препятствовали пониманию. Я же никак не мог найти в себе силы от них отказаться, даже после того, как мои работы не были приняты к публикации. Что ж, те времена давно прошли, и объяснения в главах 11 и 20 (да и во всех остальных тоже) сделаны совсем из другого теста, и я рад за них.

Вот так моя увлеченность масштабной инвариантностью, постоянно подпитываясь новым энтузиазмом и обогащаясь, благодаря сменам области исследований, новыми инструментами и идеями, постепенно подводила меня к созданию полноценной общей теории. Причем теория эта никоим образом не следовала общепринятому порядку «сверху вниз», т. е. открытие, формулировка, «приложение». Ко всеобщему удивлению (включая и меня самого) она поднималась из скромных низов ко все более высоким (я бы даже сказал, головокружительно высоким) и величественным вершинам. Первые обзоры новой теории были представлены на Международном конгрессе логики и философии науки (1964), на Трамбулловских лекциях в Йеле (1971) и в Коллеж де Франс (1973 и 1974).

Геометрический аспект этой теории масштабной инвариантности приобрел большую значимость и дорос до фрактальной геометрии. Учитывая сильный геометрический уклон первых исследований турбулентности и критических феноменов, можно было бы ожидать, что теория фракталов будет разработана в рамках одной из этих областей. Этого, однако, не произошло.

В наши дни весьма редкими — и стало быть, аномальными — стали случаи проникновения в большую науку свежих концепций и новых методов из всевозможных низкорентабельных ее областей. Фрактальная геометрия являет нам один из новейших примеров таких исторических аномалий. ■

# АВТОРЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

Большую часть компьютерной графики в настоящем эссе выполнили следующие люди (перечислены в хронологическом порядке, считая по времени их первого вклада):

Зигмунд В. Хандельман,  
Рихард Ф. Фосс,  
Марк Р. Лафф,  
В. Алан Нортон  
и Дуглас М. Маккенна.

В помещенном ниже списке черно-белых иллюстраций, рядом с номером каждого рисунка (или — что то же самое — с номером страницы, на которой расположен рисунок) стоит первая буква фамилии автора компьютерной программы, с помощью которой создан этот рисунок. Иллюстрации, к которым приложили руку несколько человек, помечены соответствующим образом. Что касается цветных иллюстраций, то их мы обсуждали в другом месте.

Неоценимую и разнообразную помощь в подготовке иллюстраций оказали и другие люди, которых я также перечислю в хронологическом

25 — В	88 — В	205 — Х	269 — ЛН	324 — Л	400 — Л
26 — В	95 — Х	207 — Н	271 — ЛН	325 — Л	409 — Л
55 — Л	98 — Х	210 — Л	270 — Н	340 — Н	412 — Х
56 — Х	101 — М	223 — Х	273 — М	341 — Н	410 — ХМ
70 — Х	102 — Х	235 — Х	282 — Л	345 — Х	411 — ХМ
71 — Х	104 — Л	236 — Х	283 — Л	357 — Х	414 — М
73 — Х	105 — Л	237 — Х	310 — Х	370 — В	415 — М
74 — ХЛ	106 — Х	243 — Х	311 — Л	371 — В	416 — Х
75 — Х	107 — М	247 — Л	312 — Х	372 — В	424 — Х
76 — Л	110 — ЛМ	253 — Н	313 — Х	373 — В	425 — Х
79 — М	120 — Х	254 — Н	314 — Х	374 — Х	426 — Х
81 — В	121 — М	255 — Н	315 — Х	375 — В	427 — Х
83 — В	125 — Х	264 — ЛН	320 — Х	379 — Х	439 — М
84 — В	141 — Х	266 — Н	322 — В	398 — Х	446 — Л
85 — В	143 — Х	268 — ЛН	323 — Л	399 — Л	447 — Л
87 — Х	177 — В				

порядке. Хирш Левитан участвовал в создании рис. 410 и 411. Косвенное участие в подготовке некоторых рисунков принимал Джеральд Б. Лихтенбергер. Автором рис. 377 является Жан-Луи Онето, работавший с весьма новаторским графическим пакетом, разработанным Сирилом Н. Альбергой. Рис. 379 представляет собой несколько переработанную версию рисунка, созданного Артуром Аппелем и Жаном-Луи Онето. Скотт Киркпатрик предоставил нам рисунок, помещенный на с. 193, и программы, хорошо послужившие нам при подготовке рис. 312–315 и 424–427. Питер Оппенгеймер принял участие в создании изображений, помещенных на с. 247. Питер Молдейв помог с рис. 268–270, а Дэвид Мамфорд — с рис. 254.

Рис. 8 и иллюстрация на предпоследней странице выполнены В. А. Нортонем.

## БЛАГОДАРНОСТИ

В противоположность книгам, при написании которых автор четко представляет себе широту охватываемого материала и заранее определяет стиль изложения, настоящее «*macédoine de livre*»<sup>1</sup> возникало отдельными этапами в течение долгого времени. Главные свои интеллектуальные долги я уже так или иначе признал — непосредственно в тексте или между строк, в отступлениях или в исторических и биографических очерках. Само их количество и постоянно растущее разнообразие указывают на то, что никакой из них нельзя считать преобладающим.

Следует, однако, заметить, что вследствие превратностей цитирования я невольно пренебрег такими именами, как Норберт Винер и Джон фон Нейман: оба весьма снисходительно отнеслись к моей работе и оказали на меня немалое влияние, причем, скорее, общим своим примером, нежели какими-то конкретными поступками.

Огромное влияние в интеллектуальном отношении, хотя и совершенно иного рода, которое еще нигде не было должным образом отмечено, оказали на меня также мои дядя и брат.

Черновой перевод первой (французской) версии настоящего эссе был сделан Ж. С. Лури. Р. У. Госпер из Стэнфорда показал мне свою кривую Пеано еще до публикации. Значительной и разнообразной помощью в работе я обязан М. П. Шютценбергеру из Парижа, Дж. Э. Марсдену из Беркли, М. Ф. М. Осборну из USNRL,<sup>2</sup> Жаку Пейрьё из Орсэ, И. Гефену и А. Ахарони из Тель-Авива, а также Д. Мамфорду и П. Молдеиву из Гарварда.

П. Л. Ренц, редактор издательства W. H. Freeman & Co., сумел доказать, что его профессиональная гильдия еще не совсем безнадежна. Я благодарен ему за то, что он согласился на тот идиосинкразический макет, с каким я решил поэкспериментировать. Также я очень благодарен Р. Исикаве, который также работает у Фримена.

На интересные цитаты мне указывали: М. В. Берри, К. Брехер, И. Б. Коэн, Х. де Лонг, М. Б. Гирсданский, А. Б. Мидор, Дж. С. Понт, М. Серре, Б. Л. Ван-дер-Варден и Д. Зайденвебер. Другие интересные цитаты уже использовали такие авторы, как Г. Биркгоф, Р. Бонола, Й. Бромберг, К. Фадиман, Т. Феррис, Дж. Гимпел, С. Дж. Глакен, Д. М. Джонсон, П. С. Стивенс и Э. Т. Уиттекер.

<sup>1</sup>Дословно «книга-рагу» (фр.). — Прим. перев.

<sup>2</sup>«Исследовательская лаборатория ВМФ США». — Прим. перев.

Ровному ходу этой работы способствовали М. С. Гутцвиллер, П. Э. Сейден, Дж. А. Армстронг и П. Чаудхари — начальники отделов в ИВМ.

Д. Ф. Бантц посмеивался над тем, как мы использовали цветное графическое оборудование его проекта. А И. М. Коули, С. Х. Томпсон, П. Дж. Чапек, Дж. К. Ривлин и другие сотрудники библиотеки, отдела обработки текстов и графического отдела Исследовательского Центра ИВМ просто горели желанием помочь и выжимали из своих машин все возможное и невозможное.

# УКАЗАТЕЛЬ ИЗБРАННЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ: ЕВКЛИДОВОЙ ( $E$ ), ФРАКТАЛЬНОЙ ( $D$ ) И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ( $D_T$ )

Полужирными цифрами обозначены главы. Там, где евклидова размерность обозначена через  $E$ , она может принимать произвольное положительное целочисленное значение.

## I. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СТРОГИЕ $D$ И $D_T$

	$E$	$D$	$D_T$	Стр.
<b>• «Стандартные» евклидовы множества, <math>D = D_T</math></b>				
Точка (одна)	$E$	0	0	
Точки (конечное число)	$E$	0	0	
Счетное множество	$E$	0	0	
Прямая, окружность; все остальные стандартные кривые	$E$	1	1	73
Плоский диск; все остальные стандартные поверхности	$E$	2	2	73
Шар в $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^E$ ; все остальные стандартные объемы	$E$	$E$	$E$	
<b>• Множества, не являющиеся (вопреки ожиданиям) фрактальными</b>				
Заполняющая плоскость «кривая» Пеано	2	2	2	7, 183, 189
Канторова чертова лестница	2	1	1	125
Чертова лестница Леви	2	1	1	399
Обыкновенный броуновский след в $\mathbb{R}$	1	1	1	
Дробный броуновский след в $\mathbb{R}^E$ , где $H < 1/E$	$E$	$E$	$E$	354
<b>• Неслучайные фрактальные множества, <math>D &gt; D_T</math></b>				
Канторова пыль: троичное множество на прямой	1	$\ln 2 / \ln 3$	0	114 и д.
Канторовы пыли, нетроичные	$E$	$0 < D < E$	0	116 и д.
Кохова кривая: троичная снежинка	2	$\ln 4 / \ln 3$	1	<b>6</b>
Кохова кривая: граница перекошенной снежинки	2	$\ln 4 / \ln 3$	1	109, 110
Кохова кривая: шкура дракона Хартера – Хейтуэя	2	1, 5236	1	101, 102
Коховы кривые в $\mathbb{R}^2$ , нетроичные	2	$1 < D < 2$	1	<b>6</b>
Салфетка и стрела Серпинского	2	$\ln 3 / \ln 2$	1	<b>14</b>
Чудовищные кривые Лебега – Осгуда	2	2	1	<b>15</b>
Чудовищные поверхности Лебега – Осгуда	3	3	2	<b>15</b>
<b>• Случайные фрактальные множества</b>				
Броуновские фракталы из прямой в $E$ -пространство:				
– след при $E \geq 2$	$E$	2	1	327
– функция в $\mathbb{R}^2$	2	3/2	1	333
– функция в $\mathbb{R}^{E-1}$ , где $E > 2$	$E$	$1 + (E-1)/2$	1	541
– нуль-множество функции из прямой в прямую	1	1/2	0	332



Броуновские фракталы из пространства (или сферы) в прямую:

— функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$	3	5/2	2	359
— нуль-множество функции из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$	2	3/2	1	359
— скалярные изоповерхности турбулентности	3	5/2	2	<b>30</b>

Бюргерса

Броуновские  $H$ -дробные фракталы из прямой в пространство:

— след при $H > 1/E$	$E$	$1/H$	1	353, 354
— нуль-множество	1	$1 - H$	0	353, 354
— функция	2	$2 - H$	1	353, 354

Броуновские  $H$ -дробные фракталы из пространства в прямую:

— функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$	3	$3 - H$	2	489
— нуль-множество функции из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$	2	$2 - H$	1	489
— скалярные изоповерхности турбулентности	3	8/3	2	<b>30</b>

Колмогорова

Устойчивый по Леви процесс с  $D < 2$ : его след  $E$   $D$  0 527

## II. ДРУГИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ, ИХ $D_T$ И РАСЧЕТНЫЕ $D$

### • Масштабно-неинвариантные неслучайные фрактальные множества

Аполлониевы салфетка и сеть (точные границы:  $1,300197 < D < 1,314534$ ) 2 1,3058 1 245

### • Случайные фрактальные множества

Нормированное случайное блуждание / многоугольник в  $\mathbb{R}^2$  2 1,33 1 336

Нормированное случайное блуждание в  $\mathbb{R}^3$  3 1,67 1 336

Река в сети Леопольда – Лангбейна 2 1,28 1 458 и д.

Критический кластер в бернуллиевой перколяции:

— полный кластер в плоскости	2	1,89	1	184
— магистраль кластера в плоскости	2	1,6	1	185
— магистраль кластера в $\mathbb{R}^E$ при малых $E$	$E$	$\log_2(E + 1)$	1	188

## III. ПРИРОДНЫЕ СТАНДАРТНЫЕ (ЕВКЛИДОВЫ) ОБЪЕКТЫ, ИХ $D_T$ И РАСЧЕТНЫЕ $D$

Очень тонкий шар  $E$  0 0 35

Очень тонкая нить  $E$  1 1 35

Пустая сфера (полированная снаружи и изнутри) 3 2 2 35

Полированный шар (заполненный) 3 3 3 35

### • Природные фрактальные объекты, их расчетные $D_T$ и типичные $D$

Морское побережье (показатель Ричардсона) 2 1,2 1 57

Совокупный берег речной сети 2 2 1 7

Контур отдельной реки (показатель Хака) 2 1,2 1 161

Кровеносная система 3 3 2 214 и д.

Легочная мембрана в масштабах ветвления 3 2,90 2 166, 225 и д.

Кора дерева 3 3 2

Фрактальные ошибки 1 0,30 0 **8**

Галактики в скейлинговом диапазоне размеров 3 1,23 0 **9**

Турбулентность: несущее множество рассеяния 3 2,50–2,60 2 **10, 11**

Частота употребления слов NA 0.9 NA **38**

# ДОПОЛНЕНИЕ, ВОШЕДШЕЕ ВО ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ (ДЕКАБРЬ 1982)

## КУРШЕВЕЛЬСКИЙ СЕМИНАР: ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ

Между отправкой книги в печать и ее действительной публикацией, и затем в течение того краткого времени, за которое разошелся первый тираж, фрактальная геометрия отнюдь не стояла на месте. Все быстрее внедрялась она в те области, где ее уже приняли, и даже проникла в несколько новых.

Я, в частности, организовал недельный семинар по фракталам, который прошел в июле 1982 г. в городке Куршевель (Франция), и на котором были впервые представлены многие новые разработки. Главной целью настоящего дополнения является обобщение этих результатов и некоторых других, тесно с ними связанных. Некоторые источники (помеченные в дополнительном списке литературы звездочкой \*) привлекают внимание к другим работам, представленным на семинаре.

Вообще, становится трудно поверить, что всего несколько лет назад фрактальной геометрией природы кроме меня и нескольких моих ближайших сотрудников не занимался практически никто. Теперь же я, в лучшем случае, могу лишь (с помощью списка дополнительной литературы) обратить внимание читателя на вышедших на нашу сцену новых блестящих актеров.

Темы в дополнении располагаются приближительно в том же порядке, что и в главном эссе.

## ФРАКТАЛ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

К сожалению, этой скучной темы нам избежать не удастся, однако на сей раз она занимает милосердно мало места.

Термин «хаусдорфова размерность», к немалой моей досаде, применяется теперь безо всякого разбору и к размерностям, перечисленным в главе 39, и ко всевозможным их вариантам. То же можно сказать и о «размерности Минковского», термине, который я однажды использовал на с. 164 эссе «Objets fractals» (1975) для обозначения размерности Булигана. Дело, очевидно, в том, что определенные неанглоязычные статьи, авторы и темы которых благодаря моей работе перестали наводить страх на научную общественность, приобрели некоторое влияние, вследствие

чего им стали приписывать — причем зачастую понаслышке! — всевозможные достижения . . . и прегрешения.

Другие авторы бросились в противоположную крайность, сделав чрезмерно большой упор на методах, чаще всего используемых для *оценки* размерности  $D$  в практической деятельности — таких, например, как определение размерности подобия (см. с. 189 и 305) показателя в соотношении между массой и радиусом или спектрального показателя — и «канонизировав» их как методы определения «единственно верной» фрактальной размерности.

К сожалению, большинство вышеупомянутых реакций на «Фракталы» 1977 г. проявились слишком поздно. Знай я обо всем этом раньше, я, пожалуй, вернулся бы в настоящем эссе к подходу, хорошо зарекомендовавшему себя в «Objets fractals» (1975), т. е. отказался бы от поисков педантичного определения для термина «фрактал» и использовал бы «фрактальную размерность» в качестве общего термина, применимого ко *всем* вариантам размерностей, перечисленным в главе 39, а для каждого конкретного случая подбирал бы определение, наиболее подходящее в данной конкретной ситуации.

## ОДНОРОДНАЯ ФРАКТАЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Глава 11 этого эссе написана исключительно с целью выразить мое основное предположение относительно турбулентности, которое заключается в том, что турбулентность в вещественном пространстве представляет собой феномен на несущем множестве размерности  $D \sim 2,5-2,6$ .

Численные расчеты, призванные подтвердить справедливость этого предположения, еще не завершены (см. [624, 625]).

Кроме того, не так давно в [633] был предложен совершенно иной подход, в котором удлинение и свертывание вихрей из главы 10 исследуется с помощью методов, разработанных для исследования полимеров (глава 36), и предполагается наличие связи между размерностями турбулентности и полимерных структур.

## РАЗЛОМЫ В МЕТАЛЛАХ И ФРАКТАЛЫ [652]

Неологизмы, как мы заметили в главе 1, требуют аккуратного к себе отношения: изобретая их, следует избегать возможного конфликта значений. Из поверхностного рассмотрения можно заключить, что, хотя поверхность разлома стекла, скорее всего, *не фрактальна*, многие поверхности разлома камней и металлов почти наверняка *фрактальны*. Руководствуясь этим неформальным предположением, можно сделать столь же неформальный вывод, что между терминами *фрактал* и *разлом*<sup>1</sup> серьезного конфликта возникнуть вроде бы не должно.

<sup>1</sup>Англ. *fracture*. — Прим. перев.

В работе [652] мы подкрепляем это неформальное ощущение многочисленными экспериментальными данными, полученными при испытаниях на растяжение образцов из сталей 1040, 1095 и Cor-99 и на ударное разрушение образцов из мартенситно-старееющей стали. Применяя методы, аналогичные тем, с помощью которых в главах 5 и 28 исследуется рельеф, мы убедились во фрактальном характере поверхностей разлома и оценили значения размерности  $D$ . То, что применение этих методов оказалось успешным, весьма примечательно, так как поверхности разлома явно *негауссовы* и *совсем не похожи* на рельеф.

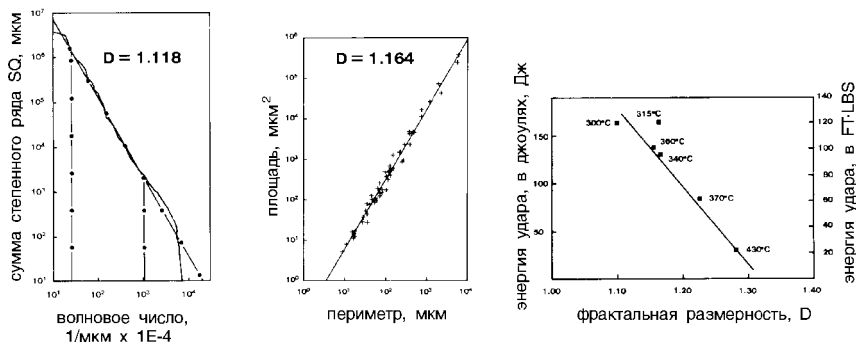
Напомним, что в главах 5 и 28 мы пользовались береговыми линиями островов и вертикальными сечениями. К сожалению, в естественных поверхностях разлома острова не наблюдаются, а определение вертикали (т.е. такого направления, при котором высота точки является однозначной функцией от ее положения на горизонтальной плоскости) очень редко подходит к какому-либо направлению.

Тем не менее, мы вполне можем определить неформальную вертикаль с помощью условия, согласно которому высота точки будет однозначной функцией для «большинства» точек. Затем мы проводим спектральный анализ высот вдоль прямолинейных горизонтальных сечений и строим график логарифма спектральной энергии на частотах, превышающих  $f$  как функции от логарифма  $f$ .

Кроме того, оказывается полезным создавать искусственные «острова», «разрезая» образец параллельно почти горизонтальным плоскостям (при подготовке образца его сначала покрывают никелем с помощью метода химического восстановления, а затем закрепляют на эпоксидном основании методом вакуумной пропитки). Далее, используя мерный стержень некоторой фиксированной длины, мы определяем площадь каждого острова и его периметр на оцифрованном изображении и строим дважды логарифмические графики (как показано в главе 12) для того, чтобы убедиться в правильности нашего анализа фрактальных размерностей.

Взглянув на рисунки на с. 597 (слева и в центре), читатель может самостоятельно убедиться в том, что многие поверхности разлома укладываются во фрактальную модель с поразительной точностью: оба графика почти прямолинейны, а их угловые коэффициенты дают, в сущности, одинаковые размерности  $D$ . Более того, при повторении описанной процедуры на других образцах из того же металла получается то же значение  $D$ . И напротив, традиционные оценки степени шероховатости весьма сложно воспроизвести.

Перефразируя замечание, приведенное на с. 164 по поводу рис. 169, можно сказать, что не много существует металлургических графиков, которые учитывали бы все доступные данные в столь обширном диапазоне размеров, и были бы при этом хоть приблизительно такими же прямолинейными.



Экспериментальные данные оказываются настолько хороши, что мы можем сразу же перейти к более тонкому сопоставлению. Согласно наблюдениям, значения разности  $|D$  (спектральная) –  $D$  (береговой линии островов) систематически составляют величину порядка нескольких сотен. Первое возможное объяснение заключается в погрешности оценки. Например, высокочастотная область спектра содержит огромное количество постороннего шума, а значит, ее принимать в рассмотрение не следует. Кроме того, мы весьма вольно обходимся с «озерами» и «прибрежными островами»: включаем первые и исключаем вторые, поскольку они должным образом не определены.

Однако расхождение может быть вызвано и вполне реальными причинами. По сути дела, почти идентичность значений  $D$  наводит на мысль, что исследуемые материалы оказались гораздо более изотропными, нежели мы предполагали. Если же рассмотреть образцы, которые просто *обязаны* быть анизотропными (исходя из метода их получения), то мы увидим, что значения  $D$  спектра и  $D$  береговой линии островов и в самом деле очень различны.

Альтернативная причина конфликта размерностей заключается в том, что поверхность разлома может быть изотропной, но не самоподобной – в этом случае величина  $D$  будет изменяться в зависимости от размеров образца (см. главу 13). Поскольку, согласно нашим двум методам, различным диапазонам масштабов соответствуют различные веса, можно заключить, что эти методы отражают реальное изменение размерности  $D$ . В самом деле, в некоторых изученных нами образцах островные и спектральные диаграммы демонстрировали явно различные прямолинейные зоны, а для некоторых других металлов диаграммы оказались еще более сложными.

Для определения связи размерности  $D$  с другими характеристиками металла мы взяли образцы из мартенситно-старееющей стали марки 300 для испытаний на ударное разрушение по Шарпи и подвергли их нагреву до различных температур. Полученный в результате график, показанный

и на с. 597 (справа) демонстрирует несомненное наличие связи между энергией удара и значением  $D$ .

Поскольку факты установлены, невредно было бы поразмышлять об их возможных причинах. Мы полагаем, что разлом можно рассматривать как некую нетипичную форму перколяции. Известно, что, по мере того как образец растягивается в разные стороны, полости, которые неизбежно присутствуют в образце вокруг посторонних включений, увеличиваются в размерах; в конце концов эти полости сливаются между собой и разделяют образец на части. Если бы увеличение размеров той или иной полости не зависело от места ее расположения, мы получили бы перколяцию, подобную описанной в главе 13. Следовательно, размерность поверхности разлома принимала бы некое универсальное значение, не зависящее от материала. В действительности же, как только исходная полость дорастает до слияния с соседними полостями, возрастает нагрузка на оставшиеся связи и последующая скорость роста полости изменяется в зависимости от ее положения в образце. Эти изменения, безусловно, напрямую зависят от структуры материала, и, следовательно, размерность  $D$  совсем не обязана быть универсальной.

## ФОРМЫ ОБЛАЧНЫХ И ДОЖДЕВЫХ ОБЛАСТЕЙ [646, 648]

Глядя на замечательное соотношение Лавджоя, связывающее площадь и периметр облаков (см. рис. 169), невольно задаешься вопросом, нельзя ли в этом случае проделать то же, что мы проделали в главе 28 с земным рельефом, — я имею в виду построение фрактальных карт облачных и дождевых областей, которые нельзя будет ни невооруженным глазом, ни с помощью каких-либо измерений отличить от настоящих метеорологических карт.

Важный ингредиент для случая дождевых областей находим у самого Лавджоя [646], который обнаружил, что промежутки между выпадениями осадков следуют в точности тому же гиперболическому распределению вероятностей, что и разрывности в изменении цен на товарных биржах согласно [341] (см. главу 37).

Наше с Лавджоем совместное исследование [648] построено именно на этом фундаменте. Мы показываем, что гиперболически распределенные разрывности вполне согласуются с широко известным наблюдением, что разрывности в выпадении осадков возникают вдоль почти прямолинейных «фронтов». Для сохранения масштабной инвариантности вводится соответствующий перечень показателей, напоминающий те, что используются в теории критических феноменов, и в еще большей степени показатели турбулентности, предложенные в моей работе [387]. Полученные результаты, надо сказать, вызывают самые положительные эмоции.

## МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ, ФРАКТАЛЫ И ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ [637, 638, 639, 619]

В главе 28 мы говорили о том, что земной рельеф представляет собой масштабно-инвариантную фрактальную поверхность и его можно генерировать посредством наложения грубых «ошибок». Тем, кто согласен с подобными утверждениями, гораздо легче принять идею того, что землетрясения (которые представляют собой не что иное, как динамические изменения рельефа) самоподобны, т. е. закономерности, описывающие время их возникновения, территориальный охват и силу, не связаны с каким-либо особым масштабом, а геометрия землетрясений фрактальна. Идея эта является главным посланием, которое вынесет для себя интересующийся фракталами читатель из ознакомления с работами [637, 638, 639, 619] (рекомендую).

А для умирения гордыни советую подумать о том, что масштабную инвариантность землетрясений обнаружил Омори еще сто лет назад; впрочем, авторы большинства статистических исследований землетрясений по-прежнему настаивают на том, что возникновение землетрясений следует пуассоновскому распределению. Что ж, вряд ли следует ожидать чего-то хорошего (о чем я уже рассуждал в главе 42), когда наука уступает общественному давлению, которое поощряет моделирование и теоретизирование и презирует «простое» описание без «теории».

## ФРАКТАЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ В ЛИТИЕВЫХ АККУМУЛЯТОРАХ [644, 645]

Электрическому аккумулятору полагается хранить электроэнергию в больших количествах и выдавать ее с нужной скоростью. Так как остальные характеристики зафиксированы, аккумулирующая способность зависит только от объема аккумулятора, скорость же разрядки является характеристикой поверхностной. Об этом знает всякий, кто знаком с фракталами (см. главы 12 и 15), и отсюда же Аллен Ле Меоте заключил, что достижение баланса между аккумулирующей способностью и скоростью разрядки является собой фрактальную задачу.

Поскольку нет никакой возможности реализовать на практике аккумулятор, поперечное сечение которого являлось бы тетагоном Пеано (таким, например, как на рис. 106), Ле Меоте с сотрудниками [645] проводил теоретические исследования всевозможных реалистичных конструкций и изучал настоящие аккумуляторы. Поразительна эффективность фрактальной геометрии.

## КРИТИЧЕСКИЕ ПЕРКОЛЯЦИОННЫЕ КЛАСТЕРЫ

### **Перколяция на решетках: испытание модели из главы 13.**

Указанная фрактальная модель контактных кластеров в бернуллиевой перколяции, предложенная в главе 13, прямо-таки напрашивается на

экспериментальную проверку. Спешу вас обрадовать: просьба удовлетворена.

В работе [642] определено число узлов в кластере на расстоянии от начала координат, меньшем  $R$ , и установлено верное значение размерности  $D \sim 1,9$ . Кроме того, из перехода между фрактальной областью и областью однородности получено значение  $\xi$ .

**Перколяция в тонких пленках золота и свинца.** Бернуллиева перколяция является, безусловно, математическим процессом. Хаммерсли вводит ее в надежде, что с ее помощью можно будет проиллюстрировать и тем самым прояснить многие природные феномены. Применимость фрактальной геометрии к бернуллиевой перколяции была опробована на примере гнусного золота [668] и благородного свинца [641]. Исследователи Au приготовили тонкие пленки при комнатной температуре посредством электронного напыления на окна из аморфного  $\text{Si}_3\text{N}_4$  толщиной 30 нм, выращенные на кремниевой подложке. Пленкам была придана переменная толщина, в результате чего вместо одного образца получился целый ряд образцов — от полностью изолирующих до электропроводящих. Предсказания главы 13 оказались верными до последней запятой.

## НИЗКОЛАКУНАРНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ НЕКОТОРЫХ ФОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ В ФИЗИКЕ [630]

В статистической физике считается, что иногда полезно постулировать то или иное пространство с дробной размерностью. Математики же такие пространства выводят из душевного равновесия: мало того, что эти пространства никто нигде не строит, никто даже не берет на себя труд доказать их существование и единственность. Тем не менее, физики получают весьма существенные результаты, исходя из допущения, что упомянутые пространства действительно существуют и вдобавок обладают определенными сильными и желательными свойствами: они инвариантны при смещении, а их интегралы количества движения и рекуррентные соотношения можно получить из евклидовых пространств с помощью формального аналитического продолжения.

Пространства с дробной размерностью способны привести исследователя фракталов в замешательство. С одной стороны, существует *большое* количество альтернативных фрактальных интерполяционных пространств, и, следовательно, можно говорить о неопределенной интерполяции. С другой стороны, фракталы, которые мы в работе [165] применили для описания физических явлений, вовсе не являются инвариантными при смещении. В этом отношении может создаться впечатление, что фракталы не так хороши, как постулированные пространства с дробной размерностью.



Решение этой проблемы было подсказано аналогичной критикой, направленной в адрес моей первой модели распределения галактик. На тот случай, когда для фрактала невозможна точная инвариантность при смещении, в главах 34 и 35 показано, что можно подойти к инвариантности сколько угодно близко, придав достаточно малое значение лакунарности.

С этой точки зрения в работе [630] рассмотрена некая последовательность ковров Серпинского (см. главу 14), лакунарность которых стремится к нулю. Вычислены некоторые физические свойства и показано, что предельные фракталы с нулевой лакунарностью идентичны по своим свойствам постулированным пространствам с дробной размерностью.

## САЛФЕТКА СЕРПИНСКОГО: ИГРУШКА ДЛЯ ФИЗИКОВ

Легко управляемые модели настолько милы сердцу физика, что любая конструкция, обещающая возможность выполнения вычислений без необходимости в приближениях привлекает самое широкое внимание.

Среди разветвленных фигур, рассмотренных в главе 14, наиболее важной является салфетка Серпинского, однако с ней и труднее всего работать. Тем не менее, манипуляциям она поддается. Некоторые такие манипуляции, забавные и полезные, проведены в работах [663, 656, 657, 617].

◁ Вопреки своему обыкновению, я выбрал для обозначения этой фигуры термин (салфетка Серпинского<sup>1</sup>), не имеющий прямого французского эквивалента. Составители математического словаря не поняли, что под словом *gasket* я имел в виду ту деталь двигателя, которая предотвращает просачивание жидкости, а обычный словарь отправил их к кораблям и веревкам, т. е. к *baderne* и *garçette*<sup>2</sup>. Поскольку смысл моего термина никак не мог соответствовать этим толкованиям, термин переопределили и обозначили им дополнение к тому, что он обозначал изначально! На мой взгляд, здесь лучше подошло бы другое французское слово: *tamis*, т. е. «сито» или «решето»<sup>3</sup>. ►

## КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ И ФРАКТАЛЫ

Для того, чтобы показать, что глобальный порядок может быть порожден силами, действующими исключительно между соседними эле-

<sup>1</sup> Собственно говоря, «салфеткой» она стала уже в русском языке. У Мандельброта эта фигура называется «*Sierpiński gasket*», т. е. «сальник Серпинского» или «прокладка Серпинского». Отсюда и дальнейшее рассуждение. — *Прим. перев.*

<sup>2</sup> Оба эти французских слова не совсем приличны; их этимологию действительно можно проследить до «кораблей» и «веревки», соответственно, однако в настоящее время их значение претерпело некоторые изменения. — *Прим. перев.*

<sup>3</sup> Некоторые русскоязычные авторы отдают предпочтение именно этому варианту, передавая «*Sierpiński gasket*» как «сито» или «решето Серпинского». — *Прим. перев.*

ментами, я придумал пример, описанный на с. 452. Вскоре мне указали на то, что в моем примере действует так называемый «клеточный автомат» в том виде, в каком этот термин определен Джоном фон Нейманом (см. [621]). Улам показал (снова см. [621]), что выход такого автомата может быть очень сложным и выглядеть случайным. В других работах [669, 670, 667] показано, что этот выход может быть и фрактальным.

## ИТЕРАЦИИ ОТОБРАЖЕНИЯ $z \rightarrow z^2 - \mu$ В КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

В [650] включено много иллюстраций, для которых не хватило места в главе 19, и дополнительных наблюдений. Выход статьи [401] несколько задержался и ожидается в 1983 г.

Два важных наблюдения из главы 19 нашли теперь математическое подтверждение.

В работах [628, 627] путем отображения множества внешних точек  $\mathcal{M}$  на множество внешних точек круга доказано, что замкнутое множество  $\mathcal{M}$  и в самом деле связно.

В [659] доказано, что хаусдорфова мера дракона Жюлиа является аналитической функцией от параметра  $\mu$ .

## КВАДРИРУЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В КВАТЕРНИОНАХ

В главе 19 установлено, что свойства отображения  $z \rightarrow z^2 - \mu$  при вещественных значениях  $z$  удобнее всего рассматривать как особые случаи этого же отображения при комплексных  $z$  и  $\mu$ , и что итерации при комплексных  $z$  порождают неожиданные и весьма интересные картины. Таким образом, представляется естественным воспользоваться для углубления понимания и получения еще более красивых образов дальнейшим обобщением величины  $z$ . А. Нортон предположил, что следующим наиболее естественным окружением могли бы стать гамильтоновы кватернионы. Введенные в 1847 г., кватернионы хорошо знакомы как математикам, так и физикам, однако до сей поры им доставались лишь второстепенные роли. В контексте же итераций концепция кватернионов оказалась необычайно плодотворной как с математической, так и с эстетической точки зрения — подробный отчет читатель найдет в выходящих вскоре работах, моих и Нортон.

Против кватернионов имеются и возражения. Одно из них, например, заключается в следующем: комплексные числа вводят пространство с  $E = 1$  в пространство с  $E = 2$ , которое можно представить визуально, в то время как кватернионы связаны с переходом к пространству с  $E = 4$ , которое визуально представить невозможно. Еще одно возражение: умножение кватернионов не коммутативно, т. е. если  $z$  является

кватернионом, то отображения  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$ ,  $z \rightarrow z^2 - \mu$ ,  $z \rightarrow \mu z^2 - 1$  и  $z \rightarrow \mu^\alpha z^2 \mu^{1-\alpha}$  различны.

Для иллюстрации топологических взаимосвязей фрактальных репеллеров квадратичного отображения в кватернионах в работе [655] разработаны новые компьютерно-графические методы. Множества всех кватернионов, не уходящих при итерациях в бесконечность, рассматриваются в трехмерных сечениях. Сечения таких множеств комплексной плоскостью являются фрактальными драконами, описанными в главе 19.

Некоммутативность же умножения кватернионов совершенно неожиданно превратилась в большое преимущество. Для объяснения смысла этого преимущества рассмотрим рис. С5. Вопрос: соединяются ли друг с другом в пространстве кватернионов все или хотя бы некоторые темно-желтые области дракона? Ответ: в общем случае, каждый из вариантов записи,  $z \rightarrow z^2 - \mu$  или  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  (до перехода к кватернионам), вызывает появление совершенно различных связей между темно-желтыми областями. Следовательно, для более конкретного описания топологических взаимосвязей необходимы дополнительные данные.

В качестве менее запутанного примера рассмотрим рисунок, помещенный на с. 655; он представляет собой несколько адаптированный вариант иллюстрации из [655] и изображает простой случай с циклом, равным 4. Каждый большой сегмент дракона, полученный при сечении его комплексной плоскостью, вложен в соответствующий сегмент пространственной фигуры. В данном примере большие пространственные сечения являются почти инвариантными при вращении; они окружены многочисленными нетугими поясами, соединяющими малые сечения дракона. На рис. 8 представлен другой пространственный фрактал, полученный приблизительно таким же способом. У Стейна [662] можно найти еще несколько подобных иллюстраций.

## УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ И ХАОС: $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$ И ДРУГИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

С. Латте, современник Фату и Жюлиа, выделил отношение четвертого порядка полиномов, итерации которых «хаотичны» на всей плоскости, т. е. не притягиваются ни к какому меньшему множеству. Этот пример побуждает нас заняться поисками хаотического поведения в отображениях низшего порядка. Кроме того, в настоящем разделе рассматриваются классы универсальности для формы островов при  $\lambda$ -отображениях.

**Отображение  $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$  и его  $\lambda$ -отображение.** В особом случае  $\lambda = 1/2$  функция  $y = -iz$  следует правилу  $y \rightarrow 1/2(y + 1/y)$ , которое вытекает также из приложения метода Ньютона к отысканию корней  $z^2 - 1$ . Отметим, что можно положить  $z = \text{ctg } \theta$ , и выражение  $1/(z - 1/z)$  примет вид  $(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)/2 \cos \theta \sin \theta = \text{ctg } 2\theta$ . Таким

образом, запись  $z \rightarrow /_c(z - 1/z)$  представляет собой просто-напросто занятный способ записать  $\theta \rightarrow 2\theta$ . Для рассмотрения других значений  $\lambda$  было построено отображение, аналогичное тем, что представлены на рис. 268 и 269; часть его можно видеть на рис. 12.

Наблюдается очень интересная форма «универсальности»: «молекулы-острова» на рис. 12 принимают в точности ту же форму, что и при квадратичном отображении. То есть иллюстрации 12 и 268–269 построены из одинаковых «кирпичей». В открытом диске  $|\lambda| > 1$  итерации отображения  $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$  уходят в бесконечность за исключением точек  $z_0$ , образующих пыль. В белом диске  $|\lambda + i/2| < 1/2$  итерации имеют две предельные точки. Когда значение  $\lambda$  приходится на один из «отростков» черной «короны», существует некоторая предельная окружность, диаметр которой больше 2, но не слишком велик. Значения же  $\lambda$ , оказавшиеся внутри короны  $\lambda$ -отображения, дают хаотическое движение.

◀ Вычисление можно упростить следующими допущениями. А) Значение  $\lambda$ , приводящее к очень большой окружности, приходится на внутреннюю область столь малого атома, что его и разыскивать-то не стоит. Б) Все практически значимые малые окружности располагаются «вблизи» точки  $z = 0$ . Таким образом, можно предположить, что любая орбита, уходящая «далеко» от точки  $z = 0$ , хаотична. Это приближение, разумеется, лишено конкретного обоснования, однако получаемое с его помощью  $\lambda$ -отображение состоит из знакомых элементов, и значит, такой метод представляется вполне разумным. ►

**Множества Жюлиа отображения  $\lambda(z - 1/z)$ .** При  $|\lambda| > 1$  притягивающей точкой становится бесконечность, а множество Жюлиа представляет собой, как и в главе 19, границу множества  $z$ -точек, не уходящих в бесконечность. Пример множества Жюлиа, определенного как граница областей притяжения отображения  $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$ , представлен на рис. 10.

**Классы «универсальности»  $\lambda$ -отображения.** «Молекулы-острова», характерные для отображения  $z^2 - \mu$ , встречаются и во многих других  $\lambda$ -отображениях, разница будет лишь в том, что в результате каких-то конкретных ограничений может образоваться не совсем типичный «континент».

Кроме того,  $\lambda$ -отображения вида  $z \rightarrow z^m - \lambda$  также дают континент и острова. В этом случае, однако, каждое значение  $m$  обуславливает очень характерную форму атомов и молекул-островов.

Когда локальное поведение отображения  $z \rightarrow f(z)$  одинаково во всех критических точках  $z$ , где  $f'(z) = 0$ , форма островов определяется локально. Когда  $f(z)$  ведет себя в различных критических точках  $z$  по-разному,  $\lambda$ -отображение строится из «универсальных» кирпичей более чем одного типа. Мы как раз разыскиваем для этой проблемы что-то вроде «таблицы Менделеева». ■

## Литература

- [1] ABELL, G.O. Clustering of galaxies. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics*. 1965, 3, 1–22.
- [2] ABBOT, L.F. & WISE, M.B. Dimension of a quantum-mechanical path. *American J. of Physics*. 1981, 49, 37–39.
- [3] ADLER, R. J. *The geometry of random fields*. New York: Wiley, 1981.
- [4] ALEXANDER, S.S. Price movements in speculative markets: or random walks. *Industrial Management Review of M. I. T.* 1961, 2 (Part 2), 7–26. (Статья также имеется в сборнике *The random character of stock market prices*. Ed. P. H. Cootner, 199–218. Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1961.)
- [5] ALEXANDER, S. S. Price movements in speculative markets: No. 2. *Industrial Management Review of M. I. T.* 1961, 4 (Part 2), 25–46. (Статья также имеется в сборнике под редакцией Кутнера (см. [4]), 338–372.)
- [6] ALLEN, J.P., COLVIN, J.T., STINSON, D.G., FLYNN, C.P. & STAPLETON, H.J. Protein conformation from electron spin relaxation data (препринт), 1981. Champaign, Illinois.
- [7] APOSTEL, L., MANDELBRROT, B. & MORF, A. *Logique, langage et théorie de l'information*. Paris: Presses Universitaires de France, 1957.
- [8] ARTHUR, D.W.G. The distribution of lunar craters. *J. of the British Astronomical Association*. 1954, 64, 127–132.
- [9] AUBRY, S. *Many defect structures, stochasticity and incommensurability. Les Houches 1980*. Ed. R. Balian & M. Kléman. New York: North-Holland, 1981.
- [10] AVRON, J. E. & SIMON, B. Almost periodic Hill's equation and the rings of Saturn. *Physical Review Letters*. 1981, 46, 1166–1168.
- [11] AZBEL, M. Ya. Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field. *Soviet Physics JETP*. 1964, 19, 634–645.
- [12] BACHELIER, L. *Théorie de la spéculation*. (Диссертация на соискание степени доктора математических наук, защищена 29 марта 1900 года.) *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. 1900, III-17, 21–86. Перевод на английский язык в [85], 17–78.
- [13] BACHELIER, L. *Le jeu, la chance et le hasard*. Paris: Flammarion, 1914.
- [14] BALMINO, G., LAMBECK, K. & KAULA, W.M. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography. *J. of Geophysical Research*. 1973, 78, 478–481.
- [15] BARBER, M. N & NINHAM, B. W. *Random and restricted walks: theory and applications*. New York: Gordon & Breach, 1970.

- [16] BARRENBLOTT, G.I. *Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics*. New York: Plenum, 1979.
- [17] BARTLETT, J. *Familiar quotations* (14th ed.). Boston: Little Brown, 1968.
- [18] BATCHELOR, G.K. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge: Cambridge University Press, 1953.
- [19] BATCHELOR, G.K. & TOWNSEND, A.A. The nature of turbulent motion at high wave numbers. *Pr. of the Royal Society of London*. 1949, A199, 238–255.
- [20] BATCHELOR, G.K. & TOWNSEND, A.A. Turbulent diffusion. *Surveys in Mechanics*. Ed. G.K. Batchelor & R.N. Davies. Cambridge: Cambridge University Press, 1956.
- [21] BERGER, J.M. & MANDELBROT, B.B. A new model for the clustering of errors on telephone circuits. *IBM J. of Research and Development*. 1963, 7, 224–236.
- [22] BERMAN, S.M. Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties. *Annals of Mathematical Statistics*. 1970, 41, 1260–1272.
- [23] BERRY, M.V. Catastrophe and fractal regimes in random waves & Distribution of nodes in fractal resonators. *Structural stability in physics*. Ed. W. Güttinger & H. Eikemeier. New York: Springer, 1978.
- [24] BERRY, M.V. Diffractals. *J. of Physics*. 1979, A12, 781–797.
- [25] BERRY, M.V. & HANNAY, J.H. Topography of random surfaces. *Nature*. 1978, 273, 573.
- [26] BERRY, M.V. & LEWIS, Z.V. On the Weierstrass–Mandelbrot fractal function. *Pr. of the Royal Society London*. 1980, A370, 459–484.
- [27] BESICOVITCH, A.S. On rational approximation to real numbers. *J. of the London Mathematical Society*. 1934, 9, 126–131.
- [28] BESICOVITCH, A.S. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system (On sets of fractional dimensions II). *Mathematische Annalen*. 1935, 110, 321–330.
- [29] BESICOVITCH, A.S. & TAYLOR, S.J. On the complementary interval of a linear closed set of zero Lebesgue measure. *J. of the London Mathematical Society*. 1954, 29, 449–459.
- [30] BESICOVITCH, A.S. & URSELL, H.D. Sets of fractional dimensions (V): On dimensional numbers of some continuous curves. *J. of the London Mathematical Society*. 1937, 12, 18–25.
- [31] BEYER, W.A. Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series. *Pacific J. of Mathematics*. 1962, 12, 35–46.
- [32] BIDAUX, R., BOCCARA, N., SARMA, G., SÉZE, L., DE GENNES, P.G. & PARODI, O. Statistical properties of focal conic textures in smectic liquid crystals. *Le J. de Physique*. 1973, 34, 661–672.
- [33] BIENAYMÉ, J. Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans le méthode des moindres carrés. *Comptes Rendus* (Paris). 1853, 37, 309–329.

- [34] BILLINGSLEY, P. 1965.
- [35] BILLINGSLEY, P. *Ergodic theory and information*. New York: Wiley, 1967. (Имеется перевод: *Биллингслей, П. Эргодическая теория и информация*. — М.: Мир, 1969.)
- [36] BILLINGSLEY, P. *Convergence of probability measures*. New York: Wiley, 1968.
- [37] BIRKHOFF, G.D. *Hydrodynamics*. Princeton: Princeton University Press, 1950 (первое издание), 1960 (второе издание).
- [38] BLUMENTHAL, L. M. & MENGER, K. *Studies in geometry*. San Francisco: W. H. Freeman, 1970.
- [39] BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. A dimension theorem for sample functions of stable processes. *Illinois J. of Mathematics*. 1960, 4, 308–316.
- [40] BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. Some theorems on stable processes. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1960, 95, 263–273.
- [41] BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process. *Illinois J. of Mathematics*. 1962, 6, 370–375.
- [42] BOCHNER, S. *Harmonic analysis and the theory of probability*. Berkeley: University of California Press, 1955.
- [43] BONDI, H. *Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952, 1960.
- [44] BOREL, E. Les théories moléculaires et les mathématiques. *Revue Générale des Sciences*. 1912, 23, 842–853. (Перевод на английский: *Molecular theories and mathematics. Rice Institute Pamphlet*. 1915, 1, 163–193. Репринт в [46], III, 1773–1784.)
- [45] BOREL, E. Définition arithmétique d'une distribution de masses s'étendant à l'infini et quasi périodique, avec une densité moyenne nulle. *Comptes Rendus* (Paris). 1922, 174, 977–979.
- [46] BOREL, E. *Oeuvres de Emile Borel*. Paris: Edition du CNRS, 1972–.
- [47] BOULIGAND, G. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 1928, II-52, 320–334 & 361–376.
- [48] BOULIGAND, G. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble plan. *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 1929, II-53, 185–192.
- [49] BOURBAKI, N. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann, 1960.
- [50] BOYD, D.W. The residual set dimension of the Apollonian packing. *Mathematika*. 1973, 20, 170–174.
- [51] BOYD, D.W. Improved bounds for the disk packing constant. *Aequationes Mathematicae*. 1973, 9, 99–106.
- [52] BRAGG, W. H. Liquid crystals. *Nature*. 1934, 133, 445–456.
- [53] BRAY, D. Branching patterns of individual sympathetic neurons in culture. *J. of Cell Biology*. 1974, 56, 702–712.

- [54] BRODMANN, K. Neue Forschungsergebnisse der Grossgehirnanatomie ... *Verhandlungen der 85 Versammlung deutscher Naturforscher und Aertze in Wien*, 1913, 200–240.
- [55] BROLIN, H. Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv för Matematik*. 1965, 6, 103–144.
- [56] BROWAND, F.K. An experimental investigation of the instability of an incompressible separated shear layer. *J. of Fluid Mechanics*. 1966, 26, 281–307.
- [57] BROUWER, L. E. J. *Collected works*. Ed. A. Heyting and H. Freudenthal. New York: Elsevier North Holland, 1975 – .
- [58] BROWN, G.L. & ROSHKO, A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. of Fluid Mechanics*. 1974, 64, 775–816.
- [59] BRUSH, S.G. A history of random processes. I. Brownian movement from Brown to Perrin. *Archive for History of Exact Sciences*. 1968, 5, 1–36. (См. также [60]).
- [60] BRUSH, S.G. 1976.
- [61] CANTOR, G. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*. 1872, 5, 123–132.
- [62] CANTOR, G. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfältigkeitslehre. *Mathematische Annalen*. 1883, 21, 545–591. (См. также [63]. Перевод на французский Анри Пуанкаре под названием Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica*. 2, 381–408.)
- [63] CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ed. E. Zermelo. Berlin: Teubner, 1932.
- [64] CANTOR, G. & DEDEKIND, R. *Briefwechsel*. Ed. E. Noether & J. Cavailles. Paris: Hermann, 1937.
- [65] CANTOR, G. & DEDEKIND, R. *Correspondence*. (Перевод на французский язык книги [64], выполненный Ш. Эресманом.) В книге [72].
- [66] CANTOR, G. & DEDEKIND, R. *Unveröffentlicher Briefwechsel*. Приложение XL к книге [117].
- [67] CARATHÉODORY, C. Über das lineare Mäs von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse*. 1914, 404–426. (См. также CARATHÉODORY, C. *Gesammelte mathematische Schriften*. 4, 249–275. München: Beck, 1954– .)
- [68] CARLESON, L. *Selected problems on exceptional sets*. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1967.
- [69] CARTAN, H. Sur la notion de dimension. *Enseignement Mathématique*. 1958, Monographie No. 7, 163–174.
- [70] CARTIER, P. Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres. *Séminaire de Probabilités V* (Strasbourg). *Lecture Notes in Mathematics*. 191, 58–75. New York: Springer, 1971.
- [71] CAUCHY, A. Sur les résultats les plus probables. *Comptes Rendus* (Paris). 1853, 37, 198–206.



- [72] CAVAILLÉS, J. *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann, 1962.
- [73] CELLÉRIER, CH. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Bulletin des Sciences Mathématiques*. 1890, 14, 142–160.
- [74] CESÁRO, E. Remarques sur la courbe de von Koch. *Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli*. 1905, XII, 1–12. (См. также в [75], II, 464–479.)
- [75] CESÁRO, E. *Opere scelte*. Rome: Edizioni Cremonese, 1964–.
- [76] CHANDRASEKHAR, S. Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics*. 1943, 15, 1–89. Перепечатана в сборнике *Noise and Stochastic Processes*. Ed. N. Wax. New York: Dover.
- [77] CHARLIER, C. V. L. Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1908, 4, 1–15.
- [78] CHARLIER, C. V. L. How an infinite world may be built up. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1922, 16, 1–34.
- [79] CHENTSOV, N. N. Lévy's Brownian motion for several parameters and generalized white noise. *Theory of Probability and its Applications*. 1957, 2, 265–266.
- [80] CHORIN, A. J. Estimates of intermittency, spectra, and blow up in developed turbulence. *Communications in Pure and Applied Mathematics*. 1981, 34, 853–866.
- [81] CHORIN, A. J. The evolution of a turbulent vortex. 1982.
- [82] CLAYTON, D. D. *Dark night sky, a personal adventure in cosmology*. New York: Quadrangle, 1975.
- [83] COLLET, P. & ECKMAN, J. P. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Boston: Birkhauser, 1980.
- [84] COMROE, J. H., Jr. The lung. *Scientific American*. 1966 (февраль), 56–68.
- [85] COOTNER, P. H. (Ed.) *The random character of stock market prices*. Cambridge, Ma.: MIT Press, 1964.
- [86] CORRIN, S. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence. *J. of Applied Physics*. 1959, 22, 469–473.
- [87] CORRIN, S. Outline of some topics in homogeneous turbulence flow. *J. of Geophysical Research*. 1959, 64, 2134–2150.
- [88] CORRIN, S. Turbulent dissipation fluctuations. *Physics of Fluids*. 1962, 5, 1301–1302.
- [89] COXETER, H. S. M. The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit III". *Leonardo*. 1979, 12, 19–25.
- [90] DAMERAU, F. J. & MANDELROT, B. B. Tests of the degree of word clustering in samples of written English. *Linguistics*. 1973, 102, 58–75.
- [91] DAUBEN, J. W. The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets. *Archive for History of Exact Sciences*. 1971, 7, 181–216.
- [92] DAUBEN, J. W. Denumerability and dimension: the origins of Georg Cantor's theory of sets. *Rete*. 1974, 2, 105–133.

- [93] DAUBEN, J. W. The invariance of dimension: problems in the early development of set theory and topology. *Historia Mathematicae*. 1975, 2, 273–288.
- [94] DAUBEN, J. W. Georg Cantor: The personal matrix of his mathematics. *Isis*. 1978, 69, 534–550.
- [95] DAVIS, C. & KNUTH, D. E. Number representations and dragon curves. *J. of Recreational Mathematics*. 1970, 3, 66–81 & 133–149.
- [96] DE CHÉSEAUX, J. P. L. Sur la force de la lumière et sa propagation dans l'éther, et sur la distance des étoiles fixes. *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743 et en janvier, février et mars 1744*. Lausanne et Genève: Chez Marc-Michel Bousquet et Compagnie, 1744.
- [97] DE GENNES, P. G. *The physics of liquid crystals*. Oxford: Clarendon Press, 1974.
- [98] DE GENNES, P. G. La percolation: un concept unificateur. *La Recherche*. 1976, 7, 919–927.
- [99] DE GENNES, P. G. *Scaling concepts in polymer physics*. Ithaca, NY: Cornell University Press, 1979.
- [100] DE MORGAN, A. 1872.
- [101] DENJOY, A. *Hommes, formes et le nombre*. Paris: Albert Blanchard, 1964.
- [102] DENJOY, A. Evocation de l'homme et de l'œuvre. *Astérisque*, 28–28. Ed. G. Choquet. Paris: Société Mathématique de France, 1975.
- [103] DE VAUCOULEURS, G. The distribution of bright galaxies and the local supergalaxy. *Vistas in Astronomy II*, 1584–1606. London: Pergamon, 1956.
- [104] DE VAUCOULEURS, G. The case for a hierarchical cosmology. *Science*. 1970, 167, 1203–1213.
- [105] DE VAUCOULEURS, G. The large scale distribution of galaxies and clusters of galaxies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. 1971, 73, 113–143.
- [106] DE WIJS, H. J. Statistics of ore distribution. *Geologie en Mijnbouw* (Amsterdam). 1951, 13, 365–375 & 1953, 15, 12–24.
- [107] DHAR, D. Lattices of effectively nonintegral dimensionality. *J. of Mathematical Physics*. 1877, 18, 577.
- [108] DICKSON, F. P. *The bowl of night; the physical universe and scientific thought*. Cambridge, Ma.: MIT Press, 1968.
- [109] DIEUDONNÉ, J. L'abstraction et l'intuition mathématique. *Dialectica*. 1975, 29, 39–54.
- [110] DOBRUSHIN, R. L. Gaussian processes and their subordinated self-similar random generalized fields. *Annals of Probability*. 1979, 7, 1–28.
- [111] DOMB, C. Some statistical problems connected with crystal lattices. *J. of the Royal Statistical Society*. 1964, 26B, 367–397.
- [112] DOMB, C. & GREEN, M. S. (Eds.) *Phase transitions and critical phenomena*. New York: Academic, 1972–.

- [113] DOMB, C., GILLIS, J. & WILMERS, G. On the shape and configuration of polymer molecules. *Pr. of the Physical Society*. 1965, 85, 625–645.
- [114] DOUADY, A. & OESTERLE, J. Dimension de Hausdorff des attracteurs. *Comptes Rendus* (Paris). 1980, 290A, 1136–1138.
- [115] DUBOIS REYMOND, P. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argument nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. *J. für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle). 1875, 79, 21–37.
- [116] DUGAC, P. Elements d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*. 1973, 10, 41–176.
- [117] DUGAC, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris: Vrin, 1976.
- [118] DUGAC, P. Notes et documents sur la vie et l'œuvres de René Baire. *Archive for History of Exact Sciences*. 1976, 15, 297–384.
- [119] DUGAC, P. Des correspondances mathématiques de XIXe et XXe siècles. *Revue de Synthèse*. 1976, 97, 149–170.
- [120] DUMOUCHEL, W.H. Stable distributions in statistical inference: 1. Symmetric stable distributions compared to other symmetric long-tailed distributions. *J. of the American Statistical Association*. 1973, 68, 469–482.
- [121] DUMOUCHEL, W.H. Stable distributions in statistical inference: 2. Information of stably distributed samples. *J. of the American Statistical Association*. 1975, 70, 386–393.
- [122] DUPLESSIS, N. *An introduction to potential theory*. New York: Hafner, 1970.
- [123] DUTTA, P. & HORN, P.M. Low-frequency fluctuation in solids:  $1/f$  noise. *Reviews of Modern Physics*. 1981, 53, 497–516.
- [124] DVORETZKY, A., ERDÖS, P. & KAKUTANI, S. Double points of Brownian motion in  $n$ -space. *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged). 1950, 12, 75–81.
- [125] DYSON, F.J. The search for extraterrestrial technology. *Perspectives in Modern Physics: Essays in Honor of Hans A. Bethe*. Ed. R. E. Marshak, 641–655. New York: Interscience, 1966.
- [126] DYSON, F.J. 1977.
- [127] EGGLESTON, H.G. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quarterly J. of Mathematics, Oxford Series*. 1949, 20, 31–36.
- [128] EGGLESTON, H.G. On closest packing by equilateral triangles. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society*. 1953, 49, 26–30.
- [129] EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhender Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*. 1905, 17, 549–560.
- [130] EINSTEIN, A. 1906.
- [131] EINSTEIN, A. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Ed. R. Fürth (перевод А. Д. Каупера). London: Methuen, 1926 (Dover reprint).

- [132] EL HÉLOU, Y. Recouvrement du tore par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert. *Comptes Rendus* (Paris). 1978, 287A, 815–818.
- [133] ELIAS, H. & SCHWARTZ, D. Surface areas of the cerebral cortex of mammals. *Science*. 1969, 166, 111–113.
- [134] ESSAM, J. W. Percolation theory. *Reports on the Progress of Physics*. 1980, 43, 833–912.
- [135] FABER, S. M. & GALLAGHER, J. S. 1980.
- [136] FAMA, E. F. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. *J. of Business* (Chicago). 1963, 36, 420–429. (См. также [85].)
- [137] FAMA, E. F. The behavior of stock-market prices. *J. of Business* (Chicago). 1965, 38, 34–105. (В основе работы лежит докторская диссертация автора, защищенная в Чикагском университете: *The distribution of daily differences of stock prices: a test of Mandelbrot's stable Paretian hypothesis.*)
- [138] FAMA, E. F. & BLUME, M. Filter rules and stock-market trading. *J. of Business* (Chicago). 1966, 39, 226–241.
- [139] FATOU, P. Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. *Comptes rendus* (Paris). 1906, 143, 546–548.
- [140] FATOU, P. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Société Mathématique de France*. 1919, 47, 161–271; 1920, 48, 33–94 & 208–314.
- [141] FEDERER, H. *Geometric measure theory*. New York: Springer, 1969.
- [142] FEIGENBAUM, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. of Statistical Physics*. 1978, 19, 25–52.
- [143] FEIGENBAUM, M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. of Statistical Physics*. 1979, 21, 669–706.
- [144] FEIGENBAUM, M. J. Universal behavior in nonlinear systems. *Los Alamos Science*. 1981, 1, 4–27.
- [145] FELLER, W. Fluctuation theory of recurrent events. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1949, 67, 98–119.
- [146] FELLER, W. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Annals of Mathematical Statistics*. 1951, 22, 427.
- [147] FELLER, W. *An Introduction to Probability theory and its applications*, Vol. 1. New York: Wiley, 1950–1957–1968.
- [148] FELLER, W. *An Introduction to Probability theory and its applications*, Vol. 2. New York: Wiley, 1966–1971. (Имеется перевод: Феллер, У. Введение в теорию вероятности и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.)
- [149] FEYNMAN, R. P., в книге *Pr. of the Third Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory*, Florence. Ed. R. Casalbuoni, G. Domokos & S. Kovesi-Domokos. Baltimore: John Hopkins University Press, 1979.
- [150] FEYNMAN, R. P. & HIBBS, A. R. *Quantum mechanics and path integrals*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [151] FISHER, M. E. The theory of condensation and the critical point. *Physics*. 1967, 3, 255–283.

- [152] FOURNIER D'ALBE, E. E. *Two new worlds: I. The infra world; II. The supra world*. London: Longmans Green, 1907.
- [153] FRÉCHET, M. Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques. *J. de la Société de Statistique de Paris*. 1941, 82, 114–122.
- [154] FRICKE, R. & KLEIN, F. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Leipzig: Teubner, 1897.
- [155] FRIEDLANDER, S. K. & TOPPER, L. *Turbulence: classic papers on statistical theory*. New York: Interscience, 1961.
- [156] FRIEDMAN, J. B. The architect's compass in creation miniatures of the later middle ages. *Traditio, Studies in Ancient and Medieval History, Thought, and Religion*. 1974, 419–429.
- [157] FRISCH, U., NELKIN, M. & SULEM, P. L. 1978.
- [158] FROSTMAN, O. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Meddelanden fran Lunds Universitets Matematiska Seminarium*. 1935, 3, 1–118.
- [159] FUJISAKA, H. & MORI, H. A maximum principle for determining the intermittency exponent  $\mu$  of fully developed steady turbulence. *Progress of Theoretical Physics*. 1979, 62, 54–60.
- [160] GAMOW, G. Modern cosmology. *Scientific American*. 1954, 190 (мартовский выпуск), 54–63. (См. также [438], 390–404.)
- [161] GANGOLLI, R. Lévy's Brownian motion of several parameters. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. 1967, 3B, 121–226.
- [162] GARDNER, M. An array of problems that can be solved with elementary mathematical techniques. *Scientific American*. 1967, 216 (выпуски за март, апрель и июнь). (См. также [164], 207–209 & 215–220.)
- [163] GARDNER, M. In which «monster» curves force redefinition of the word «curve». *Scientific American*. 1976, 235 (выпуск за декабрь), 124–133.
- [164] GARDNER, M. *Mathematical magic show*. New York: Knopf, 1977.
- [165] GEFEN, Y., MANDELBROT, B. B. & AHARONY, A. Critical phenomena on fractals. *Physical Review Letters*. 1980, 45, 855–858.
- [166] GEFEN, Y., AHARONY, A., MANDELBROT, B. B. & KIRKPATRICK, S. Solvable fractal family, and its possible relation to the backbone at percolation. *Physical Review Letters*. 1981, 47, 1771–1774.
- [167] GELBAUM, B. R. & OLMSTED, J. M. H. *Counterexamples in analysis*. San Francisco: Holden–Day, 1964.
- [168] GERNSTEIN, G. L. & MANDELBROT, B. B. Random walk models for the spike activity of a single neuron. *The Biophysical J*. 1964, 4, 41–68.
- [169] GERVER, J. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $\pi$ . *American J. of Mathematics*. 1970, 92, 33–55.
- [170] GILLISPIE, C. C. (Ed.) *Dictionary of scientific biography*. (В 14-и томах.) New York: Scribner's, 1970–1976.
- [171] GISPERT, H. Correspondance de Fréchet ... et ... théorie de la dimension. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* (Paris). 1980, 1, 69–120.

- [172] GNEDENKO, B. V. & KOLMOGOROV, A. N. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Превод с русского К. L. Chung. Reading, Ma.: Addison Wesley, 1954.
- [173] GOLITZYN, G. S. Fluctuations of dissipation in a locally isotropic tyrbulent flow (на русском языке). *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1962, 144, 520–523.
- [174] GRANT, H. L., STEWART, R. W. & MOILLET, A. Turbulence spectra from a tidal channel. *J. of Fluid Mechanics*. 1959, 12, 241–268.
- [175] GRASSBERGER, P. On the Hausdorff dimension of fractal attractors, 1981 (препринт).
- [176] GREENWOOD, P.E. The variation of a stable path is stable. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1969, 14, 140–148.
- [177] GRENDER, U. & ROSENBLATT, M. *Statistical analysis of stationary time series*. New York: Wiley, 1957, 1966.
- [178] GROAT, R.A. Relationship of volumetric rate of blood flow to arterial diameter. *Federation Pr*. 1948, 7, 45.
- [179] GROSSMANN, S. & THOMAE, S. Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes. *Z. für Naturforschung*. 1977, 32A, 1353–1363.
- [180] GUREL, O. & RÖSSLER, O.E. (Eds.) Bifurcation theory and applications in scientific disciplines. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1979, 316, 1–708.
- [181] GURVICH, A. S. Experimental research on frequency spectra of atmospheric turbulence. *Izvestia Akademii Nauk SSSR; Geofizicheskaya Seriya*. 1960, 1042.
- [182] GURVICH, A. S. & YAGLOM, A. V. Breakdown of eddies and probability distribution for small scale turbulence. *Boundary Layers and Turbulence*. (Kyoto International Symposium, 1966.) *Physics of Fluids*. 1967, 10, S59–S65.
- [183] GURVICH, A. S. & ZUBKOVSKII, S. L. On the experimantal evaluation of the fluctuation of dissipation of turbulent energy. *Izvestia Akademii Nauk SSSR; Geofizicheskaya Seriya*. 1963, 12, 1856– .
- [184] GUTHRIE, W. K. C. *The Greek philosophers from Thales to Aristotle*. London: Methuen, 1950 (Harper paperback).
- [185] GUTHRIE, W.K.C. *A history of Greek philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971– .
- [186] HACK, J.T. Studies of longitudinal streams in Virginia and Maryland. *U. S. Geological Survey Professional Papers*. 1957, 294B.
- [187] HADAMARD, J. L'œuvre mathématique de Poincaré. *Acta Mathematica*. 1912, 38, 203–287. (См. также [480], XI, 152–242; или [188], 4, 1921–2005.)
- [188] HADAMARD, J. *Oeuvres de Jacques Hadamard*. Paris: Editions du CNRS, 1968.
- [189] HAGGETT, P. *Geography: a modern synthesis*. New York: Harper & Row, 1972.

- [190] HAHN, H. The crisis in intuition. *The world of mathematics*, Ed. J. R. Newman, Vol. III. New York: Simon & Schuster, 1956–1976. (Перевод с немецкого. Оригинальный немецкий текст в книге MARK, H., THIRRING, H., HAHN, H., MENGER, K. & NÖBELING, G. *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften*. Leipzig & Vienna: F. Deuticke, 1933.)
- [191] HALLÉ, F., OLDEMAN, R. A. A. & TOMLINSON, P. B. *Tropical trees and forests*. New York: Springer, 1978.
- [192] HALLEY, J. W. & MAI, T. Numerical estimates of the Hausdorff dimension of the largest cluster and its backbone in the percolation problem in two dimensions. *Physical Review Letters*. 1979, 43, 740–743.
- [193] HANDELMAN, S. W. A high-resolution computer graphics system. *IBM Systems J.* 1980, 19, 356–366.
- [194] HARDY, G. H. Weierstrass's non-differentiable function. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1916, 17, 302–323. (Также в [195], IV, 477–501.)
- [195] HARDY, G. H. *Collected papers*. Oxford: Clarendon Press, 1966–.
- [196] HARRIS, T. E. *Branching processes*. New York: Springer, 1963.
- [197] HARRISON, E. R. *Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [198] HARRISON, R. J., BISHOP, G. J. & QUINN, G. P. Spanning lengths of percolation clusters. *J. of Statistical Physics*. 1978, 19, 53–64.
- [199] HARTER, W. G. Theory of hyperfine and superfine links in symmetric polyatomic molecules. I. Trigonal and tetrahedral molecules. II. Elementary cases in octahedral hexafluoride molecules. *Physical Review*. 1979, A19, 2277–2303 & 1981, A24, 192–263.
- [200] HARTMANN, W. K. Cratering in the solar system. *Scientific American*. 1977 (январь), 84–99.
- [201] HARVEY, W. *De motu cordis*. Перевод на английский Роберта Виллиса (Лондон, 1847) под названием *On the motion of the heart and blood in animals*. Отрывок в *Steps in the scientific tradition: readings in the history of science*. Ed. R. S. Westfall et al. New York: Wiley.
- [202] HAUSDORFF, F. *Die Grundzüge der Mengenlehre*. 1914.
- [203] HAUSDORFF, F. Dimension und äusseres Mass. *Matematische Annalen*. 1919, 79, 157–179.
- [204] HAWKES, J. Hausdorff measure, entropy and the independence of small sets. *Pr. of the London Mathematical Society* (3). 1974, 28, 700–724.
- [205] HAWKES, J. Multiple points for symmetric Lévy processes. *Mathematical Pr. of the Cambridge Philosophical Society*. 1978, 83, 83–90.
- [206] HAWKINS, G. S. Interplanetary debris near the Earth. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1964, 2, 149–164.
- [207] HAWKINS, T. *Lebesgue's theory of integration: Its origins and development*. Madison: University of Wisconsin Press, 1970.
- [208] HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's elements translated with introduction and commentary*. Cambridge: Cambridge University Press, 1908 (Dover reprint).

- [209] HELLEMAN, R. H. G. (Ed.) Nonlinear dynamics. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1980, 357, 1–507.
- [210] HENDRICKS, W. J. Multiple points for transient symmetric Lévy processes in  $\mathbb{R}^d$ . *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1979, 49, 13–21.
- [211] HERMITE, C. & STIELTJES, T. J. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. 2 vols. Ed. B. Baillaud & H. Bourget. Paris: Gauthier-Villars, 1905.
- [212] HEYDE, C. C. & SENETA, E. *I. J. Bienaymé: statistical theory anticipated*. New York: Springer, 1977.
- [213] HILBERT, D. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen*. 1891, 38, 459–460. (Также в [214], 3, 1–2.)
- [214] HILBERT, D. *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Springer, 1932 (Chelsea reprint).
- [215] HILEY, B. J. & SYKES, M. F. Probability of initial ring closure in the restricted random walk model of a macromolecule. *J. of Chemical Physics*. 1961, 34, 1531–1537.
- [216] HILLE, E. & TAMARKIN, J. D. Remarks on a known example of a monotone continuous function. *American Mathematics Monthly*. 1929, 36, 255–264.
- [217] HIRST, K. E. The Apollonian packing of circles. *J. of the London Mathematical Society*. 1967, 42, 281–291.
- [218] HOFSTADTER, D. R. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Physical Review*. 1976, B14, 2239–2249.
- [219] HOFSTADTER, D. R. Strange attractors: mathematical patterns delicately poised between order and chaos. *Scientific American*. 1981, 245 (ноябрьский выпуск), 16–29.
- [220] HOLTSMARK, J. Über die Verbreiterung von Spektrallinien. *Annalen der Physik*. 1919, 58, 577–630.
- [221] HOOGE, F. N., KEINPENNING, T. G. M. & VANDAMME, L. K. J. Experimental studies on  $1/f$  noise. *Reports on Progress in Physics*. 1981, 44, 479–532.
- [222] HOPKINSON. On the residual charge of the Leyden jar. *Pr. of the Royal Society of London*. 1876, 24, 408– .
- [223] HORN, H. *Trees*. Princeton: Princeton University Press, 1971.
- [224] HORSFIELD, K. & CUMMINGS, G. Angles of branching and diameters of branches in the human bronchial tree. *Bulletin of Mathematics Biophysics*. 1967, 29, 245–259.
- [225] HORTON, R. E. Erosional development of streams and their drainage basins; Hydrophysical approach to quantitative morphology. *Bulletin of the Geophysical Society of America*. 1945, 56, 275–370.
- [226] HOSKIN, M. A. Dark skies and fixed stars. *J. of the British Astronomical Association*. 1973, 83, 4– .
- [227] HOSKIN, M. A. Newton, Providence and the universe of stars. *J. for the History of Astronomy*. 1977, 8, 77–101.



- [228] HOWARD, A.D. Truncation of stream networks by headward growth and branching. *Geophysical Analysis*. 1971, 3, 29–51.
- [229] HOYLE, F. On the fragmentation of gas clouds into galaxies and stars. *Astrophysical J.* 1953, 118, 513–528.
- [230] HOYLE, F. *Astronomy and cosmology. A modern course*. San Francisco: W. H. Freeman, 1975.
- [231] HUREWICZ, W. & WALLMAN, H. *Dimension theory*. Princeton University Press, 1941.
- [232] HURST, H.E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Tr. of the American Society of Civil Engineers*. 1951, 116, 770–808.
- [233] HURST, H.E. Methods of using long-term storage in reservoirs. *Pr. of the Institution of Civil Engineers*, Part I. 1955, 519–577.
- [234] HURST, H.E., BLACK, R.P. & SIMAIKA, Y.M. *Long-term storage, an experimental study*. London: Constable, 1965.
- [235] HUTCHINSON, J.E. Fractals and self-similarity. *Indiana University Mathematics J.* 1981, 30, 713–747.
- [236] HUXLEY, J.S. *Problems of relative growth*. New York: Dial Press, 1931.
- [237] IBERALL, A.S. Anatomy and steady flow characteristics of the arterial system with an introduction to its pulsatile characteristics. *Mathematical Biosciences*. 1967, 1, 375–395.
- [238] JACK, J.J., NOBLE, D. & TSIEN, R.W. *Electric current flow in excitable cells*. Oxford: Oxford University Press, 1975.
- [239] JAKI, S.L. *The paradox of Olbers' paradox*. New York: Herder & Herder, 1969.
- [240] JEANS, J.H. *Astronomy and cosmogony*. Cambridge: Cambridge University Press, 1929.
- [241] JERISON, H.J. *Evolution of the brain and intelligence*. New York: Academic, 1973.
- [242] JOEVEER, M., EINASTO, J. & TAGO, E. Препринт из Тартуской обсерватории, 1977.
- [243] JOHNSON, D.M. Prelude to dimension theory: the geometric investigation of Bernard Bolzano. *Archive for the History of Exact Sciences*. 1977, 17, 261–295.
- [244] JOHNSON, D.M. The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology. *Archive for the History of Exact Sciences*. 1981, 25, 85–267 (Parts I & II).
- [245] JULIA, G. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1918, 4, 47–245. Перепечатана (вместе с сопутствующими текстами) в [246], 121–319.
- [246] JULIA, G. *Oeuvres de Gaston Julia*. Paris: Gauthier–Villars, 1968.
- [247] КАХАНА, J.P. Lacunary Taylor and Fourier series. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1964, 70, 199–213.

- [248] KAHANE, J. P. *Some random series of functions*. Lexington, Ma.: D. C. Heath, 1968.
- [249] KAHANE, J. P. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. *Enseignement mathématique*. 1969, 15, 185–192.
- [250] KAHANE, J. P. Courbes étranges, ensembles minces. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*. 1970, 49, 325–339.
- [251] KAHANE, J. P. The technique of using random measures and random sets in harmonic analysis. *Advances in Probability and Related Topics*, Ed. P. Ney. 1, 65–101. New York: Marcel Dekker, 1971.
- [252] KAHANE, J. P. Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot. *Comptes Rendus (Paris)*. 1974, 278A, 621–623.
- [253] KAHANE, J. P. & MANDELBROT, B. B. Ensembles de multiplicité aléatoires. *Comptes Rendus (Paris)*. 1965, 261, 3931–3933.
- [254] KAHANE, J. P. & PEYRIÈRE, J. Sur certaines martingales de B. Mandelbrot. *Advances in Mathematics*. 1976, 22, 131–145.
- [255] KAHANE, J. P. & SALEM, R. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Paris: Hermann, 1963.
- [256] KAHANE, J. P., WEISS, M. & WEISS, G. On lacunary power series. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1963, 5, 1–26.
- [257] KAKUTANI, S. Quadratic diameter of a metric space and its application to a problem in analysis. *Pr. of the American Mathematical Society*. 1952, 3, 532–542.
- [258] KANT, I. *Universal natural history and theory of the heavens (1755)*. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1969.
- [259] KASNER, E. & SUPNICK, F. The Apollonian packing of circles. *Pr. of the National Academy of Sciences U. S. A.* 1943, 29, 378–384.
- [260] KAUFMAN, R. On Hausdorff dimension of projections. *Mathematika*. 1968, 15, 153–155.
- [261] KELLY, W. *The best of Pogo*. New York: Simon & Schuster, 1951.
- [262] KERKER, M. Brownian motion and molecular reality prior to 1900. *J. of Chemical Education*. 1974, 51, 764–768.
- [263] KERKER, M. The Svedberg and molecular reality. *Isis*. 1976, 67, 190–216.
- [264] KEYES, R. W. 1981.
- [265] KIRKPATRICK, S. 197?.
- [266] KIRKPATRICK, S. Percolation and conduction. *Reviews of Modern Physics*. 1973, 45, 574–588.
- [267] KIRKPATRICK, S. 1978.
- [268] KIRKPATRICK, S. Models of disordered materials. *Ill-condensed matter / Matière mal condensée*, Ed. R. Balian, R. Ménard & G. Toulouse. New York: North Holland, 1, 99–154.
- [269] KLINE, S. A. On curves of fractional dimension. *J. of the London Mathematical Society*. 1945, 20, 79–86.

- [270] KNIGHT, F. B. *Essentials of Brownian motion and diffusion*. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1981.
- [271] KNUTH, D. *The art of computer programming*. Reading, Ma.: Addison Wesley, 1968–.
- [272] KNUTH, D. 1980.
- [273] KOHLRAUSCH, R. Über das Dellmann'sche Elektrometer. *Annalen der Physik und Chemie* (Poggendorf). 1847, III-12, 353–405.
- [274] KOHLRAUSCH, R. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener flasche. *Annalen der Physik und Chemie* (Poggendorf). 1854, IV-91, 56–82 & 179–214.
- [275] KOLMOGOROV, A. N. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N. S.)*. 1940, 26, 115–118.
- [276] KOLMOGOROV, A. N. Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N. S.)*. 1941, 30, 299–303. (См. также репринт в [155], 151–155.)
- [277] KOLMOGOROV, A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible liquid at high Reynolds number. *J. of Fluid Mechanics*. 1962, 13, 82–85. (Русский оригинал и французский перевод можно найти в: *Mécanique de la Turbulence*, 447–458 (Colloque International de Marseille, 1961), Paris: Editions du CNRS.)
- [278] KOLMOGOROV, A. N. & TIHOMIROV, V. M. Epsilon-entropy and epsilon-capacity of sets in functional spaces. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk (N. S.)*. 1959, 14, 3–86. (Английский перевод: *American Mathematical Society Translations* (Series 2). 1961, 17, 277–364.)
- [279] KORČAK, J. Deux types fondamentaux de distribution statistique. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*. 1938, III, 295–299.
- [280] KRAICHNAN, R. H. On Kolmogorov's inertial range theories. *J. of Fluid Mechanics*. 1974, 62, 305–330.
- [281] KUO, A. Y. S. & CORRSIN, S. Experiments on internal intermittency and fine structure distribution functions in fully turbulent fluid. *J. of Fluid Mechanics*. 1971, 50, 285–320.
- [282] KUO, A. Y. S. & CORRSIN, S. Experiments on the geometry of the fine structure regions in fully turbulent fluid. *J. of Fluid Mechanics*. 1972, 56, 477–479.
- [283] LAMPERTI, J. Semi-stable stochastic processes. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1962, 104, 62–78.
- [284] LAMPERTI, J. *Probability: a survey of the mathematical theory*. Reading, Ma.: W. A. Benjamin, 1966.
- [285] LAMPERTI, J. Semi-stable Markov processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1972, 22, 205–225.
- [286] LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics*. Reading: Addison Wesley, 1953–1959.

- [287] LANDKOF, N.S. *Foundations of modern potential theory*. New York: Springer, 1966–1972.
- [288] LANDMAN, B.S. & RUSSO, R.L. On a pin versus block relationship for partitions of logic graphs. *IEEE Tr. on Computers*. 1971, 20, 1469–1479.
- [289] LAPLACE, P.S. DE, *Oeuvres complètes*. Paris: Gauthier – Villars, 1878– .
- [290] LARMAN D.G. On the Besicovitch dimension of the residual set of arbitrarily packed disks in the plane. *J. of the London Mathematical Society*. 1967, 42, 292–302.
- [291] LAVOIE, J.L., OSLER, T.J. & TREMBLAY, R. Fractional derivatives of special functions. *SIAM Review*. 1976, 18, 240–268.
- [292] LAWRENCE, A.J. & KOTTEGODA, N. T. Stochastic modelling of riverflow time series. *J. of the Royal Statistical Society A*, 1977, 140, часть 1, 1–47.
- [293] LEATH, P.L. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold. *Physical Review*. 1976, B14, 5046–5055.
- [294] LEBESGUE, H. *Sur le problème des aires*. (См. [295], IV, 29–35.)
- [295] LEBESGUE, H. *Oeuvres scientifiques*. Genève: Enseignement Mathématique, 1972– .
- [296] LEIBNIZ, G.W. *Mathematische Schriften*. Ed. C.I. Gerhardt. Halle: H. W. Schmidt, 1849– (Olms reprint).
- [297] LEOPOLD, L.B. Rivers. *American Scientist*. 1962, 50, 511–537.
- [298] LEOPOLD, L.B. & LANGBEIN, W.B. The concept of entropy in landscape evolution. *U. S. Geological Survey Professional Papers*. 1962, 500A.
- [299] LEOPOLD, L.B. & MADDOCK, T., Jr. The hydraulic geometry of stream channels and some physiological implications. *U. S. Geological Survey Professional Papers*. 1953, 252.
- [300] LEOPOLD, L.B. & MILLER, J.P. Ephemeral streams: Hydraulic factors and their relation to the drainage net. *U. S. Geological Survey Professional Papers*. 1956, 282A, 1–37.
- [301] LERAY, J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica*. 1934, 63, 193–348.
- [302] LÉVY, P. *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars, 1925.
- [303] LÉVY, P. Sur la possibilité d'un univers de mass infinie. *Annales de Physique*. 1930, 14, 184–189. (См. также в [312], II, 534–540.)
- [304] LÉVY, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris: Gauthier-Villars, 1937, 1954.
- [305] LÉVY, P. Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblable au tout. *J. de l'École Polytechnique*. 1938, III, 7–8, 227–291. (См. также в [312], II, 331–394.)
- [306] LÉVY, P. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Paris: Gauthier-Villars, 1948, 1965.
- [307] LÉVY, P. Brownian motion depending on  $n$  parameters. The particular case  $n = 5$ . *Pr. of the Symposia in Applied Mathematics*, VII, 1–20. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1957.

- [308] LÉVY, P. Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann. *Circolo matematico di Palermo, Rendiconti*. 1959, II, 8, 297–310.
- [309] LÉVY, P. Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres. *Rendiconti di Matematica* (Roma). 1963, 22, 24–101.
- [310] LÉVY, P. A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions. *Pr. of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Theory*, 2, 133–175. Ed. J. Neyman. Berkeley: University of California Press, 1965.
- [311] LÉVY, P. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Paris: Albert Blanchard, 1970.
- [312] LÉVY, P. *Oeuvres de Paul Lévy*. Ed. D. Dugué, P. Deheuvels & M. Ibéro. Paris: Gauthier-Villars, 1973–.
- [313] LIEB, E. H. & LEBOWITZ, J. L. The constitution of matter: existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei. *Advances in Mathematics*. 1972, 9, 316–398.
- [314] LLINAS, R. R. *Neurobiology of cerebellar evolution and development*. Chicago: American Medical Association, 1969.
- [315] LOEMKER, L. E. *Philosophical papers and letters of Leibniz*. Boston: Reidel, 1956–1969.
- [316] LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. *J. of the Atmospheric Sciences*. 1963, 20, 130–141.
- [317] LOVE, E. R. & YOUNG, L. C. Sur une classe de fonctionnelles linéaires. *Fundamenta Mathematicae*. 1937, 28, 243–257.
- [318] LOVEJOY, A. D. *The great chain of being*. 1936.
- [319] LOVEJOY, S. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science*. 1982, 216, 185–187.
- [320] LUKACS, E. *Characteristic functions*. London: Griffin, New York: Hafner, 1960, 1970.
- [321] LYDALL, H. F. The distribution of employment income. *Econometrica*. 1959, 27, 110–115.
- [322] MAITRE, J. Les fréquences des prénoms de baptême en France. *L'Année sociologique*. 1964, 3, 31–74.
- [323] MANDELBROT, B. B. Adaptation d'un message à la ligne de transmission. I & II. *Comptes Rendus* (Paris). 1951, 232, 1638–1640 & 2003–2005.
- [324] MANDELBROT, B. B. Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication (Ph. D. Thesis). *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*. 1953, 2, 1–124.
- [325] MANDELBROT, B. B. Structure formelle des textes et communication (deux études). *Word*. 1954, 10, 1–27. (Поправки: *Word*. 1954, 11, 424. Перевод на английский, чешский и итальянский языки.)
- [326] MANDELBROT, B. B. On recurrent noise limiting coding. *Information Networks, the Brooklyn Polytechnic Institute Symposium*, 205–221. Ed. E. Weber. New York: Interscience, 1955. (Перевод на русский язык.)

- [327] MANDELNBROT, B.B. La distribution de Willis–Yule, relative au nombre d'espèces dans les genres taxonomique. *Comptes Rendus* (Paris). 1951, 242, 2223–2225.
- [328] MANDELNBROT, B.B. On the language of taxonomy: an outline of a thermo-statistical theory of systems of categories, with Willis (natural) structure. *Information Theory, the Third London Symposium*, 135–145. Ed. C. Cherry. New York: Academic, 1956.
- [329] MANDELNBROT, B.B. Exhaustivité de l'énergie d'un système, pour l'estimation de sa température. *Comptes Rendus* (Paris). 1956, 243, 1835–1837.
- [330] MANDELNBROT, B.B. A purely phenomenological theory of statistical thermodynamics: canonical ensembles. *IRE Tr. on Information Theory*. 1956, 112, 190–203.
- [331] MANDELNBROT, B.B. Ensembles grand canonique de Gibbs; justification de leur unicité basée sur la divisibilité infinie de leur énergie aléatoire. *Comptes Rendus* (Paris). 1959, 249, 1464–1466.
- [332] MANDELNBROT, B.B. Variables et processus stochastique de Pareto–Lévy et la répartition des revenus, I & II. *Comptes Rendus* (Paris). 1959, 249, 613–615 & 2153–2155.
- [333] MANDELNBROT, B.B. The Pareto–Lévy law and the distribution of income. *International Economic Review*. 1960, 1, 79–106.
- [334] MANDELNBROT, B.B. On the theory of word frequencies and on related Markovian models of discourse. *Structures of language and its mathematical aspects*. Ed. R. Jakobson. 120–219. New York: American Mathematical Society, 1961.
- [335] MANDELNBROT, B.B. Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income. *Econometrica*. 1961, 29, 517–543.
- [336] MANDELNBROT, B.B. Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy. *Comptes Rendus* (Paris). 1962, 254, 3968–3970.
- [337] MANDELNBROT, B.B. Paretian distributions and income maximization. *Quarterly J. of Economics of Harvard University*. 1962, 76, 57–85.
- [338] MANDELNBROT, B.B. *Statistics of natural resources and the law of Pareto*. (IBM Research Note NC-146, 29 июня 1962 г., неопубликовано).
- [339] MANDELNBROT, B.B. The role of sufficiency and estimation in thermodynamics. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1962, 33, 1021–1038.
- [340] MANDELNBROT, B.B. The stable Paretian income distribution, when the apparent exponent is near two. *International Economic Review*. 1963, 4, 111–115.
- [341] MANDELNBROT, B.B. The variation of certain speculative prices. *J. of Business* (Chicago). 1963, 36, 394–419. (Репринт в *The random character of stock market prices*. Ed. P.H. Cootner, 297–337. Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1963.)

- [342] MANDELBROT, B. B. New methods in statistical economics. *J. of Political Economy*. 1963, 71, 421–440. (Репринт в *Bulletin of the International Statistical Institute, Ottawa Session*: 40 (2), 669–720.)
- [343] MANDELBROT, B. B. The epistemology of chance in certain newer sciences. (Доклад на *The Jerusalem International Congress on Logic, Methodology and the Philosophy of Science*, 1964, неопубликован.)
- [344] MANDELBROT, B. B. Derivation of statistical thermodynamics from purely phenomenological principles. *J. of Mathematical Physics*. 1964, 5, 164–171.
- [345] MANDELBROT, B. B. Random walks, fire damage amount, and other Paretian risk phenomena. *Operations Research*. 1964, 12, 582–585.
- [346] MANDELBROT, B. B. *Self-similar random processes and the range*. (IBM Research Report RC-1163, 13 апреля 1964 г., неопубликовано.)
- [347] MANDELBROT, B. B. Self-similar error clusters in communications systems and the concept of conditional stationarity. *IEEE Tr. on Communications Technology*. 1965, 13, 71–90.
- [348] MANDELBROT, B. B. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application à la loi climatologique de H. E. Hurst. *Comptes Rendus (Paris)*. 1965, 260, 3274–3277.
- [349] MANDELBROT, B. B. Leo Szilard and unique decipherability. *IEEE Tr. on Information Theory*. 1965, IT-11, 455–456.
- [350] MANDELBROT, B. B. Information theory and psycholinguistics. *Scientific Psychology: Principles and approaches*, 550–562. Ed. B. B. Wolman & E. N. Nagel. New York: Basic Books, 1965. (Репринт в *Language, Selected Readings*. Ed. R. C. Oldfield & J. C. Marshall. London: Penguin. Репринт с приложениями: *Readings in Mathematical Social Science*. Ed. P. Lazarfeld & N. Henry. Chicago, Ill.: Science Research Associates, 1966 (в твердом переплете), Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1968 (в мягкой обложке). Имеется перевод на русский язык.)
- [351] MANDELBROT, B. B. Forecasts of future prices, unbiased markets, and «martingale» models. *J. of Business (Chicago)*. 1966, 39, 242–255. (Исправления существенных опечаток в следующем выпуске того же журнала.)
- [352] MANDELBROT, B. B. Sporadic random functions and conditional spectral analysis; self-similar examples and limits. *Pr. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 3, 155–179. Ed. L. LeCam & J. Neyman. Berkeley: University of California Press, 1967.
- [353] MANDELBROT, B. B. Sporadic turbulence. *Boundary Layers and Turbulence (Kyoto International Symposium, 1966), Supplement to Physics of Fluids*. 1967, 10, S302–S303.
- [354] MANDELBROT, B. B. The variation of some other speculative prices. *J. of Business (Chicago)*. 1967, 40, 393–413.
- [355] MANDELBROT, B. B. Sur l'épistémologie du hasard dans les sciences sociale: invariance des lois et vérification des hypothèses. *Encyclopédie de la Pléiade: Logique et Connaissance Scientifique*, 1097–1113. Ed. J. Piaget. Paris: Gallimard, 1967.

- [356] MANDELBROT, B.B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*. 1967, 155, 636–638.
- [357] MANDELBROT, B.B. Some noises with  $1/f$  spectrum, a bridge between direct current and white noise. *IEEE Tr. on Information Theory*. 1967, 13, 289–298.
- [358] MANDELBROT, B.B. Les constantes chiffrées du discours. *Encyclopédie de la Pléiade: Linguistique*, 48–56. Ed. J. Martinet. Paris: Gallimard, 1968.
- [359] MANDELBROT, B.B. Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variance. *International Economic Review*. 1969, 10, 82–111.
- [360] MANDELBROT, B.B. On negative temperature for discourse. Discussion of a paper by Prof. N.F. Ramsey. *Critical Review of Thermodynamics*, 230–232. Ed. E. B. Stuart et al. Baltimore, Md.: Mono Book, 1970.
- [361] MANDELBROT, B.B. Statistical dependence in prices and interest rates. *Papers of the Second World Congress of the Econometric Society*, Cambridge, England (8–14 сентября 1970 г.)
- [362] MANDELBROT, B.B. *Statistical Self Similarity and Very Erratic Chance Fluctuations*. Trumbull Lectures, Yale University (неопубликованы).
- [363] MANDELBROT, B.B. When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *Review of Economics and Statistics*. 1971, LIII, 225–236.
- [364] MANDELBROT, B.B. A fast fractional Gaussian noise generator. *Water Resources Research*. 1971, 7, 543–553. (Примечание: в первой дроби на с. 545 следует убрать 1 в числителе и поместить ее перед всей дробью.)
- [365] MANDELBROT, B.B. *The conditional cosmographic principle and the fractional dimension of the universe*. (Я послал рукопись в несколько журналов, однако впервые она была опубликована лишь в виде части [382].)
- [366] MANDELBROT, B.B. On Dvoretzky coverings for the circle. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1972, 22, 158–160.
- [367] MANDELBROT, B.B. Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. *Statistical models and turbulence*. Ed. M. Rosenblatt & C. Van Atta. Lecture Notes in Physics, 12, 333–351. New York: Springer, 1972.
- [368] MANDELBROT, B.B. Correction of an error in «The variation of certain speculative prices (1963)». *J. of Business*. 1972, 40, 542–543.
- [369] MANDELBROT, B.B. Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to the R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*. 1972, 1, 259–290.
- [370] MANDELBROT, B.B. Broken line process derived as an approximation to fractional noise. *Water Resources Research*. 1972, 8, 1354–1356.
- [371] MANDELBROT, B.B. Renewal sets and random cutouts. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1972, 22, 145–157.
- [372] MANDELBROT, B.B. Comments on «A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices» by Peter K. Clark. *Econometrica*. 1973, 41, 157–160.



- [373] MANDELBROT, B.B. Formes nouvelles du hasard dans les sciences. *Economie Appliquée*. 1973, 26, 307–319.
- [374] MANDELBROT, B.B. Le problème de la réalité des cycles lents, et le syndrome de Joseph. *Economie Appliquée*. 1973, 26, 349–365.
- [375] MANDELBROT, B.B. Le syndrome de la variance infinie, et ses rapports avec la discontinuité des prix. *Economie Appliquée*. 1973, 26, 321–348.
- [376] MANDELBROT, B.B. Multiplications aléatoires itérée, et distributions invariantes par moyenne pondérée. *Comptes Rendus* (Paris). 1974, 278A, 289–292 & 355–358.
- [377] MANDELBROT, B.B. A population birth and mutation process, Part I: Explicit distributions for the number of mutants in an old culture of bacteria. *J. of Applied Probability*. 1974, 11, 437–444. (Вторая часть распространялась частным порядком.)
- [378] MANDELBROT, B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. of Fluid Mechanics*. 1974, 62, 331–358.
- [379] MANDELBROT, B.B. Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonien ne du cas brownien et généralisations. *Comptes Rendus* (Paris). 1975, 280A, 1075–1078.
- [380] MANDELBROT, B.B. On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars. *J. of Fluid Mechanics*. 1975, 72, 401–416.
- [381] MANDELBROT, B.B. Hasards et tourbillons: quatre contes à clef. *Annales des Mines* (ноябрь 1975 г.), 61–66.
- [382] MANDELBROT, B.B. Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Paris: Flammarion, 1975.
- [383] MANDELBROT, B.B. Sur un modèle décomposable d'univers hiérarchisé: déduction des corrélations galactiques sur la sphère céleste. *Comptes Rendus* (Paris). 1975, 280A, 1551–1554.
- [384] MANDELBROT, B.B. Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Pr. of the National Academy of Sciences USA*. 1975, 72, 3825–3828.
- [385] MANDELBROT, B.B. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1975, 31, 271–285.
- [386] MANDELBROT, B.B. Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides. *Comptes Rendus* (Paris). 1976, 282A, 119–120.
- [387] MANDELBROT, B.B. Intermittent turbulence & fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent  $5/3 + B$ . *Turbulence and Navier–Stokes Equations*. Ed. R. Teman. *Lecture Notes in Mathematics*, 565, 121–145. New York: Springer, 1976.
- [388] MANDELBROT, B.B. Fractals and turbulence: attractors and dispersion. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977*. Ed. P. Bernard & T. Ratiu. *Lecture*

- Notes in Mathematics*, 615, 83–93. New York: Springer, 1977. (Переведена на русский язык.)
- [389] MANDELBROT, B. B. *Fractals: form, chance and dimension*. San Francisco: W. H. Freeman & Co., 1977.
- [390] MANDELBROT, B. B. Geometric facets of statistical physics: scaling and fractals. *Statistical Physics 13*, International IUPAP Conference, 1977. Ed. D. Cabib et al. *Annals of the Israel Physical Society*, 225–233.
- [391] MANDELBROT, B. B. 1978.
- [392] MANDELBROT, B. B. The fractal geometry of trees and other natural phenomena. *Buffon Bicentenary Symposium on Geometrical Probability*, Ed. R. Miles & J. Serra. *Lecture Notes in Biomathematics*, 23, 235–249. New York: Springer, 1978.
- [393] MANDELBROT, B. B. Les objets fractals. *La Recherche*. 1978, 9, 1–13.
- [394] MANDELBROT, B. B. Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle: les cordonnets discrets et fractals. *Comptes Rendus (Paris)*. 1978, 286A, 933–936.
- [395] MANDELBROT, B. B. Comment on bifurcation theory and fractals. *Bifurcation Theory and Applications*. Ed. Gurel & O. Rössler. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1979, 316, 463–464.
- [396] MANDELBROT, B. B. Corrélation et texture dans un nouveau modèle d'Univers hiérarchisé, basé sur les ensembles trémas. *Comptes Rendus (Paris)*. 1979, 288A, 81–83.
- [397] MANDELBROT, B. B. Fractals and geometry with many scales of length. *Encyclopedia Britannica 1981 Yearbook of Science and the Future*. 1980, 168–181.
- [398] MANDELBROT, B. B. Fractal aspects of the iteration of  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$  for complex  $\lambda$  and  $z$ . *Non Linear Dynamics*, Ed. R. H. G. Helleman. *Annals of the New York Academy of Sciences*. 1980, 357, 249–259.
- [399] MANDELBROT, B. B. Scalebound or scaling shapes: A useful distinction in the visual arts and in the natural sciences. *Leonardo*. 1981, 14, 45–47.
- [400] MANDELBROT, B. B. On discs and sigma discs, that osculate the limit sets of groups and inversions. *Mathematical Intelligencer*. 1982, 4.
- [401] MANDELBROT, B. B. The inexhaustible function  $z^2 - m$ . *Scientific American*.
- [402] MANDELBROT, B. B. & MCCAMY, K. On the secular pole motion and the Chandler wobble. *Geophysical J.* 1970, 21, 217–232.
- [403] MANDELBROT, B. B. & TAYLOR, H. M. On the distribution of stock price differences. *Operations Research*. 1967, 15, 1057–1062.
- [404] MANDELBROT, B. B. & VAN NESS, J. W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*. 1968, 10, 422.
- [405] MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Resources Research*. 1968, 4, 909–918.
- [406] MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resources Research*. 1969, 5, 228.

- [407] MANDELBROT, B.B. & WALLIS, J.R. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research*. 1969, 5, 321–340.
- [408] MANDELBROT, B.B. & WALLIS, J.R. Robustness of the rescaled range  $R/S$  in the measurement of noncyclic long-run statistical dependence. *Water Resources Research*. 1969, 5, 967–988.
- [409] MANDELBROT, B. B., *см. также* [7], [21], [90], [165], [166], [168] и [253].
- [410] MANHEIM, J.H. *The genesis of point-set topology*. New York: Macmillan, 1964.
- [411] MARCUS, A. A stochastic model of the formation and survival of lunar craters, distribution of diameters of clean craters. *Icarus*. 1964, 3, 460–472.
- [412] MARCUS, M.B. Capacity of level sets of certain stochastic processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1976, 34, 279–284.
- [413] MARSTRAND, J.M. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimension. *Pr. of the London Mathematical Society*. 1954, (3) 4, 257–302.
- [414] MARSTRAND, J.M. The dimension of Cartesian product sets. *Pr. of the London Mathematical Society*. 1954, 50, 198–202.
- [415] MATHERON, G. *Traité de Géostatistique Appliquée*. Cambridge Philosophical Society, Tome 1. Paris: Technip, 1962.
- [416] MATTILA, P. Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A Mathematica*. 1975, 1, 227–244.
- [417] MAX, N.L. *Space filling curves*. Topology Films Project. International Film Bureau, Chicago, Ill., 1971. (16-мм фильм. В комплект входит также одноименная книга (предварительный вариант), изданная в Education Development Center, Newton, Ma.)
- [418] MAXWELL, J.C. *Scientific papers*, 1890 (Dover reprint).
- [419] MCKEAN, H. P., Jr. Hausdorff–Besicovitch dimension of Brownian motion paths. *Duke Mathematical J*. 1955, 22, 229–234.
- [420] MCKEAN, H. P., Jr. Sample functions of stable processes. *Annals of Mathematics*. 1955, 61, 564–579.
- [421] MCKEAN, H. P., Jr. Brownian motion with a several dimensional time. *Theory of Probability and its Applications*. 1963, 8, 357–378.
- [422] MCMAHON, T. A. The mechanical design of trees. *Scientific American*. 1975, 233, 92–102.
- [423] MCMAHON, T. A. & KRONAUER, R. E. Tree structures: Deducing the principle of mechanical design. *J. of Theoretical Biology*. 1976, 59, 433–466.
- [424] MEJIA, J. M., RODRIGUEZ-ITURBE, I. & DAWDY, D. R. Streamflow simulation. 2. The broken line process as a potential model for hydrological simulation. *Water Resource Research*. 1972, 8, 931–941.
- [425] MELZAK, Z. A. Infinite packings of disks. *Canadian J. of Mathematics*. 1966, 18, 838–852.
- [426] MENGER, K. 1932.

- [427] MENGER, K. What is dimension? *American Mathematical Monthly*. 1943, 50, 2–7. (См. также [428], глава 17.)
- [428] MENGER, K. *Selected papers in logic and foundations, didactics and economics*. Boston: Reidel, 1979.
- [429] MENSCHKOWSKI, H. *Probleme des Unendlichen*. Braunschweig: Vieweg, 1967.
- [430] METROPOLIS, N., STEIN, M. L. & STEIN, P. R. On finite limit sets for transformations on the unit interval. *J. of Combinatorial Theory*. 1973, A15, 25–44.
- [431] MINKOWSKI, H. Über die Begriffe Länge. Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*. 1901, 9, 115–121. (См. также в [432], 2, 122–127.)
- [432] MINKOWSKI, H. *Gesammelte Abhandlungen*. 1911 (Chelsea reprint).
- [433] MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. On the laws of small scale turbulent flow of liquids and gases. *Russian Mathematical Surveys*. 1963, 18, 89–109 (перевод с русского).
- [434] MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. *Statistical fluid mechanics*, (в 2-х томах). Cambridge, Ma.: MIT Press, 1971, 1975 (перевод с русского).
- [435] MOORE, E. H. On certain crinkly curves. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1900, 1, 72–90.
- [436] MORI, H. Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics*. 1980, 63, 1044–1047.
- [437] MORI, H. & FUJISAKA, H. Statistical dynamics of chaotic flows. *Progress of Theoretical Physics*. 1980, 63, 1931–1944.
- [438] MUNITZ, M. K. (Ed.) *Theories of the universe*. Glencoe, Il.: The Free Press, 1957.
- [439] MURRAY, C. D. A relationship between circumference and weight in trees. *J. of General Physiology*. 1927, IV, 725–729.
- [440] MYRBERG, P. J. Sur l'itération des polynomes réels quadratiques. *J. de Mathématiques pures et appliquées*. 1962, 9(41), 339–351.
- [441] NELSON, E. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. *Physical Review*. 1966, 150, 1079–1085.
- [442] NELSON, E. *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton: Princeton University Press, 1967.
- [443] NEUENSCHWANDER, E. Der Nachlass von Casorati (1835–1890) in Pavia. *Archive for History of Exact Sciences*. 1978, 19, 1–89.
- [444] NEWMAN, J. R. *The world of mathematics*. New York: Simon & Schuster, 1956.
- [445] NORTH, J. D. *The measure of the universe*. Oxford: Clarendon Press, 1965.
- [446] NOVIKOV, E. A. Variation in the dissipation of energy in a turbulent flow and the spectral distribution of energy. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1963, 27, 944–946 (перевод, 1445–1450).

- [447] NOVIKOV, E. A. On correlations of higher order in turbulent motion (на русском языке). *Fisika Atmosfery i Okeana*. 1965, 1, 788–796.
- [448] NOVIKOV, E. A. On the spectrum of fluctuations in turbulent motion (на русском языке). *Fisika Atmosfery i Okeana*. 1965, 1, 992–993.
- [449] NOVIKOV, E. A. Mathematical model of the intermittency turbulent motion (на русском языке). *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1966, 168, 1279–1282.
- [450] NOVIKOV, E. A. Intermittency and scale similarity in the structure of a turbulent flow. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1971, 35, 266–277 (перевод на английский в *P. M. M. Applied Mathematics and Mechanics*).
- [451] NOVIKOV, E. A. & STEWART, R. W. Intermittency of turbulence and the spectrum of fluctuations of energy dissipation (на русском языке). *Izvestia Akademii Nauk SSSR; Seria Geofizicheskaja*. 1964, 3, 408–413.
- [452] NYE, M. J. *Molecular reality. A perspective on the scientific work of Jean Perrin*. London: Macdonald, New York: American Elsevier, 1972.
- [453] OBUKHOV, A. M. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N. S.)*. 1941, 32, 22–24.
- [454] OBUKHOV, A. M. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. of Fluid Mechanics*. 1962, 13, 77–81. (Также в *J. of Geophysical Research*. 1962, 67, 3011–3014.)
- [455] OLBERS, W. Über die Durchsichtigkeit des Weltraums. *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1823 nebst einer Sammlung der neuesten in die astronomischen Wissenschaften einschlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten*, 150, 110–121. Berlin: C. F. E. Späthen, 1823.
- [456] OLDHAM, K. B. & SPANIER, J. *The fractional calculus*. New York: Academic, 1974.
- [457] OREY, S. Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level crossings. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1970, 15, 249–256.
- [458] OSGOOD, W. F. A Jordan curve of positive area. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1903, 4, 107–112.
- [459] PAINLEVÉ, P. Leçon d'ouverture faite en présence de Sa Majesté le Roi de Suède et de Norwége, 1895. (Впервые напечатано в [460], 1, 200–204.)
- [460] PAINLEVÉ, P. *Oeuvres de Paul Painlevé*. Paris: Editions du CNRS, 1972– .
- [461] PALEY, R. E. A. C. & WIENER, N. *Fourier transforms in the complex domain*. New York: American Mathematical Society, 1934.
- [462] PARETO, V. *Cours d'économie politique*, 1896. Переиздан в 1965 году в составе собрания *Oeuvres complètes*. Geneva: Droz, 1965.
- [463] PARTRIDGE, E. *Origins*. New York: Macmillan, 1958.
- [464] PAUMGARTNER, D. & WEIBEL, E. Resolution effects on the stereological estimation of surface and volume and its interpretation in terms of fractal dimension. *J. of Microscopy*. 1979, 121, 51–63.
- [465] PEANO, G. Sur une courbe, qui remplit une aire plane. *Mathematische Annalen*. 1890, 36, 157–160. (Перевод на английский в [466].)

- [466] PEANO, G. *Selected works*. Ed. H. C. Kennedy. Toronto University Press, 1973.
- [467] PEEBLES, P.J.E. *The large-scale structure of the universe*. Princeton: Princeton University Press, 1980.
- [468] PERRIN, J. La discontinuité de la matière. *Revue du Mois*. 1906, 1, 323–344.
- [469] PERRIN, J. Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Annales de chimie et de physique*. 1909, VIII 18, 5–114. (Английский перевод Ф. Содди: *Brownian Movement and Molecular Reality*. London: Taylor & Francis.)
- [470] PERRIN, J. *Les Atomes*. Paris: Alcan, 1913. (Из последующих изданий следует упомянуть выпущенный в 1970 году издательством Gallimard репринт, лучше других выдержавший испытание временем. Английский перевод Д. Л. Хэммика: *Atoms*. London: Constable, New York: Van Nostrand. Книга также переведена на немецкий, польский, русский, сербский и японский языки.)
- [471] PETERSON, B. A. The distribution of galaxies in relation to their formation and evolution. *The formation and dynamics of galaxies*. Ed. J. R. Shakeshaft (IAU Symposium 58), 75–84. Boston: Reidel, 1974.
- [472] PEYRIÈRE, J. Turbulence et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus (Paris)*. 1974, 278A, 567–569.
- [473] PEYRIÈRE, J. Sur les colliers aléatoires de B. Mandelbrot. *Comptes Rendus (Paris)*. 1978, 286A, 937–939.
- [474] PEYRIÈRE, J. Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction, 1979. (Распространялась частным образом.)
- [475] PEYRIÈRE, J. Processus de naissance avec interaction des voisins. Evolution de graphes. *Annales de l'Institut Fourier*. 1981, 31, 187–218.
- [476] POINCARÉ, H. *Calcul des probabilités* (2-е издание — 1912 г.). Paris: Gauthier-Villars, 1890.
- [477] POINCARÉ, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris: Gauthier-Villars, 1892. (Имеется русский перевод: Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики*. // А. Пуанкаре. Избранные труды в 3-х томах. М.: Наука, 1971–1974 (т. 1, 2).
- [478] POINCARÉ, H. *La valeur de la science*. Paris: Flammarion, 1905. (Перевод на англ. Дж. Б. Холстеда.)
- [479] POINCARÉ, H. *Dernières pensées*. Paris: Flammarion, 1913.
- [480] POINCARÉ, H. *Oeuvres de Henri Poincaré*. Paris: Gauthier-Villars, 1916– .
- [481] PONTRJAGIN, L. & SCHNIRELMAN, L. Sur une propriété métrique de la dimension. *Annals of Mathematics*. 1932, 33, 156–162.
- [482] PRUITT, W.E. Some dimension results for processes with independent increments. *Stochastic Processes and Related Topics*, 1, 133–165. Ed. M. L. Puri. New York: Academic, 1975.
- [483] PRUITT, W.E. The Hausdorff dimension of the range of a process with stationary independent increments. *J. of Mathematics and Mechanics*. 1979, 19, 371–378.

- [484] PRUITT, W.E. & TAYLOR, S.J. Sample path properties of processes with stable components. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1969, 12, 267–289.
- [485] QUEFFELEC, H. Dérivabilité de certaines sommes de séries de Fourier lacunaires. (Thèse de 3e Cycle de Mathématiques.) Orsay: Université de Paris-Sud, 1977.
- [486] RALL, W. Branching dendritic trees and motoneuron membrane resistivity. *Experimental Neurology*. 1959, 1, 491–527.
- [487] RAYLEIGH, LORD. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and arbitrary phase. *Philosophical Magazine*. 1880, 10, 73. (Также в [488], 1, 491–.)
- [488] RAYLEIGH, LORD. *Scientific papers*. Cambridge: Cambridge University Press, 1899 (Dover reprint).
- [489] RÉNYI, A. On a new axiomatic theory of probability. *Acta Mathematica Hungarica*. 1955, 6, 285–335.
- [490] RICHARDSON, L.F. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press, 1922. (В переиздании, осуществленном издательством Dover в 1965 году, имеется предисловие Дж. Чэпмена, включающее биографию Ричардсона.)
- [491] RICHARDSON, L.F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Pr. of the Royal Society of London*. 1926, A, 110, 709–737.
- [492] RICHARDSON, L.F. *Arms and insecurity: a mathematical study of the causes and origins of war*. Ed. N. Rashevsky & E. Trucco. Pacific Grove, Ca.: Boxwood Press, 1960.
- [493] RICHARDSON, L.F. *Statistics of deadly quarrels*. Ed. Q. Wright & C. C. Lienau. Pacific Grove, Ca.: Boxwood Press, 1960.
- [494] RICHARDSON, L.F. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook*. 1961, 6, 139–187.
- [495] RICHARDSON, L.F. & STOMMEL, H. Note on eddy diffusion in the sea. *J. of Meteorology*. 1948, 5, 238–240.
- [496] ROACH, F.E. & GORDON, J.L. *The light of the night sky*. Boston: Reidel, 1973.
- [497] ROGERS, C.A. *Hausdorff measures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
- [498] ROLL, R. *Behavior of interest rates: the application of the efficient market model to U.S. treasury bills*. New York: Basic Books, 1970.
- [499] ROSE, N.J. The Pascal triangle and Sierpinski's tree. *Mathematical Calendar 1981*. Raleigh, NC: Rome Press, 1981.
- [500] ROSEN, E. *Kepler's conversation with Galileo's siderial messenger*. New York: Johnson Reprint, 1965.
- [501] ROSENBLATT, M. Independence and dependence. *Proc. 4th Berkeley Symposium. Mathematical Statistics and Probability*, 441–443. Berkeley: University of California Press, 1961.

- [502] ROSENBLATT, M. & VAN ATTA, C. (Eds.) *Statistical models and turbulence*. Lecture Notes in Physics, 12. New York: Springer, 1972.
- [503] ROSS, B. (Ed.) *Fractional calculus and its applications*. Lecture Notes in Mathematics 12. New York: Springer, 1975.
- [504] RUELLE, D. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence. В книге [502], 292–299.
- [505] RUELLE, D. & TAKENS, F. On the nature of turbulence. *Communications on Mathematical Physics*. 1971, 20, 167–192 & 23, 343–344.
- [506] RUSSELL, B. *An essay on the foundations of geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1897 (Dover reprint).
- [507] SAFFMAN, P.G. Lectures on homogeneous turbulence. *Topics in Nonlinear Physics*. Ed. N. J. Zabusky. New York: Springer, 1968.
- [508] SALEM, R. & ZYGMUND, A. Lacunary power series and Peano curves. *Duke Mathematical J.* 1945, 12, 569–578.
- [509] SAYLES, R.S. & THOMAS, T.R. Surface topography as a nonstationary random process. *Nature*. 1978, 271, 431–434 & 273, 573.
- [510] SCHEFFER, V. Equations de Navier–Stokes et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus (Paris)*. 1976, 282A, 121–122.
- [511] SCHEFFER, V. Partial regularity of solutions to the Navier–Stokes equation. *Pacific J. of Mathematics*.
- [512] SCHMIDT-NIELSEN, 1981.
- [513] SCHÖNBERG, I.J. On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding on Hilbert space. *Annals of Mathematics*. 1937, 38, 787–793.
- [514] SCHÖNBERG, I.J. Metric spaces and positive definite functions. *Tr. of the American Mathematical Society*. 1938, 44, 522–536.
- [515] SCHÖNBERG, I.J. Metric spaces and completely monotone functions. *Annals of Mathematics*. 1938, 39, 811–841.
- [516] SELETY, F. Beiträge zum kosmologischen Problem. *Annalen der Physik*. 1922, IV, 68, 281–334.
- [517] SELETY, F. Une distribution des masses avec une densité moyenne nulle, sans centre de gravité. *Comptes Rendus (Paris)*. 1923, 177, 104–106.
- [518] SELETY, F. Possibilité d'un potentiel infini, et d'une vitesse moyenne de toutes les étoiles égale a celle de la lumière. *Comptes Rendus (Paris)*. 1923, 177, 250–252.
- [519] SELETY, F. Unendlichkeit des Raumes und allgemeine Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*. 1924, IV, 73, 291–325.
- [520] SHANTE, V.K. & KIRKPATRICK, S. An introduction to percolation theory. *Advances in Physics*. 1971, 20, 325–357.
- [521] SHEPP, I. A. Covering the circle with random arcs. *Israel J. of Mathematics*. 1972, 11, 328–345.



- [522] SIERPÍNSKI, W. Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes Rendus* (Paris). 1915, 160, 302. (Более полная версия опубликована в [524], II, 99–106.)
- [523] SIERPÍNSKI, W. Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. *Comptes Rendus* (Paris). 1916, 162, 629. (Более полная версия опубликована в [524], II, 107–119.)
- [524] SIERPÍNSKI, W. *Oeuvres choisies*. Ed. S. Hartman et al. Warsaw: Éditions scientifiques, 1974–.
- [525] SINAI, J.A. G. Self-similar probability distributions. *Theory of Probability and Its Applications*. 1976, 21, 64–80.
- [526] SINGH, A.N. *The theory and construction of nondifferentiable functions*. Lucknow (India): The University Press, 1935. Также в *Squaring the Circle and Other Monographs*. Ed. E. W. Hobson, H. P. Hudson, A. N. Singh & A. B. Kempe. New York: Chelsea, 1953.
- [527] SMALE, S. Dynamical systems and turbulence. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977*. Ed. P. Bernard & T. Ratiu, *Lecture Notes in Mathematics*. 615, 48–70. New York: Springer, 1977.
- [528] SMITH, A. The differentiability of Riemann's function. *Pr. of the American Mathematical Society*. 1972, 34, 463–468.
- [529] SMITH, H. J. S. *Collected mathematical papers*. 1894 (Chelsea reprint).
- [530] SMYTHE, R. T. & WIERMANN, J. C. (Eds.) *First-passage percolation on the square lattice*. *Lecture Notes in Mathematics*, 671. New York: Springer, 1978.
- [531] SODERBLOM, L. A. The Galilean moons of Jupiter. *Scientific American*. 1980, 242, 88–100.
- [532] SOLER, J. Sémiotique de la nourriture dans la Bible. *Annales: Economies, Sociétés, Civilisations*. 1973. Перевод на англ.: The dietary prohibitions of the Hebrews. *The New York Review of Books*, 14 июня 1979 года, а также в сборнике *Food and Drink in History*. Ed. R. Foster & O. Ranum. Baltimore: John Hopkins University Press.
- [533] STANLEY, H. E. Cluster shapes at the percolation threshold: an effective cluster dimensionality and its connection with critical-point phenomena. *J. of Physics*. 1977, A10, L211–L220.
- [534] STANLEY, H. E., BIRGENEAU, R. J., REYNOLDS, P. J. & NICOLL, J. F. Thermally driven phase transitions near the percolation threshold in two dimensions. *J. of Physics*. 1976, C9, L553–L560.
- [535] STAPLETON, H. J., ALLEN, J. P., FLYNN, C. P., STINSON, D. G. & KURTZ, S. R. Fractal form of proteins. *Physical Review Letters*. 1980, 45, 1456–1459. (См. также [6].)
- [536] STAUFFER, D. Scaling theory of percolation clusters. *Physics Reports*. 1979, 34, 1–74.
- [537] STAUFFER, D. 1980.
- [538] STEIN, P. R. & ULAM, S. Non-linear transformation studies on electronic computers. *Rozprawy Matematyczne*. 1964, 39, 1–66. См. также в [570].

- [539] STEINHAUS, H. Length, shape and area. *Colloquium Mathematicum*. 1954, 3, 1–13.
- [540] STENT, G. Prematurity and uniqueness in scientific discovery. *Scientific American*. 1972, 227 (December), 84–93.
- [541] STEVENSON, B. *The home book of quotations* (8-е изд.). New York: Dodd–Mead, 1956.
- [542] STONE, E. C. & MINEN, E. D. Voyager I Encounter with the Saturnian system. *Science*. 1981, 212, обложка & 159–163.
- [543] STRAHLER, A. N. Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography. *Geological Society of America Bulletin*. 1952, 63, 1117–1142.
- [544] STRAHLER, A. N. Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks. В сборнике *Handbook of Applied Hydrology*, sect. 4–11. Ed. V. T. Chow. New York: McGraw-Hill, 1964.
- [545] SULLIVAN, D. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications Mathematiques*. 1979, 50.
- [546] SUWA, N. & TAKAHASHI, T. *Morphological and morphometrical analysis of circulation in hypertension and ischemic kidney*. Munich: Urban & Schwarzenberg, 1971.
- [547] SUWA, N., NIWA, T., FUKASAWA, H. & SASAKI, Y. Estimation of intravascular blood pressure gradient by mathematical analysis of arterial casts. *Tohoku J. of Experimental Medicine*. 1963, 79, 168–198.
- [548] SUZUKI, M. Extension of the concept of dimension — phase transitions and fractals. *Suri Kagaku (Mathematical Sciences)*. 1981, 221, 13–20.
- [549] SWIFT, J. On Poetry, a Rhapsody (1733).
- [550] TAQQU, M. S. Note on evaluation of  $R/S$  for fractional noises and geophysical records. *Water Resources Research*. 1970, 6, 349–350.
- [551] TAQQU, M. S. Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1975, 31, 287–302.
- [552] TAQQU, M. S. Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of the Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1977, 40, 203–238.
- [553] TAQQU, M. S. A representation for self-similar processes. *Stochastic Processes and their Applications*. 1978, 7, 55–64.
- [554] TAQQU, M. S. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1979, 50, 53–83.
- [555] TAQQU, M. S. Self-similar processes and related ultraviolet and infrared catastrophes. *Random Fields: Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Amsterdam: North Holland, 1979.
- [556] TAYLOR, G. I. Statistical theory of turbulence; parts I to IV. *Pr. of the Royal Society of London*. 1935, A151, 421–478. Репринт в [155], с. 18–51.
- [557] TAYLOR, G. I. Some early ideas about turbulence. *J. of Fluid Mechanics*. 1970, 41, 3–11.

- [558] TAYLOR, S.J. The  $\alpha$ -dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society*. 1955, 51, 265–274.
- [559] TAYLOR, S.J. On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society*. 1961, 57, 524–531.
- [560] TAYLOR, S.J. The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society*. 1964, 60, 253–258.
- [561] TAYLOR, S.J. Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1966, 5, 247–264.
- [562] TAYLOR, S.J. Sample path properties of a transient stable process. *J. of Mathematics and Mechanics*. 1967, 16, 1229–1246.
- [563] TAYLOR, S.J. Sample path properties of processes with stationary independent increments. *Stochastic Analysis*. Ed. D.G. Kendall & E.F. Harding. New York: Wiley, 1973.
- [564] TAYLOR, S.J. & WENDEL, J.C. The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*. 1966, 6, 170–180.
- [565] TENNEKES, H. Simple model for the small scale structure of turbulence. *Physics of Fluids*. 1968, 11, 669–672.
- [566] TESNIÉRE, M. Fréquences des noms de famille. *J. de la Société de Statistique de Paris*. 1975, 116, 24–32.
- [567] THOMA, R. Über den Verzweigungsmodus der Arterien. *Archiv der Entwicklungsmechanik*. 1901, 12, 352–413.
- [568] THOMPSON, D'A.W. *On growth and form*. Cambridge: Cambridge University Press, 1917 - 1942 - 1961. (Даты относятся к первому, второму и сокращенному изданиям соответственно.)
- [569] ULAM, S.M. Infinite models in physics. *Applied Probability*. New York: McGraw–Hill, 1957. 350–358. (См. также [570].)
- [570] ULAM, S.M. *Sets, numbers and universes: selected works*. Ed. W.A. Beyer, J. Mycielski, G.–C. Rota. Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1974.
- [571] URYSOHN, P. Mémoire sur les multiplicités cantorienne. II: les lignes cantorienne. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*. (Eerste Sectie) XIII, no. 4, 1927.
- [572] VAN DER WAERDEN, B. L. *Die Pythagoreer*, 1979.
- [573] VILENKIN, N. YA. *Stories about sets*. New York: Academic, 1965.
- [574] VON KOCH, H. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*. 1904, 1, 681–704.
- [575] VON KOCH, H. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica*. 1906, 30, 145–174.

- [576] VON NEUMANN, J. Recent theories of turbulence. 1949 (report to ONR). Также в [577], 6, 437–472 (1963).
- [577] VON NEUMANN, J. *Collected works*. Ed. A. H. Traub. New York: Pergamon, 1961– .
- [578] VON SCHWEIDLER, E. Studien über die Anomalien in Verhalten der Dielektrika. *Annalen der Physik*. 1907, 4 (24), 711–770.
- [579] VON WEIZSÄCKER, C.F. Turbulence in interstellar matter. *Problems of Cosmical Aerodynamics* (IUTAM & IAU). Dayton: Central Air Documents Office, 1950.
- [580] VOSS, R. F. & CLARKE, J. « $1/f$  noise» in music and speech. *Nature*. 1975, 258, 317–318.
- [581] VOSS, R. F.  $1/f$  noise in music; music from  $1/f$  noise. *J. of the Acoustical Society of America*. 1978, 63, 258–263.
- [582] VOSS, R. F. Fourier synthesis of Gaussian fractals:  $1/f$  noises, landscapes, and flakes. 1982.
- [583] WALLENQUIST, A. On the space distribution of galaxies in clusters. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1957, 2, 103–118.
- [584] WALSH, J. L. Another contribution to the rapidly growing literature of mathematics and human behavior. *Scientific American*. 1949 (августовский выпуск), 56–58.
- [585] WEIBEL, E. R. *Morphometry of the human lung*. New York: Academic, 1963.
- [586] WEIBEL, E. R. *Stereological methods*. В 2-х томах. London: Academic, 1979.
- [587] WEIERSTRASS, K. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. 1872 (Опубликовано только в [588], II, 71–74.)
- [588] WEIERSTRASS, K. *Mathematische Werke*. Berlin: Mayer & Müller, 1895– .
- [589] WEYL, H. Bemerkungen zum begriff der differentialquotienten gebrochener ordnung. *Vierteljahrsschrift der Naturforscher Geselschaft in Zürich*. 1917, 62, 296–302.
- [590] WEYL, H. 1952.
- [591] WHITTAKER, E. T. *A history of the theories of aether and electricity*. New York: Philosophical Library, 1953.
- [592] WHYBURN, G. T. Topological characterization of the Sierpiński. *Fundamenta Mathematicae*. 1958, 45, 320–324.
- [593] WIENER, N. *Cybernetics*. Paris: Hermann, New York: Wiley, 1948 (1-е издание), Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1961 (2-е издание).
- [594] WIENER, N. *Ex-prodigy*. New York: Simon & Schuster, Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1953.
- [595] WIENER, N. *I am a mathematician*. Garden City, NY: Doubleday, Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1956.
- [596] WIENER, N. *Selected Papers*. Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1964.
- [597] WIENER, N. *Collected Works*. Ed. P. Masani. Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, 1976.

- [598] WIGNER, E. P. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1960, 13, 1–14. См. также в [599].
- [599] WIGNER, E. P. *Symmetries and reflections*. Indiana University Press. MIT Press Paperback. 1967.
- [600] WILLIS, J. C. *Age and area*. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- [601] WILSON, A. G. *Olbers' paradox and cosmology*. Los Angeles: Astronomical Society, 1965.
- [602] WILSON, A. G. Hierarchical structures in the cosmos. *Hierarchical Structures*, 113–134. Ed. L. L. Whyte, A. G. Wilson & D. Wilson. New York: American Elsevier, 1969.
- [603] WILSON, K. The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem. *Reviews of Modern Physics*. 1975, 47, 773–840.
- [604] WILSON, K. G. Problems in physics with many scales of length. *Scientific American*. 1979, 241 (августовский выпуск), 158–179.
- [605] WILSON, J. T. (Ed.) *Continents adrift*. Readings from *Scientific American*. San Francisco: W. H. Freeman, 1972.
- [606] WILSON, T. A. Design of the bronchial tree. *Nature*. 1967, 213, 668–669.
- [607] WOLF, D. (Ed.) *Noise in physical systems*, (Bad Neuheim Conference). New York: Springer, 1978.
- [608] YAGLOM, A. M. Some classes of random fields in  $n$ -dimensional space, related to stationary random processes. *Theory of Probability and Its Applications*. 1957, 2, 273–320. (Перевод с рус. R. A. Silverman.)
- [609] YAGLOM, A. M. The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertia interval. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1966, 16, 49–52. (Перевод на английский в *Soviet Physics Doklady*. 1966, 2, 26–29.)
- [610] YODER, L. Variation of multiparameter Brownian motion. *Pr. of the American Mathematical Society*. 1974, 46, 302–309.
- [611] YODER, L. The Hausdorff dimensions of the graph and range of  $N$ -parameter Brownian motion in  $d$ -space. *Annals of Probability*. 1975, 3, 169–171.
- [612] YOUNG, W. H. & YOUNG, G. C. *The theory of sets of points*. Cambridge: Cambridge University Press, 1906.
- [613] YULE, G. UDNY. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F. R. *Philosophical Tr. of the Royal Society (London)*. 1924, 213 B, 21–78.
- [614] ZIMMERMAN, M. H. Hydraulic architecture of some diffuse-porous trees. *Canadian J. of Botany*. 1978, 56, 2286–2295.
- [615] ZIPF, G. K. *Human behavior and the principle of least-effort*. Cambridge, Ma.: Addison-Wesley, 1967 (репринт издания 1949 года, Hefner).
- [616] ZYGMUND, A. *Trigonometric series*. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

## Дополнительная литература

- [617] ALEXANDER, S. & ORBACH, R. Density of states on fractals: «fractons». *Journal de Physique Lettres*. 1982, 43, 625– .
- [618] \*AGTENBERG, F.P. Recent developments in geomathematics. *Geo-processing*. 1982, 2.
- [619] ANDREWS, D.J. A stochastic fault model. I. Static case, II. Time-dependent case. *Journal of Geophysical Research*. 1980, 85B, 3867–3877 & 1981, 86B, 10821–10834.
- [620] \*BLEI, R. Combinatorial dimension: a continuous parameter. *Symposia Mathematica* (Italia), 1983.
- [621] BURKS, A. W. (Ed.) *Essays on Cellular Automata*. Urbana, Ill.: University of Illinois Press, 1970.
- [622] \*BURROUGH, P.A. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature*. 1981, 294, 240–242.
- [623] \*CANNON, J.W. Topological, combinatorial and geometric fractals. *The 31st Earle Raymond Hedrick Lectures of the Mathematical Association of America*, 1982 (представлено на встрече в Торонто).
- [624] CHORIN, A. The evolution of a turbulent vortex. *Communication in Mathematical Physics*. 1982, 83, 517–535.
- [625] CHORIN, A. Numerical estimates of Hausdorff dimension. *Journal of Computational Physics*. 1982, 46.
- [626] \*DEKKING, F.M. Recurrent sets. *Advances in Mathematics*. 1982, 44, 78–104.
- [627] DOUADY, A. 1983
- [628] DOUADY, A. & HUBBARD, J.H. Itération des polynômes quadratiques complexes. *Comptes Rendus* (Paris). 1982, 294, 123–126.
- [629] GEFEN, Y., AHARONY, A. & MANDELBROT, B. Phase transitions on fractals: I. Quasi-linear lattices. *Journal of Physics A*. 1983.
- [630] GEFEN, Y., MEIR, Y., MANDELBROT, B. & AHARONY, A. Geometric implementation of hypercubic lattices with noninteger dimensionality, using low lacunarity fractal lattices. 1983.
- [631] \*GILBERT, W. T. Fractal geometry derived from complex bases. *Mathematical Intelligencer*. 1982, 4, 78–86.
- [632] \*HATLEE, M. D. & KOZAK, J.J. Stochastic flows in integral and fractal dimensions and morphogenesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. 1981, 78, 972–975.
- [633] HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. Intermittence exponent in fractally homogeneous turbulence. *Physical Review Letters*. 1982, 49, 1158–1161.
- [634] \*HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. *Physical Review A*. 1983.
- [635] \*HUGHES, B.D., MONTROLL, E.W. & SHLESINGER, M.F. Fractal random walks. *Journal of Statistical Physics*. 1982, 28, 111–126.

- [636] \*KAC, M. Recollections concerning Peano curves and statistical independence. *Probability, Number Theory and Statistical Physics (Selected Papers)*. Cambridge, Ma.: M. I. T. Press, IX–XIII.
- [637] KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF, L. Statistical study of the occurrence of shallow earthquakes. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 1978, 55, 67–86.
- [638] KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF, L. Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 1980, 62, 303–320.
- [639] KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF, L. Stochastic synthesis of earthquake catalogs. *Journal of Geophysical Research*. 1981, 86B, 2853–2862.
- [640] \*KAHANE, J.P. Mesures et dimensions. *Turbulence and Navier–Stokes Equations* (Ed. R. Temam) Lecture Notes in Mathematics, 565, 94–103. New York: Springer, 1976.
- [641] KAPITULNIK, A. & DEUTSCHER, G. Percolation characteristics in discontinuous thin films of Pb. *Physical Review Letters*. 1982, 49, 1444–1448.
- [642] KAPITULNIK, A., AHARONY, A., DEUTSCHER, G. & STAUFFER, D. Self-similarity and correlation in percolation. 1983.
- [643] \*KAYE, B.H. Fractal description of fineparticle systems. *Modern Methods in Fineparticle Characterization* (Ed. J.K. Beddow). Boca Raton, Fl.: CRC Press, 1983.
- [644] LE MEHAUTÉ, A. & CREPY, G. Sur quelques propriétés de transferts électrochimiques en géométrie fractale. *Comptes Rendus* (Paris). 1982, 294-II, 685–688.
- [645] LE MEHAUTÉ, A., DE GUIBERT, A., DELAYE, M. & FILIPPI, C. Note d'introduction de la cinétique des échanges d'énergies et de matières sur les interfaces fractales. *Comptes Rendus* (Paris). 1982, 294-II, 835–838.
- [646] LOVEJOY, S. *Preprints*, 20th Conference on Radar Meteorology. A. M. S., Boston, 1981, 476–.
- [647] \*LOVEJOY, S. & SCHERTZER, D. Buoyancy, shear, scaling and fractals. *Sixth Symposium on Atmospheric and Oceanic Waves and Stability* (Boston), 1983.
- [648] LOVEJOY, S. & MANDELBROT, B. B. 1983.
- [649] \*MANDELBROT, B. B. Comments on computer rendering of fractal stochastic models. *Communications of the Association for Computing Machinery*. 1982, 25, 581–583.
- [650] MANDELBROT, B. B. On the quadratic mapping  $z \rightarrow z^2 - \mu$  for complex  $\mu$  and  $z$ : the fractal structure of its  $\mathcal{M}$  set, and scaling. *Order in Chaos* (Ed. D. Campbell) and *Physica D*. 1983.
- [651] MANDELBROT, B. B. & NORTON, V. A. 1983.
- [652] MANDELBROT, B. B., PASSOJA, D. & PAULLAY, A. 1983.
- [653] \*MENDÉS-FRANCE, M. & TENENBAUM, G. Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin–Shapiro. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. 1981, 109, 207–215.

- [654] \*MONTROLL, E. W. & SHLESINGER, M. F. On  $1/f$  noise and other distributions with long tails. *Proceedings of the National Academy of Science of the USA*. 1982, 79, 3380–3383.
- [655] NORTON, V. A. Generation and display of geometric fractals in 3-D. *Computer graphics*. 1982, 16, 61–67.
- [656] RAMMAL, R. & TOULOUSE, G. Spectrum of the Schrödinger equation on a self-similar structure. *Physical Review Letters*. 1982, 49, 1194–1197.
- [657] RAMMAL, R. & TOULOUSE, G. Random walks on fractal structures and percolation clusters. 1983 (препринт).
- [658] \*ROTHROCK, D. A. & THORNDIKE, A. S. Geometric properties of the underside of sea ice. *Journal of Geophysical Research*. 1980, 85C, 3955–3963.
- [659] RUELLE, D. Analytic repellers. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. 1982.
- [660] \*SERRA, J. *Image analysis and Mathematical Morphology*. New York, Academic, 1982.
- [661] \*SHLESINGER, M. F. & HUGHES, B. D. Analogs of renormalization group transformations in random processes. *Physica*. 1981, 109A, 597–608.
- [662] STEIN, K. *Omni*. 1983 (февральский выпуск).
- [663] STEPHEN, M. J. Magnetic susceptibility of percolating clusters. *Physics Letters*. 1981, A87, 67–68.
- [664] \*STEVENS, R. J., LEMAR, A. F. & PRESTON, F. H. Manipulation and presentation of multidimensional image data using the Peano scan.
- [665] \*SUZUKI, M. *Phase transitions and fractals* (на японском языке). *Suri Kagaku*. 1981, 221, 13–20.
- [666] \*TRICOT, C. Douze définitions de la densité logarithmique. *Comptes Rendus* (Paris). 1981, 2931, 549–552.
- [667] VICHNIAC, G. 1983.
- [668] VOSS, R. F., LAIBOWITZ, R. B. & ALESSANDRINI, E. I. Fractal (scaling) clusters in thin gold films near the percolation threshold. *Physical Review Letters*. 1982, 49, 1441–1444.
- [669] WILLSON, S. J. Cellular automata can generate fractals. 1982 (препринт).
- [670] WOLFRAM, S. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*. 1983



## Предметный указатель<sup>1</sup>

- Агглютинация пыли, 138  
Адамар, Ж., 551, 574  
Алгебра, 18  
Александр, С., 459, 462  
Аллометрия, 483  
Алмазы, 140  
Альвеолы (легких), 167  
Анализ размерностей, 160  
— стандартных, 160  
Анатомия, 165, 167, 214, 215, 225, 229, 231, 235, 236  
Анатомия легких, 167, 225  
Антиперсистентность, 350, 354, 487  
Аполлониевы сеть, салфетка, упаковка\*, 242, 252  
Артерии и вены, 214  
Аттракторы, 571  
Аффинность, 332, 355, 482, 483  
Ахарони, А., 192, 201, 619
- Бактерии-мутагты, 510  
Банд, В., 164  
Башелье, Л., 459, 483, 543, 551  
Безикович, А. С., 17, 31, 496, 500, 503, 516, 540  
Безиковича, взвешенное створаживание, 522  
«Белые вороны», 543  
Бентли, Р., 20  
Бентли, Р. У., 137  
Бергер, Дж. М., 113, 301, 391, 392, 394  
Берег-генератор, 171  
Береговая линия, 457  
— Брегани и Британии, 21, 46, 284  
— шестисквиговая\*, 324  
Бернулли перколяция, 184, 306  
Бериулли, И., 561
- Берри, М. В., 449, 540, 619  
Бесконечность (расходимость), 36  
— дисперсии изменений цен, 464  
— количества островов, 174  
— количества точек ветвления, 191  
Бийл, А., 164  
Биллиингсли, П., 500  
Биркгоф, Дж., 157, 160, 388, 586, 619  
Бишоп, Дж. Дж., 189  
Блохи, 556, 562  
Блюменталь, Л. М., 199, 207  
Бойд, Д. У., 246, 496, 497  
Больцано, Б., 17, 582  
Больцман, Л., 577  
Борель, Э., 133  
Бохнер, С., 404  
Брауэр, Л. Э. Я., 31, 569, 570  
Бродман, К., 165  
Бролли, Х., 257  
Броихи, 225, 235, 236  
Броуи, Р., 565  
Броуна – Фурье, ряд, 486  
Паггея, 375  
Броуновские береговые линии, 359, 371, 373  
Броуновские ландшафты, 369–370  
Броуновские множества, 326, 483  
Броуновские оболочки\*, 339, 340  
Броуновские острова, 339, 340, 371, 373  
Броуновские пустоты, 328  
Броуновские сети, 328  
Броуновские фракталы, 326, 483  
Броуновские функция и след, 326, 327  
Броуновский лист, 359  
Броуновский мост, 486

<sup>1</sup>Звездочкой (\*) помечены неологизмы или слова, употребленные автором в нестандартном значении.

- Броуновский рельеф глобальные эффекты, 360  
 — на плоской Земле, 358  
 — на сферической Земле, 362  
 Броуновский след\*, 326, 327, 331  
 Броуновское движение, 14, 21, 23, 27, 326, 402, 565, 566  
 — без самопересечений, 339, 340  
 — дрейфующее, 335  
 — как модель рынка ценных бумаг, 459  
 — как субординанд, 405  
 Броуновское нуль-множество, 331  
 Брэгг, У. Х., 252  
 Булиган, Ж., 51, 494, 570  
 Бурбаки, Н., 561  
 Бьянеме, И., 300, 509  
 Бэтчелор, Дж. К., 148, 150
- Вайбель, Э., 167, 225, 228  
 Валленквист, А., 134  
 Валлис, Дж., 23  
 Ван-дер-Варден, Б. Л., 566, 619  
 Вебер, В., 575  
 Вегенер, А., 362, 363  
 Вейерштрасс, К., 17, 148, 537, 556, 573, 581  
 Веларде, М. Г., 279  
 «Венецианский купец», 214  
 Вены и артерии, 214  
 Верди, Дж., 563  
 Вероятность, критическая (в бернуллиевой перколяции), 185  
 Взвешенное створаживание\*, 522  
 «Видеть — значит верить», 39  
 Виленкин, Н. Я., 23, 90  
 Вимпер, Э., 358  
 Виндвер, 454  
 Винер, Н., 14, 23, 56, 145, 483, 486, 544, 619  
 Венера — Хинчина, ковариантность, 484  
 Винчи, Леонардо да, 144, 224, 229, 233  
 Виртуальные тремы\*, 393  
 Висла, 50  
 Вихри, 84  
 Влияние наблюдателя, 48, 149  
 Вложенность фракталов, 301  
 Внутренняя бесконечность, 70
- Водораздел, 90, 203, 384  
 Вольтерра, В., 566  
 Время, 89  
 вун Каннон, Д., 189  
 Выветривание, 382  
 Выставка чудовищ, 15, 23  
 Выступы и впадины, 145  
 Вязание сетей, 244
- G-длина, 161  
 Галактики (скопления галактик), 407, 419, 420, 430, 519, 520  
 Галлей, Э., 137  
 Галуа, Э., 542  
 Ганголли, Р., 492  
 Гарвей, У., 214  
 Гармонический анализ, 32  
 Гаусс, К. Ф., 542  
 Гёльдера — Липшица, эвристика, 516  
 Гельмгольц, Г., 555  
 Генератор, 299  
 — берег-, 171  
 — канторов, 113  
 — кривой Коха без самопересечений, 60  
 — обратный, 76  
 — ориентация, 76, 101  
 — остров-, 171  
 — прямой, 76  
 — случайный канторов, 299  
 Геометрические иллюстрации, 42  
 Геометрическое искусство, 41  
 Геометрия компьютерная модулярная, 167  
 — неевклидова, 375, 499, 581  
 — полимеров, 319, 453  
 — сосудистой системы, 214  
 Геометрия рек, 232  
 — водораздел, 90  
 — деревья, 90  
 — длина берега, 50  
 — отклонение от прямого течения, 162, 319, 457, 458  
 — ширина, 232  
 Гефен, И., 192, 201, 619  
 Гидрология, 91, 347  
 Гильберт, Д., 582

- Глобальные эффекты в броуновских поверхностях, 360
- Глухие долины\*, 381
- Гнеденко, Б. В., 507
- Гольфстрим, 146
- Гомори, Р. Э., 11, 99
- Горизонт, 364
- Госпер, У., 74, 106, 619
- Гравитация и размерность  $D = 1$  распределения галактик, 125, 134
- Грассбергер, П., 276
- Графическое представление (роль), 41
- Грейзер, М. С., 555
- Гринхилл, Дж., 231
- Гроссман, П., 258, 262
- Грот, Э., 407
- Гроут, Р. А., 228
- Гуревич, В., 31, 500, 569
- Дайсон, Ф. Дж., 15, 42, 138
- Данжуа, А., 574, 575
- Дарбу, Г., 581
- Двойное множество, 115, *см. также* Канторова пыль
- Двойные точки избегание, 65
- неизбежность, 91
- Дворжецкий, А., 504
- Двусторчатая раковина, 263
- де Вис, Х. Й., 140, 520
- де Вокулер, Ж., 128, 137, 297, 429, 520
- де Голль, Ш., 559
- Дедекинд, Р., 30
- де Ла Валле Пуссен, 529
- де Лопиталь, маркиз, 561
- Дельбёф, Ж., 570, 579
- Дельбрюк, М., 510
- Дельта-дисперсия\*, 284, 387
- Дельта-среднее\*, 284
- Демокрит, 562
- де Морган, А., 556
- Депрессия, 467
- Деревья заполняющие пространство, 109–110
- иерархические, 480
- кластеры, 175
- лексикографические, 476
- растительные, 228, 238
- рек, 90, 109–110
- де Шезо, Ж. П. Л., 137
- Джеймс, У., 50
- Джинса, критерий неустойчивости, 133, 527
- Джинса, нестабильность, 133, 527
- Диапазон масштабной инвариантности, 128
- Димотакис, П., 81
- Динамические системы разложимые, 278
- Дирак, П. А. М., 306
- Дисконтинуум, канторов, 115, 119, *см. также* Канторова пыль
- Дисперсия (турбулентная), 84, 85, 146
- Дисперсия изменения цен, 464
- Дитлефсен, О., 344
- Дитрих, Х. К., 11
- Диффузия (излучение вероятности), 547
- Длина истинная, 46
- произвольность, 47
- соотношение между длиной и площадью для речных бассейнов, 161
- шага, 161–162
- Дождь, 164
- Домб, Ч., 184, 453, 454
- Дракон, истощенный, 270
- Драконья линия, 270, 271
- Дробная размерность, 31
- Дробная\* броуновская модель речного стока, 354
- Дробная\* дельта-дисперсия, 350
- Дробное интегро-дифференцирование, 350, 490
- Дробное\* броуновское движение, 346
- Дробные\* броуновские линии уровня, 374
- Дробные\* броуновские плоские следы, 352, 356
- Дробные\* броуновские следы, 352, 356
- Дробные\* броуновские функции, 350
- Дробный\* броуновский рельеф, 363, 364
- Дюбуа-Реймон, П., 17, 581
- Дюплесси, Н., 526
- Евклид, 13, 15, 566

- Единственность, множества единственности, 497, 499
- Емкость в теории потенциала, 529  
— энтропии,  $\ln M(\rho)$ , 496
- Жгуты (межгалактические), 520
- Жевре, М., 544
- Жидкие кристаллы, 252  
— смектическая структура, 252
- Жордан, К., 552
- Жюлиа, кривые, 260
- Задача об  $N$  телах, 407
- Зальцмана – Лоренца, модель, 279
- Заполняющие плоскость контактные кластеры, 178
- Заполняющие плоскость кривые, *см.* Пеано, кривые
- Заполняющие плоскость фрактальные деревья, 109–110
- Заполняющие пространство кривые, *см.* Пеано, кривые
- Затравки, псевдослучайные, 287
- Зона самоподобия, 35, 129
- Зоны перехода, 35
- Иерархическая кластеризация, 293
- Иерархическая речная модель, 355
- Иерархические деревья, 480
- Извилистость, 18, 162  
— рек, 162
- Измерение множественность методов, 46  
— общей глобальной плотности материи, 128  
— произвольность результатов, 47
- Инвариантность при смещении, 35, 292, 437
- Инициатор, 59, 174
- Интуиция, 60, 90, 215
- Иосифа\*, эффект, 347
- Иррегулярность, 67  
— и фрагментированность природы, 67
- Исключение тренда, 486
- Искусство, 15, 42, 344
- Каан, Ж. П., 486, 490, 494, 497, 500, 516, 523
- Какутани, С., 99, 339, 504
- Каллисто, 421
- Кант, И., 563
- Кантор, Г., 15, 17, 30, 39, 115, 562, 563
- Канторов дисконтинуум, 115, *см. также* Канторова пыль
- Канторова лестница (чертова), 124
- Канторова пыль\*, 258, 432, 566
- Канторова размерность Минковского – Булигана, 493
- Канторова чертова лестница, 124
- Канторово множество, *см.* Канторова пыль
- Канторово покрытие, 493
- Канторово пространство, *см.* Канторова пыль
- Канторовы стержень\*, торт, занавесы, 121–122
- Каратеодори, К., 502
- Кармана, дорожки, 144
- Карта Брегани, 21
- Картины старых мастеров, 42
- Касательная (отсутствие), 69
- Каскад восходящий, 116  
— канторов, 115  
— Коха, 59  
— нисходящий, 59  
— Новикова – Стюарта, 152  
— обратный, 116  
— Ричардсона, 51, 84  
— Хойла, 133
- Каснер, Э., 50
- Катастрофа инфракрасная, 539  
— ультрафиолетовая, 539
- Квантовая механика, 335
- Квартет\*, 109
- Кельвин, барон, 577
- Кеплер, И., 137, 527, 548
- Кестен, Х., 453
- Киз, Р. У., 168
- Киркпатрик, С., 184, 189, 192, 201, 618
- Кладбище юных поэтов, 472
- Кларк, Дж., 519
- Кластеризованная пыль\* в пространстве агглютинированная, 138  
— Коши, 403  
— Леви, 402  
— Леви (круговой облет), 415

- Фурнье, 133
- Кластеризованная пыль\* на прямой канторова, 113
- нули случайного блуждания, 336
- Кластеры, критические, 186, 192
- некритические, 188
- Кластеры, контактные\*, 164
- Клейн, Ф., 238
- Клеточные мембраны, 167
- Клубок из нитей, 34
- Колмогоров, А. Н., 36, 84, 145, 150, 152, 153, 156, 157, 388, 487, 490, 496, 507, 544, 586
- Колмогорова, дельта-дисперсия, 153
- показатели  $5/3$  и  $2/3$ , 153
- размерность по Колмогорову и Тихомирову, 496
- спектр, 558
- Кольрауш, Р., 577
- Кольца Сатурна, 122
- Коалесценция микрокапель, 164
- Континуум, каиторов, *см.* Каиторова пыль
- Коразмерность, 504
- Корреляция проекций галактик на небесную сферу, 140, 274, 419
- Коррзии, С., 84, 150, 154
- Корчак, Й., 171, 473
- Кох, Х. фон, 17, 562
- Коха, архипелаг, 170
- Коха, движение, 66
- Коха, дуга, 65
- Коха, кривая, 59
- квадратичная, 79–86
- континент, остров, 171
- кривая Пеано–Коха, 94–107
- обобщение, 86
- рандомизация, 284
- стрела (Серпинского), 204
- троичная, 59
- Коха, пирамида, 201
- Коха, полупрямая, 65
- Коши полет, движение, 403, 404
- устойчивая переменная, 507
- Коши, А., 509
- Кратеры, 418
- луиные, 418, 419
- Кривая дракона, 101
- Хартера–Хейтуэя, 100–101
- двойной дракон\*, 101
- самоквадрируемая\*, 260, 270, 271
- Кривые, 13, 64, *см. также* Кривая дракона, Фрактальные кривые, Кривая Коха
- без касательной, 21, 22, 27
- без самопересечений, 60, 65
- положительной площади, 212
- Критическая размерность, 76
- в бернуллиевой перколяции, 185
- в кривых Коха, 76
- во фрактальной перколяции, 305
- Кронауэр, Р. Э., 231, 232
- Кузанский, Николай, 293
- Куинн, Дж. П., 189
- Кюри, Ж., 577
- Лавджой, А. Д., 562
- Лавджой, С., 164
- Лагранжа, взгляд на турбулентность, 148
- Лайдалл, Х. Ф., 480
- Лакуарность\*, 153, 309
- Ламберт, Г., 137, 548
- Ламиарность (не-турбулентность), 149
- Ламперти, полуустойчивость по, 483, 507
- Лаингбейн, В. Б., 458
- Лаидау, Л. Д., 148
- Ландкоф, Н. С., 527
- Ландшафты броуновские, 369, 370
- озерные, 369, 370
- Лаижевен, П., 552
- Лаплас, П. С. де, 39, 158, 579
- Лафф, М. Р., 11, 618
- Лебег, А., 17, 31, 39, 212, 487, 552, 569, 570
- Лебега–Осгуда, чудовища\*, 212
- Леви, движение\*, в пространстве, 414, 415
- полет\*, 402, 407
- пыль\*, 336, 497
- пыль, как субординатор, 405
- устойчивость по, 402, 497, 506, 513
- чертова лестница, 497, 499, 513

- Леви, П., 61, 359, 392, 393, 398, 399, 466, 483, 484, 492, 497, 503, 507, 510, 513, 543, 546, 551  
 Легкие, 167, 225, 229  
 Лейбниц, Г. В., 36, 243, 350, 561, 570, 579  
 Лейденская банка, 577  
 Лейси, Дж., 233  
 Леонтьев, В., 585  
 Леопольд, Л. Б., 106, 233, 458  
 Лере, Ж., 158  
 Лингвистика, 475  
 Линейка, 67  
 Линии передачи данных, 112  
 Липшица – Гёльдера, эвристика, 516  
 Лиувилля, теорема, 94  
 Лифшиц, Э. М., 148  
 Ллойд, Дж. Э. Р., 562  
 Ллойд, Э. Г., 550, 551  
 Лоренц, Э. Н., 279  
 Лох-несское чудовище, 25  
 Лузин, Н., 39  
 Лукач, Э., 507  
 Лурия, С., 510  
 Льюис, З., 540  
 $\lambda$ -множество (отображение), 268  
  
 Магистраль перколяции, 185  
 Маккенна, Д. М., 618  
 Макмагон, Т. А., 231, 232  
 Максвелл, Дж. К., 355, 577  
 Мамфорд, Д., 254, 619  
 Манифест, 15  
 Маркус, М. Б., 490, 540  
 Мартингал, 459, 461, 462, 546  
 Массивы телескопов, 138  
 Масштабная инвариантность (скейлинг), 35  
 Масштабная инвариантность (скейлинг)), 577–579  
 Межгалактическая среда, 519  
 Мельзак, З. А., 497  
 Менгер, К., 31, 194, 199, 207, 569  
 Менгера, губка\*, 194  
 Мера Каратеодори, 500  
 – Хаусдорфа, 510  
 – зависимость от радиуса ( $M(R)$ ), 66, 119  
  
 Метеориты, 420, 421  
 Метрополис, Н., 262  
 Микрокапли, 164  
 Милл, Э. А., 292  
 Минковский, Г., 51, 56, 494  
 Минковского, покрытие, 493  
 – сосиска, 57  
 Мирберг, П. Дж., 257, 262  
 Миссури, извилистость, 162  
 – ширина, 232  
 Модели (случайные), 284–299  
 Мозговые извилины, 165, 232  
 Монтичиоло, Р., 189  
 Мори, Х., 279  
 Мост, броуновский, 486  
 Музыка, 15, 42, 517  
 Мур, Э. Г., 94  
 Мыло, 252  
 Мэддок, Т., 233  
 $\mu$ -атомы (молекулы), 260  
 $\mu$ -множество (отображение), 267  
 Мюллер, Дж. Э., 162  
 Мюррей, Ч. Д., 225, 226  
  
 Навье – Стокса, уравнения, 156  
 Нагрудник фараона, 282  
 Найт, Ф., 484  
 «*Natura non facit saltus*», 570, 571  
 Небесная механика, 573  
 Небосвод, 136  
 Нейроны, 232  
 Нельсон, Э., 335, 565  
 Неравенство слагаемых, 510  
 Нестационарность, 343  
 Нил, 347, 548, 550  
 Нити (межгалактические), 520  
 Нити, шелковые, 577  
 Новиков, Е. А., 152, 301, 311–314  
 Новикова – Стюарта, каскад, 152  
 Нортон, В. А., 11, 618  
 Нуль-множества броуновская функция, 42, 331, 338  
 – функция Вейерштрасса и родственные ей функции, 540  
 Ньюмен, Дж. Р., 558  
 Ньютон, И., 15, 18  
 Ньютоновское притяжение, 18, 133, 134, 527

- Обезьянье дерево, 54  
Облака, 13, 25, 145, 164  
Облет, круговой, 415  
Обратный генератор, 76  
Обухов, А. М., 150, 152  
Однородность, 35  
— классическая, 152  
— фрактальная\*, 124, 130, 152  
Ожидание обозначение, 284  
— парадоксы, 472  
Озера, 175, 380  
Оккам, У., 30  
Ольберса, парадокс, 136, 153, 527  
Онсагер, Л., 150  
Орей, С., 489, 540  
Ориентация генератора, 76, 101  
Осгуд, У. Ф., 17, 212  
Особенности уравнений, 156  
Острова, 170  
— двойственность определения береговой линии, 171  
— длина береговой линии, 46  
— Коха, квадратичные, 79  
— Коха, троичные, 59  
— ландшафты, 358  
— остров-генератор, 171  
— площади и обобщенный закон Корчака, 171  
— построение в виде нуль-множеств (дробных) броуновских поверхностей, 371, 373  
— прибрежные, вклад в размерность, 170  
— соотношение между площадью и количеством, 170, 171, 177  
— цепочки, 371, 373  
Отсутствие самопересечений броуновского движения, 339, 340  
— кривые Коха, 60, 65  
— многоугольники, 457  
— случайное блуждание, 319, 453  
Ошибки пакеты, 112, 113  
— среднее количество, 118, 394, 396  
Панацеи, 15, 578  
Паиаса переходного режима, 578  
Пангея, Панталассия, 362, 363  
Парадоксальные размерности, 161  
Парапараметричность\*, 225  
Парде, М., 90  
Партридж, Э., 112, 116  
Паскаль, Б., 17, 34  
Патология, 15  
Паумгартнер, Д., 167  
Паутина (межгалактическая), 520  
Паутина (фрактальная), 204–206  
Пеано, Дж., 562  
Пеано, кривые, 15, 17, 30, 89, 100–101  
— движение, 89  
— длина, 91  
— интервалы, 91  
— истинная природа, 90  
— кривая Госпера, 106, 107  
— кривая Мура, 94  
— кривая дракона, 271  
— кривые Пеано–Коха, 94–107  
— кривые Пеано–Чезаро, 97, 99, 404  
— кривые Пойа, 97–99  
— расстояние, 93, 97–99  
— случайные, 322, 327  
— чудовища, 89  
Пеано-броуновские гибриды, 327  
Пейли, Р. Э. А. Ч., 486  
Пейрье, Ж., 356, 523, 619  
Пена\* (фрактальная), 193  
Пенлеве, П., 573, 574  
Перемежаемость относительная, 519  
— турбулентности, 148, 152  
Перемешивание, 533  
Перенормировка, 262, 455  
Пересечения фракталов, см. Сечения  
Переход, 335, 436  
Перистость, 428  
Перколяция Бернулли, 184, 306  
— фрактальная, 306, 420  
Перрен, Ж., 23, 552, 565, 573  
— и его мечта, 23  
Персистентность, 347, 351, 487  
Пертайлинг\*, 74  
Пиблс, П. Дж. Э., 136, 293, 407, 429, 430  
Питерсон, Б. А., 429  
Пифагор, 566  
Планиктон, 146  
Платон, 566  
Плотность материи, 128, 294

- матери, глобальная, 128
- обобщенная, 402
- общая нулевая, 128
- средняя, 118
- Поверхность необработанной древесины, 22
- Пойа, Д., 91, 97, 510, 529
- Показатели, отличные от  $D$ , 179, 181, 188, 189, 224
- Показатель диаметрический, 224
- критический, 188
- критический (для смектических структур), 252
- Покрытие, 74, 240
- гиперболическое, 240
- множества или его дополнения, 493
- Политехническая Школа (Ecole Polytechnique), 551, 552, 554
- Полустойчивость, 483
- Поппер, К., 462
- Поправочные члены, 34
- Порог, верхний, 129, *см. также* Порог, внешний
- Порог, внешний береговые линии, 64
- графики, 41
- земной рельеф, 366
- и лакуарность, 436
- инженерные проекты, 578
- канторовы пыли, 116
- кластеризация галактик, 129
- турбулентность, 144–156
- фрактальные ошибки, 113
- Порог, внутренний береговые линии, 64
- графики, 41
- канторовы пыли, 116
- турбулентность, 152
- Потамология, 90
- Потенциалы и размерность, 527
- Предельное множество (Клейна), 238
- Предкоэффициент, 429, 433, 476
- распределения пустот, 433
- Предтворог\*, 115
- Пренебрежимые события (нестандартные), 296
- Примитивный выбор, 150
- Принимающая связь\* для атомов  $\lambda$ -отображения, 262
- Принцип, космографический\* применительно к рельефу Земли, 363
- сильный, 293
- условный, 294
- Принцип, космологический, 292
- Приручение чудовищ канторова пыль, 119
- кривая Коха, 61
- кривая Пеано, 90
- салфетка\* Серпинского, 191, 199
- чудовища\* Лебега–Осгуда, 214, 215
- Проекция фрактальных галактик на небосвод, 136
- Производная (функции без производной), 17, 20, 23, 27, 59, 148
- Промежуточные остановки полета\* Коши, 403
- Леви, 140, 402, 405
- Рэля, 401
- Простота, 67
- Прохождения, *см.* Пеано, кривые
- Прохождения квадрата, 94
- Процесс восстановления, возвратный процесс, 392
- гауссов, 326, 346, 358, 387
- рождения, 300, 394
- Процессы, ломаные, 344
- Прюитт, У. Э., 503, 514
- Псевдослучайность, 287
- Псевдослучайные заправки, 287
- Пуанкаре, А., 23, 39, 238, 317, 546, 547, 551, 561, 567, 570, 571, 575
- Пуассоновская поверхность, 359, 509
- Пустоты\* (паузы), 113, 194, 328, 331, 393, 428
- Пыль, 13, 112
- канторова, 112
- линейная Леви, 336, 391
- рандомизированная линейная, 299
- субординированная, 409
- Фату\*, 259
- Радемахера, ряд, 540
- Разбиение, 74, 240
- гиперболическое, 240
- Размах ( $R(d)$ ), 534
- Размерностно-несогласованные множества, 30



- Размерностно-согласованные множества, 30
- Размерность аномальная, 32
- в интервале от 0 до 1, 116
  - в интервале от 1 до 2, 65
  - дробная, 31
  - евклидова, 566
  - идея размерности, 30
  - исторический очерк, 566
  - концентрата меры, 526
  - критическая, 76
  - максимальная, 81
  - Менгера – Урысона, 31, 569
  - Минковского – Булигана, 51
  - Минковского – Булигана, 493
  - по Безиковичу и Тейлору, 494
  - по Бойду, 497
  - по Булигану, 51, 496
  - по Кантору и Минковскому, 51, 493
  - по Колмогорову и Тихомирову, 496
  - по Понтрягину и Шнирельману, 51, 496
  - повествования, 477
  - подобия, 51, 62
  - покрытия, 51, 493
  - произведение размерностей, 404
  - Пуанкаре о размерности, 567
  - различные аспекты понятия, 30
  - размерностная функция, 87
  - субордината, 401
  - типичная для случайных множеств, 290
  - топологическая, 31, 64
  - фрактальная\*, 13, 31, 53
  - Фурье, 497
  - Хаусдорфа – Безиковича, 30, 31, 51, 503
  - эффективная, 34, 64
- Размерность сечений основное правило, 196
- полет Коши, 403
  - разветвленные фракталы, 196
  - твороги, 302
- Разрывность цен, 459
- Райт, братья, 573
- Рамануджан, Ш., 542
- Распределение, 18
- Гиббса, 575
  - Парето, 473, 558, *см. также* Распределение, гиперболическое
  - Парето (закон доходов), 480
  - галактик, 127
  - гиперболическое, 290, 392, 471, 473, 584
  - гиперболическое, в центральных предельных теоремах, 512
  - гиперболическое, предкоэффициент, 429
  - доходов, 480
  - частоты употребления слов, 475
- Рассел, Б., 579
- Растягивание вихрей, 146
- Расходимость, 36
- дисперсии изменения цен, 464
  - длины береговых линий, 46, 59
  - количества островов, 174
  - количества точек ветвления, 191
- Расширение Вселенной, 136, 402
- Регулярность, 67
- Рейнольдса, число, 145
- Рекуррентность и случайность, 285
- Рекуррентность, нерекуррентность, 346
- Релаксация (распределение значений времени), 578
- Рельеф Земли, 42, 336
- броуновский, 358
- Рента, правило, 168
- Реньи, А., 533
- Решетка (фрактальная), 196
- Решеточная физика, 450
- Ризничок, Дж. Т., 11
- Риман, Б., 539, 566, 567, 581
- Римаиа – Лиувилля, интеграл, 350, 490
- Риппл, 348
- Рисса (Марселя), потенциалы, 527
- Ричардсон, Л. Ф., 36, 48, 50, 51, 57, 150, 152, 555, 586
- Ричардсон, сэр Ральф, 555
- Ричардсона, вихри, каскад, 59, 84
- данные по береговым линиям, 50
  - каскад, 59, 84
  - эффект, 50
- Розенблатт, М., 493, 533
- Ролл, Р., 467
- Ролл, У., 232

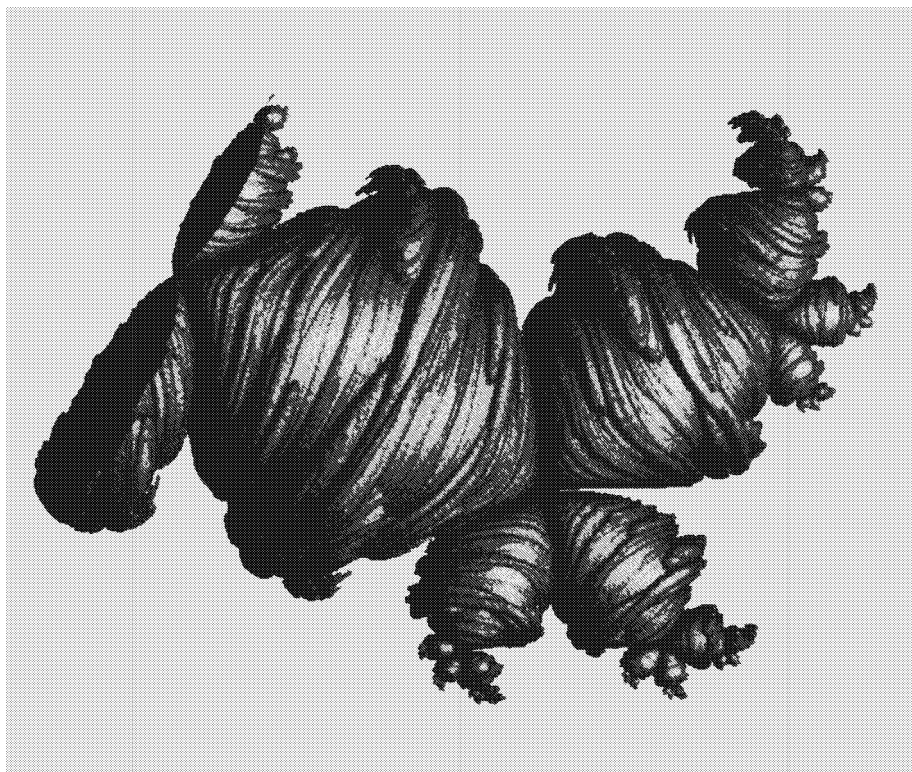
- R/S*-анализ, 534  
 Рэлей, барон, 542  
 Рэля, полет, 401  
 Рэмзи, Н., 479
- Салфетка\* аполлониева, 242, 252  
 — Серпинского, 191, 203, 204  
 Самоаффинность, 332, 355, 482, 483  
 Самоподобие, 59, 482, 483  
 Сан-Марко, дракон, 263, 281  
 Сборник прецедентов\*, 14  
 Свифт, Дж., 556, 562  
 Связность, топологическая бернуллие-ва перколяция, 185  
 — в случайном створаживании\*, 305–307  
 — круговые тремы, 423–426  
 — сукколяция\*, 428  
 Сегё, Д. П., 529  
 Сейлем, Р., 494, 516  
 Сейлема, множества, 497, 499  
 Сепаратор\*, кривая, 260, 264, 267, 268  
 Серпинский, В., 17  
 Серпинского, губка\* (губка Менгера), 194  
 — ковер, 193, 207, 208, 307  
 — салфетка\*, 191, 203, 204, 432  
 — стрела\* (салфетка), 203, 204  
 Сеть\*, 196, 328, 346  
 Сигма-множества  $\sigma$ -диск, 250  
 —  $\sigma$ -петля, 171  
 Симметрия, 36, 292  
 Синай, Я. Г., 279  
 Сигх, А. Н., 540, 582  
 Скалярные поверхности, изотермальные, 146, 387  
 Сквиг-кривые\* (случайные), 317–319, 323, 324  
 Скейлинг (масштабная инвариантность), 35, 471, 577–579  
 Скейлинговый принцип в экономике, 464  
 Складки\*, отсутствие складок, 331  
 Скобки  $\triangleleft$  и  $\triangleright$ , 115  
 Скорость, 27, 133  
 — ветра, 556  
 Следы\* в противоположность функциям, 326  
 — дробные броуновские, 356  
 Сложность множества, 67  
 Случайное блуждание, 336  
 — без самопересечений, 453  
 — фрактальный предел, 450  
 Случайность, 284, 292  
 — блуждающая\*, 534  
 — лапласова, 534  
 — мягкая\*, 534  
 — неограниченная, 288, 342  
 — самоограниченная, 288  
 — тщетное звание и описание, 287  
 — установившаяся, 534  
 Случайные модели, 284–292  
 Случайные сквиг-кривые\*, 317–319, 323, 324  
 Случайные цепи, 316–318, 321, 322  
 Смейл, С., 279  
 Смещение средней точки, 70, 327, 328, 342, 367  
 Смит, Г. Дж. С., 566  
 Снежинка Коха, 59  
 — прохождения, 103–104  
 Снежинка, перекошенная, 109  
 Снежные палаты\*, 54, 209  
 Солеионд, 279  
 Сонейра, Р. М., 293  
 Соотношение между диаметром и количеством, 118, 172, 178  
 — между длиной и площадью (для бассейнов рек, по Хаку), 161  
 — между количеством и размером (для пустот), 118, 194  
 — между массой и радиусом (броуновское движение), 330  
 — между массой и радиусом (вселенная Фурнье), 130, 132  
 — между массой и радиусом (галактики), 128  
 — между массой и радиусом (канторова пыль, ошибки), 118  
 — между массой и радиусом (кривые Коха), 66  
 — между массой и радиусом (показатели, отличные от  $D$ ), 181, 188, 189, 290  
 — между массой и радиусом (предкоэффициент), 434, 436

- между площадью и количеством (для островов), 171, 177
- между радиусом и мерой (канторова пыль), 119
- между радиусом и мерой (кривые Коха), 66
- Сосиска (Минковского), 56
- Сосредоточенные кластеры створаживания\*, 181
- Спады, экономические, 467
- Спектральный анализ, 32
- Спиральна, неравенство, 31
- Средняя плотность материи, 128
- Статистический анализ ( $R/S$ ), 534
- Стационарность неочевидная, 530
  - обыкновениая, 292, 530
  - степени, 530
  - условная, 293
- Створаживание\*, предельное логарифмически нормальное, 524
- Стеили, Х. Э., 189
- Стент, Дж., 39
- Степенные законы, 66, 118, 188, 194, 330, 331
- Степень ветвления, 197
  - квазиоднородное ветвление, 199
  - однородное ветвление, 198
- Стержень, мерный, 46, 57
- Стилтгес, Т. И., 60
- Сток реки дробная броуновская модель, 354
  - персистентность, 347
- Стратификация, 297, 299, 437
- Стрела\* Серпинского, 203–204
- Струи, турбулентные, 145
  - кильватерные, 145
- Структура, зернистая, 22
- Стьюарт, Р. У., 152, 301, 311–314, 388, 586
- Субординация, 401
- Субразмерности, субординатные размерности, 506
- Сува, Н., 228
- Сукколяция\*, 428
- Сходимость, сильная и слабая, 449
- Съворотка\*, 115
- Сыр\*, 419, 423–426
- Такахаси, Т., 228
- Таунсенд, А. А., 148, 150
- Творог, створаживание взвешенное, 522
  - галактик (по Хойлу), 133
  - каноническое определение створаживания, 300
  - на прямой (канторова), 115, 121
  - случайное, 299
  - турбулентности (по Новикову – Стюарту), 152
- Тевтобок, король, 570, 571
- Тейлор, Дж. И., 145, 152, 153, 554, 556
- Тейлор, С. Дж., 496, 500, 503, 504, 514
- Тейлора, однородная турбулентность, 387
- Текстура, 391, 428, 440
- Температура отрицательная, 479
  - повествования, 479
  - термодинамическая, 575
- Темперированная музыкальная гамма, 517
- Теньер, М., 477
- Теория относительности, 136, 137
- Терагон\*, 60
- Термодинамика, 479, 575
- Типичные сечения фракталов прямыми, 196
  - фракталами, 302
- Тиссо, Ж., 571
- Тихомиров, В. М., 496
- Тома, Р., 228
- Томас, Х. А., 81, 348
- Томпсон, д'А. У., 15, 211, 229, 231, 543, 565
- Томэ, С., 258, 262
- Тонглинг, 339
- Топология ограничения, 32
  - случайных творогов, 305, 306
  - турбулентности, 154
- Торговля с фильтрами, 461
- Точки ветвления, 191
  - гиперболические, 69
  - кратные, 65, 91
  - локсодромические, 74
- Тремы\*, неперекрывающиеся и неслучайные, 115, 202, 204, 211, 242

- Тремы\*, перекрывающиеся случайные виртуальные, 393  
 — интервалы, 393  
 — масштабно-неинвариантные, 421  
 — окружности, диски, 417  
 — сферы, шары, 417  
 — улицы, 397  
 Трибология, 366  
 Троичная кривая, 59, *см. также* Снежинка Коха  
 Тройное множество (канторова пыль), 115  
 «Трубадур» (*«Il Trovatore»*), 563  
 Турбулентное рассеяние, 84, 146  
 Турбулентность, 144, 156  
 — Бюргерса, 387  
 — лакунарность, 432  
 — однородная, 387  
 — определение, 149  
 — порывы (удары), 148, 149  
 — эксцесс, 154  
 Уайберн, Дж. Т., 199, 340  
 Уайз, М. Б., 335  
 Удаляющийся берег, 458, 472  
 «Ужас и отвращение», 61  
 Уилер, Дж. А., 194  
 Уилсон, К. Г., 137  
 Уиттекер, Э. Т., 39, 619  
 Улам, С. М., 119, 257  
 Улицы, случайные, 397  
 Уменьшение размера решетки, 334  
 Умножение размерностей, 404  
 Уоллмен, Х., 31, 500, 569  
 Уолш, Дж. Л., 559  
 Упаковка неперекрывающихся шаров, 202  
 — окружностей, аполлониева, 242, 252  
 — треугольников, Серпинского, 204  
 Упругость и скейлинг, 577  
 Урысон, П., 17, 31, 569, 570  
 Усечение, 64, 128, 530  
 Условная вероятность, 396  
 Условная стационарность\*, 293, 391, 397  
 Условный космографический\* принцип, 294, 408  
 Устойчивость (по Леви), 402, 497, 513  
 Ученое незнание, 293  
 Уэббинк, 128  
 Фама, Э. Ф., 467  
 Фату, П., 257  
 Фату, пыль\*, 259  
 Фейгенбаум, М., 258, 262, 276  
 Фейнман, Р. Ф., 221, 335  
 Феллер, У., 42, 336, 392, 404, 507, 551  
 Физика, 449  
 Фишер, М. Э., 164  
 Флори, П. Дж., 453  
 фон Вайцекер, К. Ф., 148, 150  
 Фондовая биржа, изменчивость уровня цен, 461  
 фон Нейман, Дж., 551, 619  
 фон Швейдлер, Э., 578  
 Форма, 32  
 — биологическая, 239  
 Формы, промежуточные, 150, 302, 562, 570  
 Фосс, Р. Ф., 11, 493, 519, 618  
 Фрагментация в природе, 20  
 — измерение с помощью фрактальной размерности, 172  
 Фракталы\* масштабно-неинвариантные, 211, 217, 224, 238, 257  
 — нелакунарные, 437, 519  
 — неограниченные, 258  
 — неоднородные, 217  
 — несамopodobные, 211, 217, 224, 238, 257, 274  
 — ограниченные, 258  
 — определение, 30, 31, 499  
 — природные, 18  
 — самоинверсные, 238  
 — самоквадрируемые, 257  
 Фрактальная\* однородность, 124, 130  
 Фрактальная\* перколяция, 306  
 Фрактальная\* пыль, 112, 127, 409  
 Фрактальная\* размерность, 13, 31, 51  
 Фрактальная\* решетка, 196  
 Фрактальная\* сеть, 196, 328  
 Фрактальная\* этимология, 17  
 Фрактально\* однородная турбулентность, 152  
 Фрактально\* однородные распределения звезд, 130

- Фрактально\* однородный канторов стержень, 124
- Фрактальные\* аттракторы, 274, 571
- Фрактальные\* зоны, 35, 112
- Фрактальные\* кластеры, 112, 127
- Фрактальные\* кривые, 13, 54
- Фрактальные\* множества, 17
- Фрактальные\* ошибки, 112
- Фрактальные\* события, 112
- Фрактальные\* хлопья, 25, 26, 389
- Фрактальный\* шум, 112
- Френкель, Я., 164
- Фростман, О., 500, 527, 529
- Фудзисака, Х., 279
- Фукус, Л., 240, 574
- Функции в противоположность следам, 326
- дробные\* броуновские, 346, 358, 387
- недифференцируемые непрерывные, 17, 20, 23, 27, 59, 148
- непрерывные без производной, 17, 20, 23, 27
- сингулярные, 124
- случайные (и стационарность), 530
- случайные гауссовы со спектром Вейерштрасса, 540
- спорадические\* (процессы), 397
- Фуикция кохарактеристическая, 506
- пробная (Хаусдорфа), 502
- Селлерье, 582
- Фурнье д'Альб, Э. Э., 127, 129, 141, 142, 309, 527, 548
- Фурье анализ, 32, 482
- размерность, 497
- ряд Фурье–Броуна–Винера, 486, 489, 537
- Хак, Дж. Т., 162, 457
- Хаммерсли, Дж. М., 184
- Хаи, Г., 60, 90, 191, 215
- Хаидельман, З. В., 11, 618
- Хаос, хаотичный, 240, 274
- Харди, Дж. Х., 516, 537
- Харрисон, Р. Дж., 189
- Хартер, У. Г., 122
- Хаусдорф, Ф., 13, 17, 31, 34, 51, 502, 542, 562
- Хаусдорфа, мера, 502
- Хаусдорфа–Безиковича, размерность, 484
- Хейстингс, Х. М., 189
- Херст, Г. Э., 548, 586
- Херста феномен, 348, 534
- шум, 348
- Хиббс, А. Р., 335
- Химера, 23, 562, 563
- Хлопья, 25, 26, 389
- мыльные, 21, 25, 26
- Ховард, А. Д., 458
- Хойл, Ф., 127, 133, 301, 308, 309, 527
- Хокинг, Дж. У., 194
- Хокинс, Т., 115, 582
- Хокс, Дж., 496, 497
- Хokusай, К., 144
- Хольтсмарк, И., 507, 514
- Хопкинсон, 578
- Хортон, Р. Э., 106, 233
- Хортон–Штралера, схема, 106
- Хубер, 231
- Цвикки, Ф., 429
- Центральная предельная теорема, 403, 512
- Цепи (случайные), 316–318, 321, 322
- Циммерман, М. Г., 229
- Ципф, Дж. К., 558, 559, 584
- Ципфа, закон (обобщение), 475
- Чаша, 381
- Чезаро, Э., 17, 65, 70, 91
- Чезаро–Пеано, кривая, 97–99
- Ченпов, Н. Н., 492, 493
- Чертовы лестницы, террасы, 119, 124, 125, 382, 398, 399, 451, 499, 500
- Чешуйки, коллоидные, 21, 25, 26
- Чорин, А., 157
- Чудовища, 15, 23, 60, 89, 191, 212
- Шарлье, С. В. Л., 127, 132
- Шварц, Г. А., 494
- Шварц, Д., 165
- Шварцшильда, предел, 138
- Шеффер, В., 158
- Ширина рек, 232
- Шириельман, Л., 51, 496

- Штауффер, Д., 184, 189  
 Штейн, П. Р., 257, 262  
 Штейнгауз, Г., 50, 91  
 Шум избыточный, 113, 301, 391  
 — масштабно-инвариантный, 519  
 — фрактальный\*, 112  
 Шумы, 112  
 — аффинные, 355, 482  
 — дискретные дробные гауссовы, 487  
 — избыточные, 113  
 — масштабно-инвариантные, 348, 355  
 — с  $1/f$ -спектром ( $1/f$ -шумы), 346, 355, 519  
 — Херста, 348  
 Эббот, Л. Ф., 335  
 Эйлера, уравнение гидродинамики, 156  
 Эйнштейн, А., 285, 292, 543, 565, 566  
 Эйфелева башня, 191  
 Экономика, 461, 466, 546  
 Экстраполяция канторово множество, 116  
 — кривая Коха, 65  
 Электростатика и скейлинг, 577  
 Элиас, Х., 165  
 Энона, аттрактор, 279  
*επαμφότεριζειν*, 562  
 Эргodicность, 533  
 Эрлеш, П., 504  
 Эрмит, Ш., 60, 567  
 Эрудиция, 38  
 Эссам, Дж. У., 184  
 Эффект Бьянеме\*, 300  
 — Иосифа\*, 347  
 — Линди\*, 472  
 — Ноя\*, 347  
 — пылающего неба\* (парадокс Ольберса), 136, 153, 527  
 — Ричардсона\*, 50  
 Эффективность заполнения Пеано, 100–101  
 Эффективные рынки (цены), 461  
 Эффель, Ж., 559  
 Эшер, М. К., 42  
 Юнг, Г. С., 516, 540, 582  
 Яглом, А. М., 148, 492  
 Ядро  $\mu$ -атома, 262  
 Ячейки Бенара, 144



**Рис. 655. ИЛЛЮСТРАЦИЯ К СТР. 603**

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

**subscribe@rcd.ru**

**Внимание:** дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

**http://shop.rcd.ru**

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332-48-92, (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 15 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

**Бенуа Мандельброт**

## ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРИРОДЫ

*Художественный редактор М. В. Ботя*

*Технический редактор А. В. Ширококов*

*Корректор В. С. Филковская*

---

Подписано в печать 15.04.02. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 38,13. Уч. изд. л. 36,12.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.

Тираж 2000 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

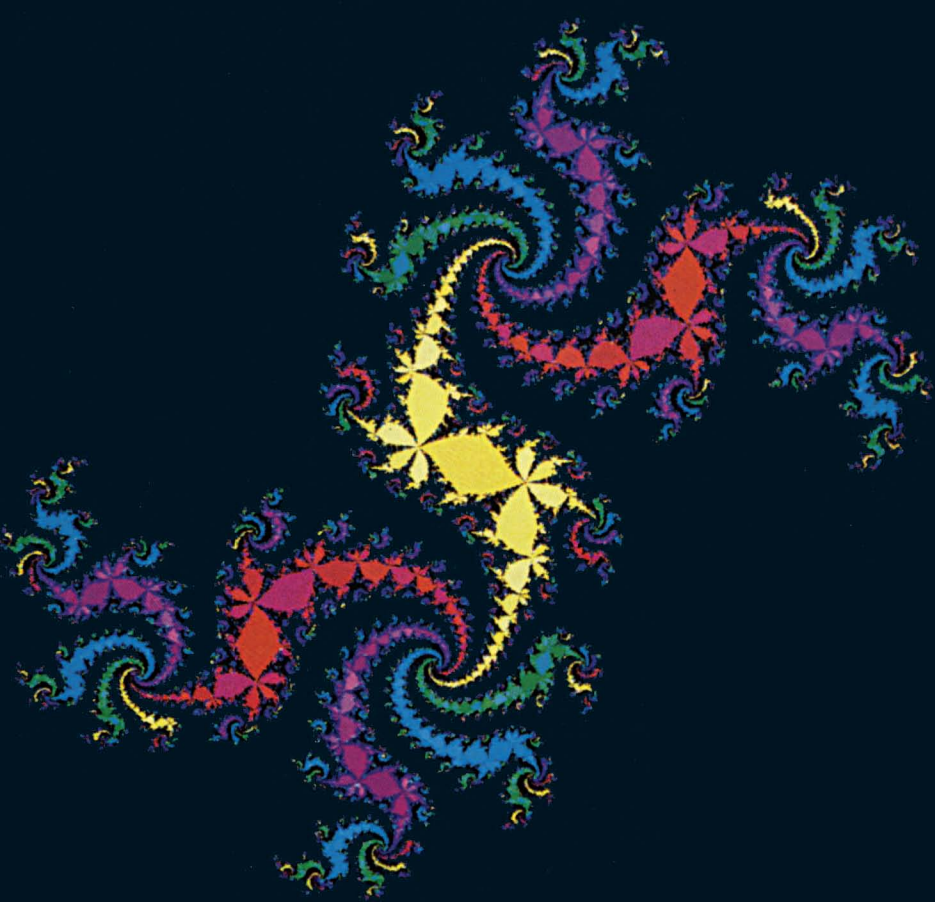
---

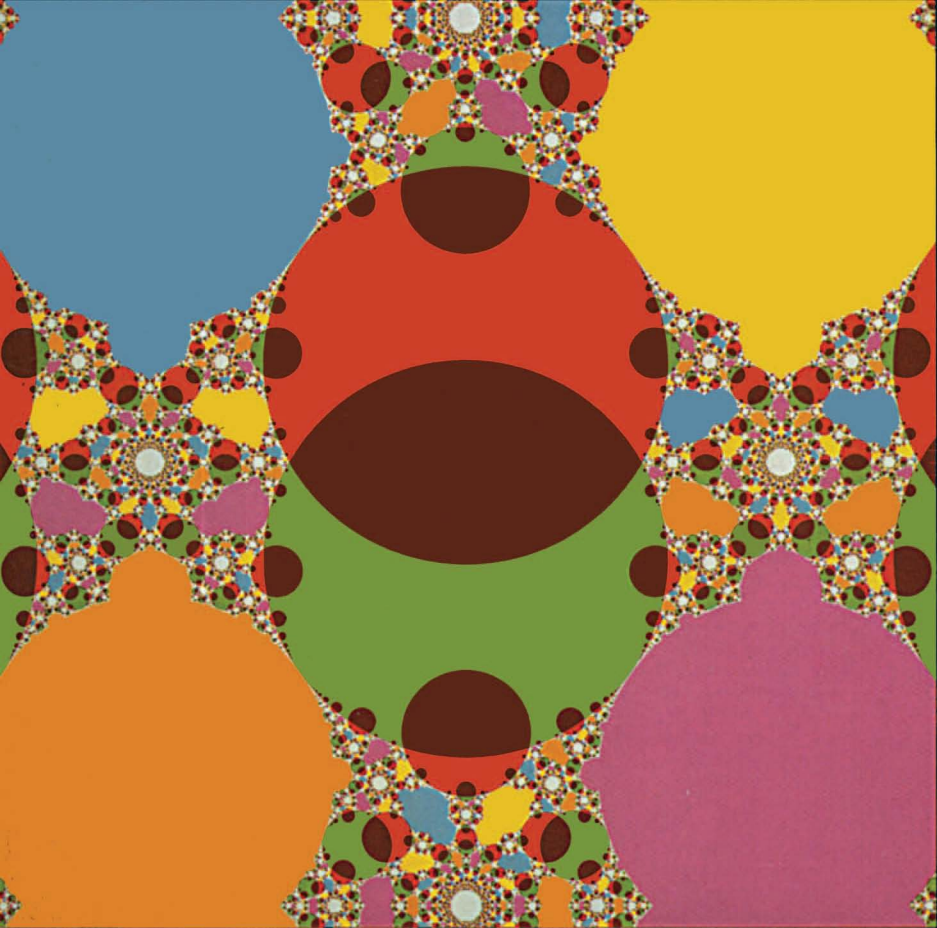


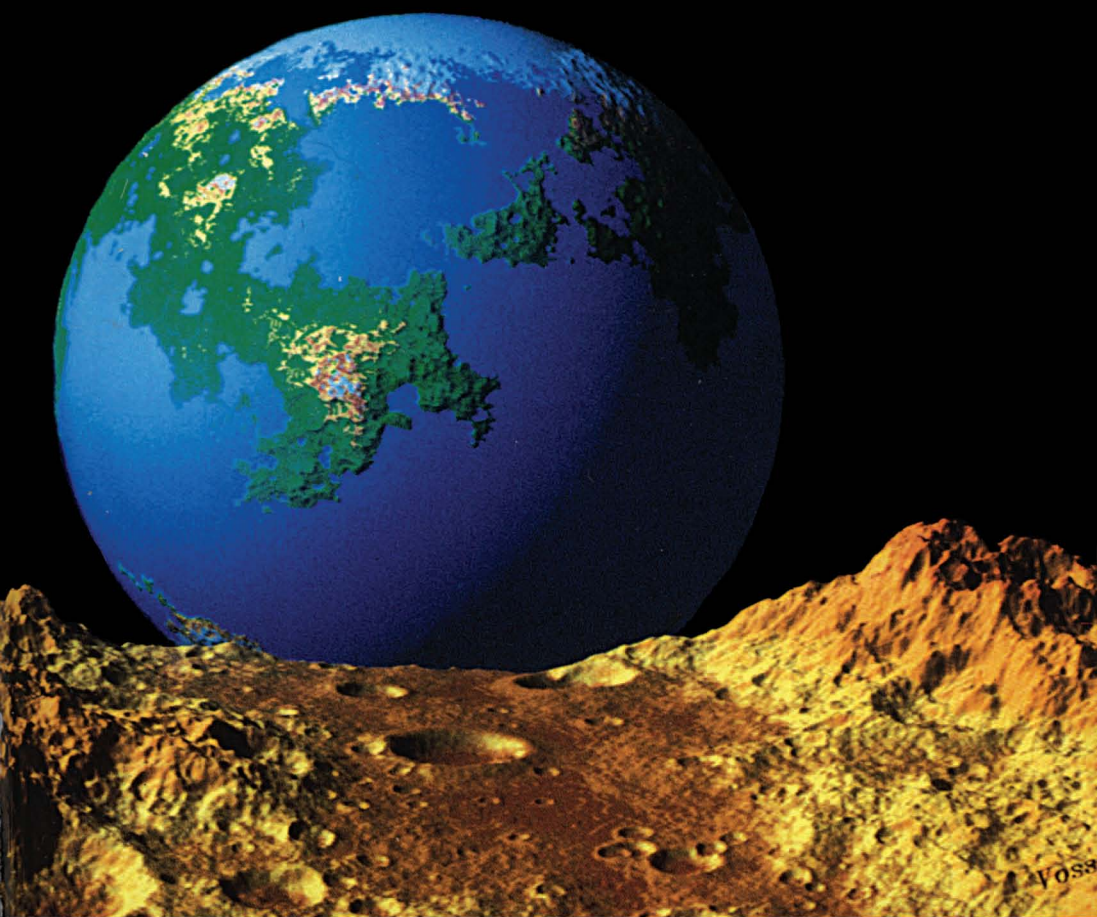
# СОТВОРЕНИЕ БОГОМ ОКРУЖНОСТЕЙ, ВОЛН И ФРАКТАЛОВ









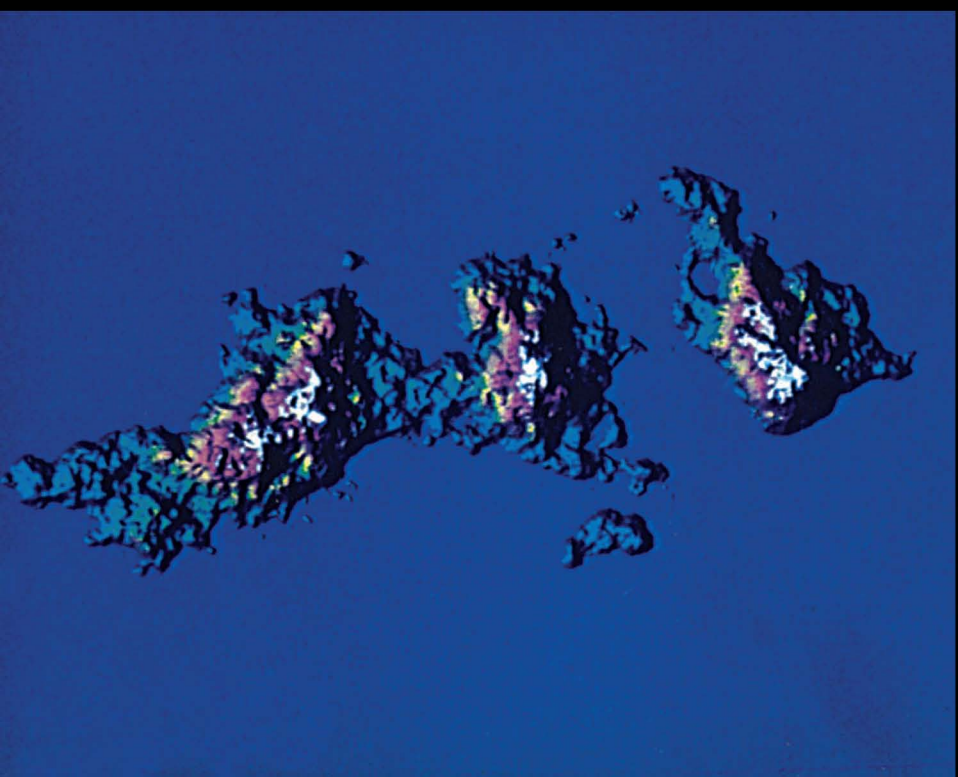
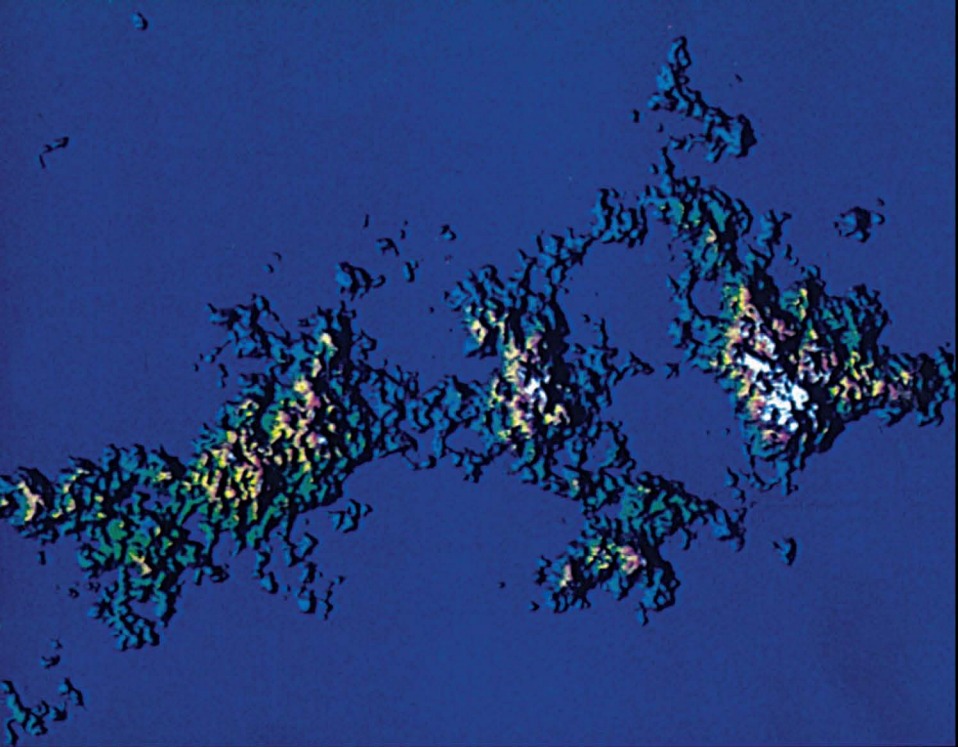


Voss

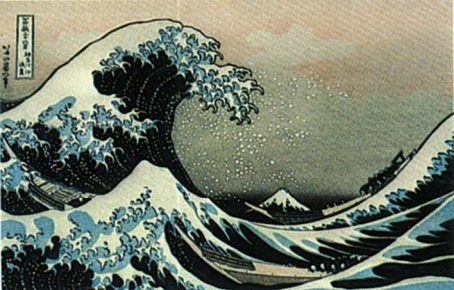




SGE\*\*0.333 .2 45 .3 2 60 R. F. Voss 11/81







THE GREAT WAVE OFF KANAGAWA  
KATSUSHIKA HOKUSAI

