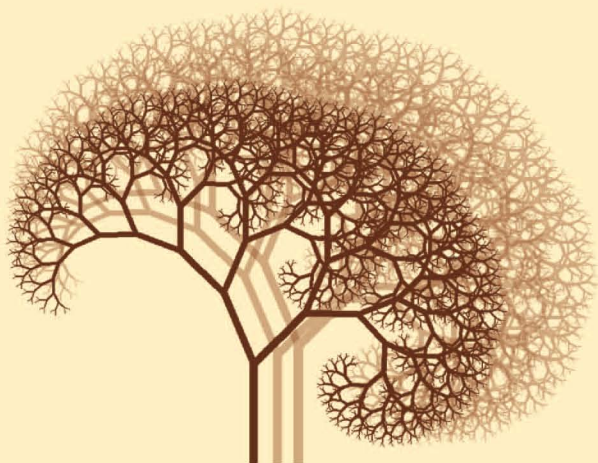


СОВРЕМЕННАЯ  
МАТЕМАТИКА

**А. Д. Морозов**

# **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФРАКТАЛОВ**



# СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

---

## Редакционный совет:

А.В.Болсинов  
А.В.Борисов  
И.С.Мамаев  
И.А.Тайманов  
Д.В.Трещев

## Вышли в свет:

*П.И.Голод, А.У.Климык.* Математические основы теории симметрии  
*М.Громов.* Гиперболические группы  
*М.Громов.* Знак и геометрический смысл кривизны  
*Дж.Д.Мур.* Лекции об инвариантах Зайберга–Виттена  
*Дж.Милнор.* Голоморфная динамика  
*И.Р.Шафаревич.* Основные понятия алгебры  
*И.Добеши.* Десять лекций по вейвлетам  
*Э.Столниц, Т.ДеРоуз, Д.Салезин.* Вейвлеты в компьютерной графике  
*К.Кассел, М.Россо, В.Тураев.* Квантовые группы и инварианты узлов  
*Ж.П.Рамис.* Расходящиеся ряды и асимптотические теории  
*А.Д.Морозов.* Введение в теорию фракталов

## Готовятся к печати:

*О.В.Богопольский.* Введение в теорию групп  
*С.П.Новиков.* Топология  
*Я.Песин.* Теория размерности  
*А.И.Шафаревич.* Введение в теорию квазиклассического квантования  
изотропных многообразий

**А.Д. Морозов**

# **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФРАКТАЛОВ**

*Издание второе, дополненное*



**Москва ♦ Ижевск**

**2002**

УДК 510:514

ББК В16

М 79

Морозов А. Д.

**Введение в теорию фракталов.** — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160 стр.

Книга посвящена основам теории фракталов и состоит из двух частей и приложения. В первой части рассматриваются конструктивные фракталы, во второй – динамические, а в приложении приводится вспомогательный материал.

Конструктивные фракталы строятся с помощью достаточно простой рекурсивной процедуры, имеют «тонкую» структуру, т.е. содержат произвольно малые масштабы, и обладают самоподобием. Подобные фрактальные множества слишком нерегулярны, чтобы быть описанными на традиционном геометрическом языке. Рассматриваются многочисленные примеры конструктивных фракталов (Кантора, Коха, Минковского, Серпинского, Леви и др.). Проводится их анализ на основе линейных преобразований и вычисления фрактальной размерности. Изложение сопровождается историческими справками.

Вторая часть посвящена фракталам, которые возникают в дискретных нелинейных динамических системах. Это множества, хаусдорфова (или фрактальная) размерность которых больше топологической размерности. К ним относятся одномерные комплексные эндоморфизмы, рассмотренные Жюлиа и Фату в начале 20 века. В книге приводятся основы современной теории подобных эндоморфизмов. Изложение иллюстрируется на примере фракталов Жюлиа, Мандельброта, Ньютона. В книгу включены новые результаты по гиперкомплексной динамике.

В приложении приводится вспомогательный математический материал из теории множеств, обсуждается определение линии, даются основы теории размерности и, прежде всего, хаусдорфовой размерности.

Книга может быть использована как учебное пособие по фракталам и ориентирована прежде всего на студентов физико-математических факультетов университетов. Первая часть доступна школьникам старших классов.

**ISBN 5-93972-172-9**

**ББК В16**

© А. Д. Морозов, 2002

© Институт компьютерных исследований, 2002

## Предисловие

Данное учебное пособие по фрактальной теории основано на цикле лекций, которые автор прочитал в конце 1998 года аспирантам и студентам магистратуры механико-математического факультета и факультета ВМК Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, а также сотрудникам Нижегородской лаборатории программных технологий. При подготовке данного материала использовались результаты Б. Мандельброта (в основном из книги [1]), книги К. Фальконера [2], Г. Лаверье [3], а также книга А. Морозова и др. [4]. Учебное пособие состоит из двух частей и приложения (ч. 1 – «Конструктивные фракталы»; ч. 2 – «Введение во фрактальную динамику»).

Изложение материала в первой части (главы 1 – 5) в основном следует книге Лаверье [3], а во второй части (глава 6) — книге К.Фальконера [2], главы 7, 8 – книге А. Морозова и др. [4]. В главе 9 приводятся элементы теории гиперкомплексных отображений. При написании приложения (главы 10-12) использовался материал из книги Б.Вулиха [5] (глава 10), из обзорной статьи Федорчука [6] (глава 10), из книги Фальконера [2] (глава 11).

Автор благодарен М.Антонцу и М.Шерешевскому, которые прочитали рукопись и сделали полезные замечания, Е.Ведехиной, подготовившей электронный вариант книги и К.Крамкову за подготовку рисунков для первой части книги.

Многие рисунки с изображением фракталов можно получить с помощью программы «*Fractals*», работающей в среде Windows 95/ 98/ NT и разработанной учениками автора.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобразования, КЦФЕ, грант N 97-0-1.8-83, Нижегородской лаборатории программных технологий и РФФИ, грант 01-01-00589.

Первое издание книги вышло в издательстве Нижегородского государственного университета в 1999 г. Данное издание отличается от первого. В него включена новая глава 9, в которой рассматриваются фракталы в 3-х мерном гиперкомплексном пространстве (гиперфракталы), а также сделаны незначительные изменения в тексте и исправлены замеченные опечатки.

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	7
<b>Часть 1. Конструктивные фракталы</b> .....	12
<b>Глава 1. Фракталы и системы счисления</b> .....	14
1.1. Древоподобная структура и системы счисления.....	14
1.1.1. Двоичная система.....	16
1.1.2. Четверичная и восьмеричная системы.....	16
1.1.3. Троиичная система.....	16
1.2. Решето Серпинского.....	17
1.3. Фрактал Кантора.....	19
1.3.1. Арифметические свойства фрактала Кантора.....	20
<b>Глава 2. Фракталы и меандры</b> .....	22
2.1. Эксперимент Ричардсона.....	22
2.2. Степень изгибания кривой (первое знакомство с фрактальной размерностью).....	24
2.3. Кривая Коха.....	25
2.4. Вариации на тему кривой Коха.....	28
2.5. Общая схема построения конструктивных фракталов.....	31
2.5.1. Варианты.....	32
2.6. Семейство драконов.....	38
2.6.1. Кривая «Дракона».....	39
<b>Глава 3. Спирали, деревья, звезды</b> .....	42
3.1. Спирали.....	42
3.2. Дерево Пифагора.....	45
3.2.1. Склонившееся (спиральное) дерево Пифагора.....	47
3.3. Звезды.....	50
<b>Глава 4. Анализ конструктивных фракталов</b> .....	54
4.1. Инвариантные преобразования.....	54
4.2. Поворот.....	56
4.3. Сжатие (растяжение).....	57

4.4. Поворот с растяжением (сжатием).....	58
4.5. Применение поворота–сжатия.....	59
4.6. Отражение.....	66
4.7. Применения сжатия-отражения.....	67
<b>Глава 5. Случайность во фракталах.....</b>	<b>70</b>
5.1. Броуновская кривая.....	74
5.2. Квазислучайность в динамике.....	74
5.2.1. Модель ограниченного роста популяций.....	75
5.2.2. Определение детерминированного хаоса по Девани.....	80
<b>Часть 2. Введение во фрактальную динамику.....</b>	<b>82</b>
<b>Глава 6. Одномерные комплексные отображения.....</b>	<b>83</b>
6.1. Итерации комплексных функций. Множества Жюлиа и Фату.....	83
6.1.1. Основы теории множеств Жюлиа.....	83
6.2. Одномерные комплексные рациональные эндоморфизмы.....	95
<b>Глава 7. Фракталы Жюлиа и Мандельброта.....</b>	<b>100</b>
7.1. Фракталы Жюлиа.....	100
7.2. Фрактал Мандельброта.....	106
7.3. Фрактал Мандельброта на экране компьютера.....	108
<b>Глава 8. Фракталы Ньютона.....</b>	<b>109</b>
<b>Глава 9. Элементы гиперкомплексной динамики.....</b>	<b>112</b>
9.1. Гиперкомплексные числа и кватернионы.....	112
9.2. Отображение Жюлиа в 3-х мерном гиперпространстве.....	113
9.2.1. Свойства отображения J3D.....	115
9.3. Группы симметрий и мозаики в 3-х мерном гиперпространстве.....	127
9.3.1. Конструирование $\Gamma$ -инвариантных функций.....	128
9.3.2. Определение цвета.....	129
<b>Приложение.....</b>	<b>131</b>
<b>Глава 10. Краткие сведения из теории множеств.....</b>	<b>131</b>
10.0.1. Мощность множества.....	132
10.0.2. Примеры эквивалентных множеств.....	133
10.1. Счетные множества.....	134
10.2. Множества мощности континуума.....	134
10.3. Кольца и алгебры множеств.....	135

---

10.4. Точечные множества в евклидовом пространстве. ....	136
10.5. Предельные точки. ....	137
10.6. Замкнутые и открытые множества. ....	138
<b>Глава 11. Что такое линия?.....</b>	<b>139</b>
11.1. Первые определения линии. Жордановы кривые. Кривая Пеано. ....	139
11.2. Канторовы кривые. Ковер Серпинского. ....	141
11.3. Урысоновское определение линии. ....	142
<b>Глава 12. Хаусдорфова мера и размерность.....</b>	<b>143</b>
12.1. Хаусдорфова мера. ....	143
12.2. Хаусдорфова размерность. ....	146
12.2.1. Открытые множества. ....	147
12.2.2. Гладкие множества. ....	148
12.2.3. Монотонность. ....	148
12.2.4. Счетная устойчивость. ....	149
12.2.5. Счетные множества. ....	149
12.3. Вычисление хаусдорфовой размерности – простые примеры. ....	151
12.4. О других размерностях. ....	155
12.4.1. Предельная емкость. Фрактальная размерность.....	155
12.4.2. Инвариантная мера. ....	156
12.4.3. Поточечная размерность.....	157
<b>Список литературы.....</b>	<b>158</b>



## Введение

В прошлом математики концентрировали внимание на множествах и функциях, для которых могут быть применены методы классических вычислений. Функции, которые не являются достаточно гладкими или регулярными, часто игнорировались как «*патологические*» и не стоящие изучения.

В последние годы отношение к негладким функциям (или нерегулярным множествам) изменилось, ибо нерегулярные функции (множества) обеспечивают значительно лучшее представление многих природных явлений, чем те, которые дают объекты классической геометрии.

Фрактальная геометрия связана с изучением таких нерегулярных множеств [2]. Основной объект фрактальной геометрии – фракталы – находят применение, например, в компьютерном дизайне, в алгоритмах сжатия информации. Столь популярные ныне фрактальные объекты – порождение нашего компьютерного мира, и их сфера применения еще до конца не раскрыта.

В последние 20 лет фракталы стали очень популярны. Большую роль в этом сыграла книга франко-американского математика Бенуа Мандельброта «*Фрактальная геометрия природы*» [1]. Что же такое фрактал? В настоящее время нет однозначного определения «*фрактала*». Следуя Лаверье [3], *фрактал* – это геометрическая фигура, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба. Фракталы, обладающие этим свойством и получающиеся в результате простой рекурсивной процедуры (комбинации линейных преобразований), будем называть *конструктивными фракталами*. Таким образом, *конструктивный фрактал* – это множество, получающееся в результате линейных (аффинных) сжимающих отображений подобия. Результирующее сжимающее отображение обладает устойчивой неподвижной «точкой» – фракталом.

Наряду с конструктивными фракталами были обнаружены множества, которые похожи на фракталы. Как правило, подобные множества возникают в нелинейных динамических системах и, в первую очередь, в дискретных динамических системах. Их построение не так просто, как в случае конструктивных фракталов, и они могут обладать масштабной инвариантностью лишь приближенно. Подобные множества будем называть *динамическими фракталами*. В связи с этим Мандельброт ввел другое определение фрактала. *Фрактал* – это такое множество, которое имеет хаусдорфову (или фрактальную) размерность, большую топологической.

Естественно, это определение требует уточнения, и мы сделаем это ниже. В первом определении слово «*фрактал*» – это от латинского «*fractus*», означающее изломанный. Во втором определении оно связано с английским «*fractional*» – дробный.

В последние годы появилось большое число книг (в основном, на Западе), посвященных фракталам (см., например, [1-3, 7,15-18]). В этих книгах приводятся фракталы, полученные с помощью компьютера. И эти фрактальные картины впечатляют. В связи с этим, говоря о фракталах, довольно часто используют термины: «*компьютерное искусство*», «*художественный дизайн*», «*эстетический хаос*». На рис. 0.1 приведен динамический фрактал Мандельброта – это граница черной области.

Примером конструктивного фрактала может служить дерево, ствол которого разделен на две более мелкие ветви. В свою очередь, каждая из этих ветвей разделяется на две более мелкие ветви и т. д. В уме мы можем проделать эту процедуру бесчисленное число раз и получить древовидный фрактал с бесконечным числом ветвей. Каждую отдельную ветвь можно, в свою очередь, рассматривать как отдельное дерево. Эта конструкция имеет сходство с двоичной системой счисления. Другой пример фрактала – это множество Кантора. Это не только один из самых старых фракталов, он является так же существенной частью многих современных фракталов, например, таких, как кривые Коха и Минковского.

Одним из первых описал динамические фракталы в 1918 году французский математик Гастон Жюлиа в своем объемном труде в несколько сотен страниц [8]. Но в нем отсутствовали какие-либо изображения. Компьютеры сделали видимым то, что не могло быть изображено во времена Жюлиа. Визуальные компьютерные результаты превзошли все ожидания.

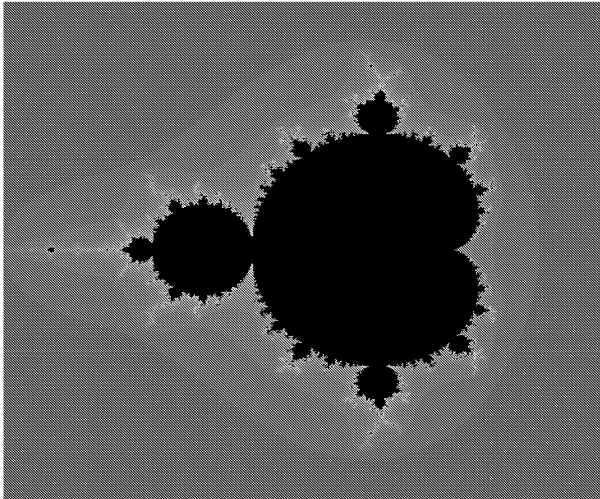


Рис. 0.1. Фрактал Мандельброта

Понятие «*фрактал*» уже доказало свою пользу в ряде прикладных областей. Например, если вводить случайное возмущение в регулярный математический древовидный фрактал, можно добиться сходства с настоящим деревом. Фракталы используются при анализе и классификации сигналов сложной формы, возникающих в разных областях, например при анализе колебаний курса валют в экономике. Они применяются в физике твердого тела, в динамике активных сред и т.д.

В настоящее время фракталы используются для сжатия изображений. Идея фрактального сжатия состоит в нахождении в изображении подобных областей и сохранении в файле только коэффициентов пре-

образований подобия. Например, в качестве таких областей можно брать квадратные области. Набор преобразований подобия – это сдвиг, отражение, поворот и изменение яркости с контрастностью. Сжатие происходит в случае, если коэффициенты преобразований займут места меньше, чем исходное изображение.

Структуры, похожие на фракталы, можно обнаружить в окружающей нас природе: границы облаков, границы морских побережий, турбулентные потоки в жидкостях, трещины в некоторых породах, зимние узоры на стекле, изображения структуры некоторых веществ, полученные с помощью электронного микроскопа, кровеносная система сердечной мышцы и т.д.

Чтобы прояснить неточные определения конструктивных и динамических фракталов, укажем основные свойства фрактальных множеств  $F$ , следуя [2]:

1.  $F$  имеет тонкую структуру, то есть содержит произвольно малые масштабы;
2.  $F$  слишком нерегулярное, чтобы быть описанным на традиционном геометрическом языке;
3.  $F$  имеет некоторую форму самоподобия, допуская приближенную или статистическую;
4. Обычно «фрактальная размерность» множества  $F$  больше, чем его топологическая размерность;
5. В большинстве интересных случаев  $F$  определяется очень просто, например, рекурсивно.

В данном пособии рассматриваются в основном «плоские фракталы» (включая фракталы Кантора, которые интерпретируются на отрезке). Исключение составляет глава 9 «Элементы гиперкомплексной динамики». Рассмотрение объемных фракталов более сложно и заслуживает отдельного рассмотрения (хотя некоторые типы конструктивных фракталов нетрудно обобщить с двумерного случая на трехмерный, см., например, в [1]). Фрактальным поверхностям посвящена книга Русса [16]. В недавно вышедшей на русском языке книге Кроновера [18] рассматривается проблема хаотичности некоторых фракталов (систем итерированных функций-СИФ). Основным

объектом этой книги являются дискретные динамические системы. Конструктивные фракталы, получающиеся с помощью рекурсивной процедуры (как правило – это СИФ, см. гл. 4), являются неподвижной точкой некоторого сжимающего оператора (порожденного СИФ). Подробнее об этом можно прочитать в [18].

В последние годы появился термин «мультифракталы» – это так называемые, неоднородные фракталы, определяемые не одним параметром – фрактальной размерностью, а спектром таких размерностей (см., например, [19]).

Начнем изложение с наиболее простого и в то же время играющего важную роль в понимании теории фракталов раздела «Конструктивные фракталы». Из многообразия литературы по этому вопросу наиболее удачной в методическом плане является книга Лаверье [3]. Изложение этого раздела с незначительными изменениями следует этой книге. Рисунки, представленные в этом разделе, в основном повторяют рисунки из книги [3] и были получены, в большей части, с помощью программы «Fractals», разработанной автором данного пособия и его учениками.

## Часть 1. Конструктивные фракталы

Для построения конструктивных фракталов характерно задание «основы» и «фрагмента», повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. Иногда для конструктивных фракталов используют термин «автомодельный» фрактал. Хорошим примером такого автомодельного фрактала является **Н-фрактал**.

Здесь в качестве повторяющегося фрагмента используется заглавная буква **Н**. **Н-фрактал** строится пошагово из горизонтального отрезка (находится в середине рис. 0.2), имеющего единичную длину. На первом шаге два более коротких отрезка помещаются перпендикулярно концам первоначального.

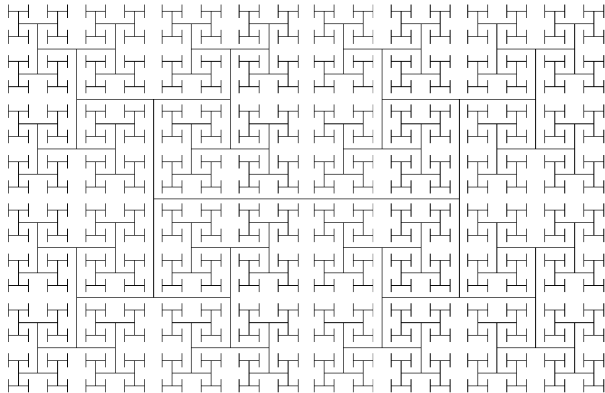


Рис. 0.2. Н-фрактал.

На рис. 0.2 показатель уменьшения  $1/\sqrt{2}$  и показано 9 шагов. На десятом шаге должно добавиться 1024 отрезка, имеющих длину  $1/32$  (исходный отрезок имел длину, равную 1). Практически, мы должны остановиться на каком-то шаге. Мысленно можно представить

---

этот процесс до бесконечности. Фигура, которая появится, – это фрактал, в котором каждая часть, в свою очередь, представляет собой подобие исходного фрактала.

# Глава 1. Фракталы и системы счисления

## 1.1. Древоподобная структура и системы счисления

Можно интерпретировать Н-фрактал на рис. 0.2 как план города, непригодного для уличного движения, ибо дорога блокируется во многих местах. Н-фрактал относится к так называемым «дендритам», от греческого «*dendron*» – дерево.

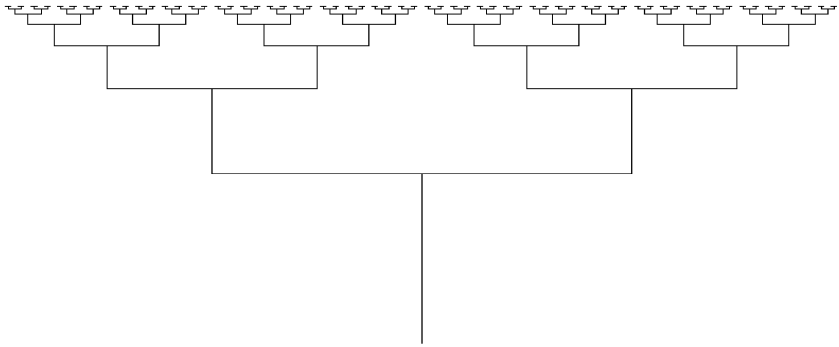


Рис. 1.1. Двоичное дерево

Это название очень подходящее, потому что структура такого фрактала аналогична структуре дерева: ствол разделяется на две отдельные ветви, каждая из которых является стволом для следующих, более мелких, ветвей и т. д. Если этот процесс продолжить до бесконечности, то будем иметь бесконечное число уровней. Дерево на рис. 1.1 строится именно по такому принципу. На каждом уровне вертикальные линии разделяются на две. Показатель уменьшения выберем, например, равным  $1/2$ . Вертикальные ветви удваиваются на каждом уровне, тогда как их длины одновременно уменьшаются вдвое. Каждая горизонталь-



ная линия – это удвоенная длина вертикальной линии, расположенной выше. Если мы зададим ветвь на самом нижнем уровне длиной 1, то к вертикальной длине каждый раз прибавляется 1:

$$1 + 2 * 1/2 + 4 * 1/4 + 8 * 1/8 + 16 * 1/16 + \dots \quad (1.1)$$

Что бросается в глаза на рис. 1.1 ( $p = 7$ ;  $p$  – число уровней) – это самоподобие. Каждая вертикальная ветвь может рассматриваться как ствол целого дерева – масштабированная копия всей фигуры. Чем выше расположены ветви, тем они теснее. Их длина всегда будет уменьшаться по сравнению с предыдущим уровнем. Суммируя длины вертикальных ветвей (по одной на каждом уровне), получим ряд:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 2. \quad (1.2)$$

Разбиение какого-либо множества на группы из двух элементов или, наоборот, комбинирование в группы из двух элементов, характерно для двоичной системы счисления (десятичная система основана на разбиении или комбинировании в группы из 10). Фрактал-дендрит на рис. 1.1 является, возможно, самым простым примером семейства фракталов, в котором структура системы счисления представляется геометрически. Поэтому обратимся к системам счисления.

Мы едва ли задумываемся, что повсеместно используемый в наши дни (десятичный) способ счисления является результатом долгой культурно-исторической эволюции. Ее основы были заложены индийцами 14 веков назад, а, возможно, и ранее – китайцами. Современные десятичные дроби начали использоваться в Европе Симоном Стевином (1548 – 1620). И нам десятичная система кажется очень простой и удобной. Запись любого числа, например нынешнего года, находится разложением его по степеням 10:

$$1998 = 1 * 10^3 + 9 * 10^2 + 9 * 10^1 + 8 * 10^0. \quad (1.3)$$

Господство десятичной системы связано, скорее всего, с тем фактом, что люди имеют десять пальцев. Где-то на другой планете во

Вселенной, возможно, живут восьмипалые существа, использующие восьмеричную систему.

На самом деле десятичная система имеет (как и любая другая) свои недостатки. Например, в ней нельзя разделить точно некоторые числа на три равные части. Дробь  $1/3$  представляется в виде бесконечной десятичной дроби, и поэтому приходится использовать аппроксимации.

Около 5000 лет назад в Месопотамии шумеры развили шестидесятеричную систему счисления, которая удовлетворяла практическим потребностям (в агрокультуре, астрологии). Им мы обязаны делением времени на часы, минуты, секунды.

Другие люди, например майя, развили двадцатеричную систему. В наше время доминирует десятичная система счисления, а в компьютерах используется двоичная.

### 1.1.1. Двоичная система

Пример:  $423 = 110100111$ :

$$110100111 = 2^8 + 2^7 + 0 * 2^6 + 2^5 + 0 * 2^4 + 0 * 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Таблица умножения:

X	0	1
0	0	0
1	0	1

Недостаток – длинная запись числа.

### 1.1.2. Четверичная и восьмеричная системы

$423 = 110100111$  – двоичная система.

$423 = 12213$  – четверичная система:

$$423 = 1 * 4^4 + 2 * 4^3 + 2 * 4^2 + 1 * 4^1 + 3 * 4^0.$$

$423 = 647 = 6 * 8^2 + 4 * 8^1 + 7 * 8^0$  – восьмеричная система.

### 1.1.3. Трои́чная система

$$423 = 1*243+2*81+2*9 = 1*3^5 + 2*3^4 + 0*3^3 + 2*3^2 + 0*3^1 + 0*3^0$$

Итак, 423 равно 120200 в троичной системе. В этой системе таблица умножения лишь немного сложнее, чем в двоичной:

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Рассмотрим дендрит, представленный на рис. 1.2. Структура этого дендрита основана на троичной системе. Из одной точки под углом  $120^\circ$  друг к другу выходят три главные ветви. Каждый из трех концов сам является точкой, из которой выходят три более мелкие ветви, и т. д. Направление вправо мы помечаем «0», направление влево-вверх – «1», влево-вниз – «2».

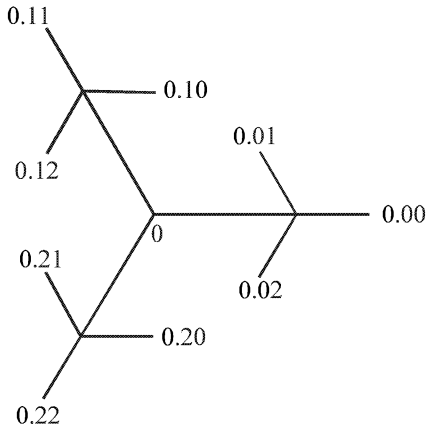


Рис. 1.2. Схема троичного дерева

Используя данный алгоритм, можно построить троичное дерево на компьютере (рис. 1.3, где число шагов  $p = 6$ ).

## 1.2. Решето Серпинского

В 1915 году польский математик Вацлав Серпинский придумал красивый объект, похожий на «троичное» дерево. Сейчас он известен

как решето (сито) Серпинского. Процесс начинается с равностороннего треугольника и показан на рисунках 1.4 ( $p = 3$ ), 1.5 ( $p = 6$ ).

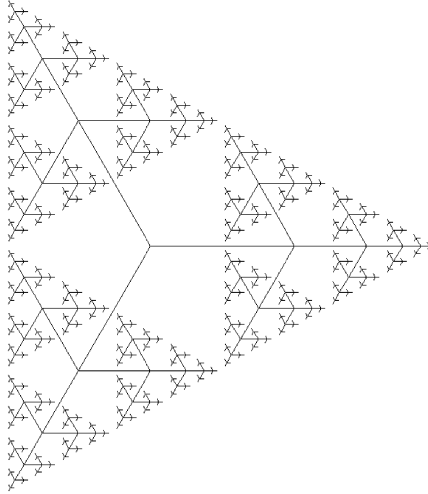


Рис. 1.3. Троичное дерево

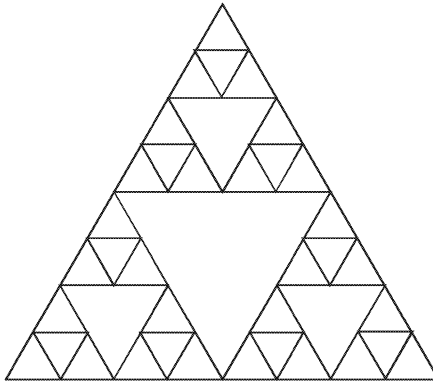


Рис.1.4. Первые шаги построения решета Серпинского

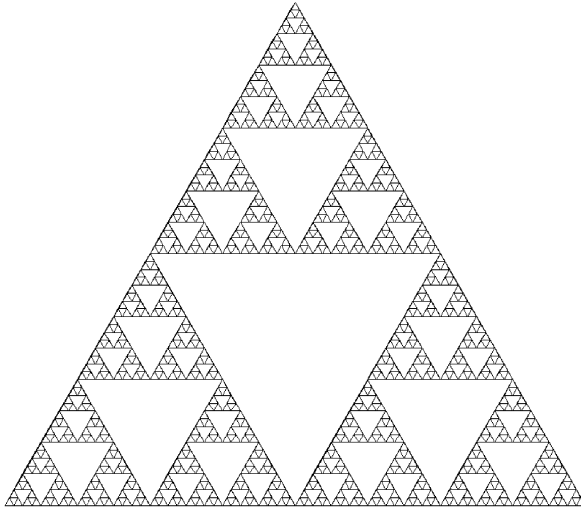


Рис. 1.5. Решето Серпинского

### 1.3. Фрактал Кантора

Кантор (1845–1918) явился одним из основателей теории множеств (основы современной теории множеств приведены в главе 9). Он также придумал один из старейших фракталов (1883). Построение этого фрактала показано на рис. 1.6.

Из исходного отрезка единичной длины выбрасывается интервал  $(1/3, 2/3)$ . Далее из каждого оставшегося отрезка выбрасываем средние трети и т. д. В пределе получим фрактал Кантора (на Западе подобные множества называют иногда пылью Кантора).

После трех шагов будет  $2^3 = 8$  отрезков, и каждый имеет длину  $3^{-3} = 1/27$ . После  $n$  шагов получим  $2^n$  отрезков, каждый длины  $3^{-n}$ . Общая длина оставшихся отрезков равна  $(2/3)^n$ . Она стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что множество Кантора имеет меру Лебега (то есть, грубо говоря, общую длину), равную нулю, и нулевую топологическую размерность. Далее мы узнаем, что есть другое определение

размерности, в соответствии с которым множество Кантора имеет размерность  $0.6309\dots$ . Эта размерность – дробное (нецелое) число. Отсюда возник и термин – «фрактальная размерность».

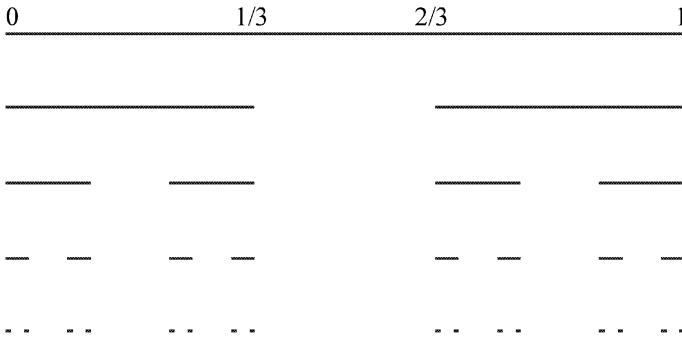


Рис. 1.6. Конструкция фрактала Кантора

На рис. 1.7 показана конструкция множества Кантора в виде гребня.



Рис. 1.7. Гребень Кантора

### 1.3.1. Арифметические свойства фрактала Кантора

Так как отрезки делятся на три части, то будем использовать троичную систему. Мы имеем дело с числами от 0 до 1, поэтому арифметический метод представления фрактала Кантора включает разложение дробей вида

$$a = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{9} + \frac{c_3}{27} + \frac{c_4}{81} + \dots \quad \text{или} \quad a = 0.c_1c_2c_3c_4\dots, \quad (1.4)$$

где  $c_1, c_2, c_3, \dots$  могут быть числа 0, 1, 2. Например,

$$0.3 = 3/10 = 0.\underline{0220};$$

$$0.5 = 1/2 = 0.\underline{1};$$

$$0.8 = 4/5 = 0.\underline{2101}.$$

Подчеркивание означает, что данная группа цифр должна повторяться.

Построение начинается с отрезка  $[0, 1]$ . Отмечается одна треть отрезка в середине (то есть все члены, имеющие троичную дробь, начинающуюся с единицы). На следующем шаге мы делаем то же для второго положения точки (рис. 1.6) и т. д. В итоге выбрасываем все числа, которые имеют 1 в их разложении, как троичной дроби.

Диаграмма (рис. 1.6) показывает, что многие числа исчезают на первом шаге, например число 0.5 (десятичное). Число 0.8 исчезает на втором шаге, так как  $0.8 = 0.2101$ . Число  $0.3 = 0.0220$  никогда не исчезает. Таким образом, множество Кантора можно определить как множество всех чисел между нулем и единицей, которые можно записать в троичной системе, используя лишь «0» и «2». Числа «0» и «1» также включаются, ибо  $1 = 0.\underline{2}$  (в троичном виде:  $1 \approx 0.2222\dots$ , подобно  $1 \approx 0.9999\dots$  в десятичной системе).

## Глава 2. Фракталы и меандры

В этой главе понятие «*фрактал*» вводится с помощью эксперимента по определению длины Британского побережья.

### 2.1. Эксперимент Ричардсона

В настоящее время, благодаря публикациям Мандельброта, фракталам уделяется много внимания. Его книга «*Фрактальная геометрия природы*» [1] с прекрасными иллюстрациями, историческими анекдотами и т. д. насыщена богатой информацией по этому предмету. Эта работа имела большой успех. Эксперимент Льюиса Ричардсона (1881 – 1953), одного эксцентричного метеоролога, возможно, и убедил Мандельброта сделать фракталы делом своей жизни.

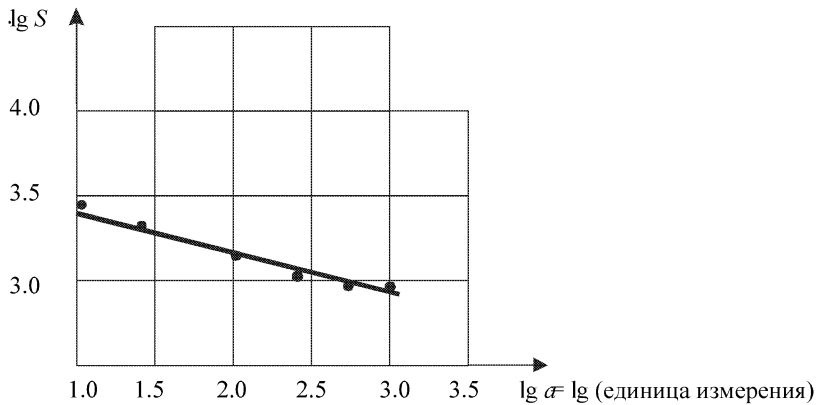


Рис. 2.1. Результат эксперимента Ричардсона



В работе Ричардсона, опубликованной после его смерти, Мандельброт в 1961 году обнаружил формулу для определения длины  $S$  западного Британского побережья и испано-португальской границы. Ричардсон заметил, что результаты сильно зависят от масштаба, который используется на карте. Карта с масштабом  $1 : 10000000$  (1 см – 100 км) менее подробная, чем, например, туристическая карта с масштабом  $1 : 100000$  (1 см – 1 км). Нетрудно убедиться, что на туристической карте побережье становится длиннее.

Этот же феномен можно обнаружить, используя одну карту, но применяя каждый раз все более и более мелкие единицы измерения.

Полученные Ричардсоном значения лежат вблизи прямой линии (см. рис. 2.1). Тогда

$$\lg S \approx -0.22 \lg a + \lg S_1, \quad (2.1)$$

где  $S$  – длина побережья,  $S_1$  – длина, при измерении которой использовались единицы измерения в 1 км. Число 0.22 определяет угол наклона прямой. Из (2.1) находим:

$$S = S_1 a^{-0.22} \quad \text{или} \quad S = S_1 \left( \frac{1}{a} \right)^{0.22}. \quad (2.2)$$

Поэтому, если, скажем, « $a$ » уменьшается в 32 раза, то  $S$  увеличивается приблизительно вдвое. Теоретически, если  $a \rightarrow 0$ , то  $S \rightarrow \infty$ . Но тогда западное побережье Британии имеет бесконечную длину? Это на самом деле было бы так, если бы при каждом уменьшении масштаба были видны новые изгибы береговой линии. В действительности этого нет.

Было бы лучше определить криволинейность такой границы степенью ее изгибания, т. е. некоторым числом. Мандельброт добавил 1 к показателю степени во второй формуле (2.2) (минус угол наклона прямой на рис. 2.1) и получил число  $D$ , которое он назвал «*фрактальной размерностью*» побережья (границы).

## 2.2. Степень изгибания кривой (первое знакомство с фрактальной размерностью)

В математике существует несколько различных определений размерности, наиболее известна топологическая размерность. Идея определения размерности была высказана еще А. Пуанкаре. *Размерность пустого множества полагается равной «-1» и далее по индукции. Если мы знаем, что такое размерность до  $n-1$ , то размерность  $n$  некоторого множества означает, что его можно разбить на сколь угодно мелкие части множествами размерности  $n-1$  и нельзя этого сделать множествами размерности  $n-2$ .* Точка, линия, поверхность имеют, соответственно, топологические размерности 0, 1, 2. Более точное понятие топологической размерности ввел нидерландский математик Брауэр (1881–1966). Другие математики (Хаусдорф, Безикович, Колмогоров) определили размерность по-другому. Их определения необязательно дают целые размерности (подробности смотри в главе 12).

Вернемся к эксперименту Ричардсона. Мы выбираем произвольно малую единицу измерения « $a$ », линейку. Затем измеряем длину кривой линии, заменяя ее ломаной линией, составленной из равных отрезков длины « $a$ ». Если линейка используется  $N$  раз, то общая измеряемая длина равна  $Na$ . Далее, в соответствии с определением Мандельброта, «фрактальная размерность» ломаной линии равна:

$$D = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\lg N}{\lg \frac{1}{a}} \quad (2.3)$$

Назовем  $D$  «*степенью изгибания*» кривой линии (границы). Более точное определение фрактальной размерности и других «нецелых» размерностей см. в главе 11. В некоторых случаях дробь в (2.3) имеет постоянные значения на каждом шаге. Тогда

$$D = \frac{\lg N}{\lg \frac{1}{a}} \quad (2.4)$$

или

$$N = (l/a)^D. \quad (2.5)$$

Если обозначить  $S = Na$ , то получим

$$S = (l/a)^{D-1}. \quad (2.6)$$

Эта формула показывает, как измеряемая длина увеличивается при уменьшении единицы измерения.

### 2.3. Кривая Коха

В 1904 году математик Кох дал пример кривой, которая нигде не имеет касательной. Представьте кривую, состоящую из частей, каждая из которых бесконечной длины. Рис. 2.2 ( $p = 5$ ) является хорошим приближением кривой Коха. Построение кривой Коха похоже на построение точек множества Кантора. Начинаем с отрезка-основы: удаляем его среднюю третью часть и заменяем ее сторонами равностороннего треугольника (см. рис. 2.3).

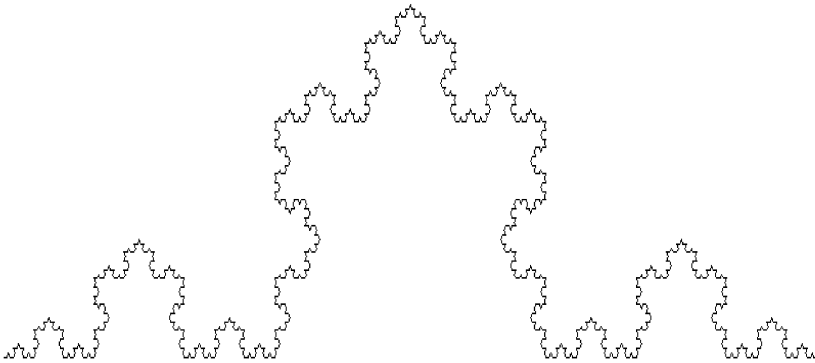
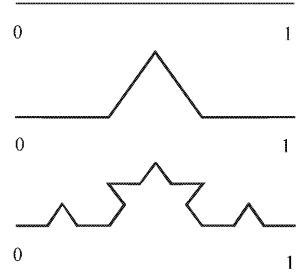


Рис. 2.2. Кривая Коха

Мысленно мы можем представить кривую Коха как предел таких операций. Если основа имеет длину 1, то фрагмент будет состоять из четырех отрезков, каждый длины  $1/3$  и, следовательно, общей длины  $4/3$ . На следующем шаге получаем ломаную, состоящую из 16 отрезков и имеющую общую длину  $16/9$  или  $(4/3)^2$  и т.д. Т.к. на каждом шаге



$$\frac{\lg 4}{\lg 3} = \frac{\lg 4^2}{\lg 3^2} = \dots \quad (2.7)$$

Рис.2.3. Последовательные приближения кривой Коха

то можно применить формулу (2.4). Тогда фрактальная размерность

$$D = \frac{\lg 4}{\lg 3} = 1.26\dots \quad (2.8)$$

Кривая Коха самоподобна: каждая часть является миниатюрной копией целого. Можно попробовать самим написать программу построения кривой Коха для случаев, когда основа – отрезок или многоугольник. Для облегчения этого задания дадим анализ построения кривой Коха.

Фиксируем степень приближения  $p$ . Это означает, что мы будем применять « $p$ » преобразований к «основе». Если основа – это отрезок, то результатом будет ломаная линия, состоящая из  $4^p$  отрезков равной длины  $3^{-p}$ . Будем нумеровать отрезки от 0 до  $4^p - 1$  включительно. Для каждого шага (соответствующего индексу  $n$ ) должен нарисоваться отрезок, точнее говоря, вектор. Направление вектора определяется следующим образом.

Запишем индекс  $n$  отрезка в четверичной системе. Например, для отрезка с номером 482 ломаной линии порядка 5 ( $p = 5$ ) мы получим:  $482 = 1 * 256 + 3 * 64 + 2 * 16 + 0 * 4 + 2$ , т. е. 482 равно 13202 в четверичной системе. Каждое из четырех возможных направлений (на

самом деле можно говорить о двух) определяется числом, как показано на рис. 2.4. Тогда мы найдем направление отрезка с  $n = 482$ :

$$\Phi = \frac{\pi}{3} + 0 + \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 0 + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

Общая формула имеет вид:

$$\begin{aligned} n &= t_0 + t_1 4 + t_2 4^2 + \dots + t_{p-1} 4^{p-1} \\ \Phi &= a(t_0) + a(t_1) + a(t_2) + \dots + a(t_{p-1}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

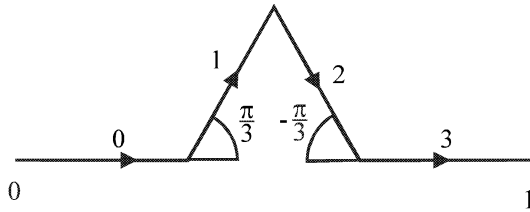


Рис. 2.4. Фрагмент фрактала Коха

В нашем примере  $a(0) = a(3) = 0, a(1) = \pi / 3, a(2) = -\pi / 3$ .

На рис. 2.5 показано, как отрезок с  $n = 482$  получается из первоначальной основы. Здесь мы пренебрегли масштабом. Удобнее использовать для  $n$  в формуле (2.9) не целые числа, а четверичные дроби, имеющие  $p$  цифр после запятой. Для этого достаточно поделить номер на  $4^p$   $\left(\frac{482}{4^5} = \frac{482}{1024} = 0.13202\right)$ . Если  $p \rightarrow \infty$ , то длина каждого отрезка стремится к нулю, то есть отрезок превращается в точку. Тогда кривая Коха является образом единичного отрезка  $[0, 1]$ .

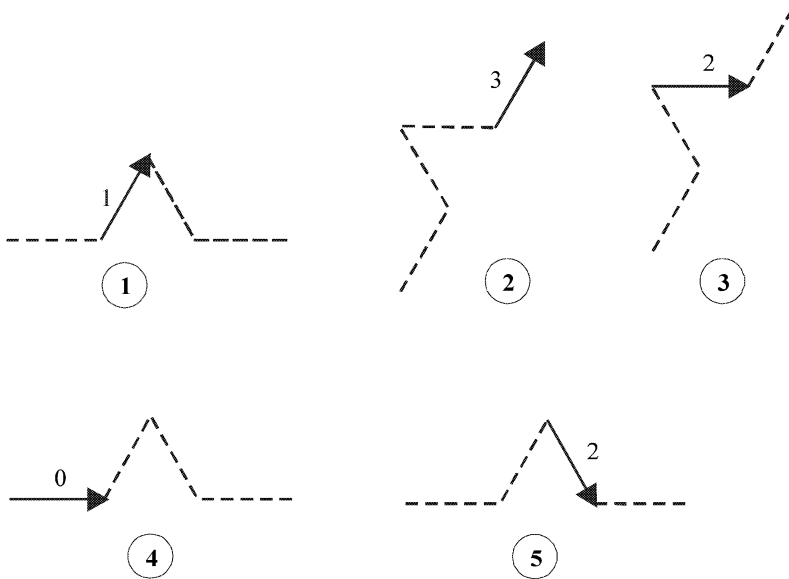


Рис. 2.5. Фрактал Коха и четверичная система счисления

## 2.4. Вариации на тему кривой Коха

Кривую Коха можно строить на сторонах правильного многоугольника (т. е. основа – правильный многоугольник), при этом получаются довольно красивые картинки. Если в качестве основы взять равносторонний треугольник, а в качестве фрагмента – фрагмент Коха, ориентированный наружу треугольника, то получим фигуру, представленную на рис. 2.6 ( $p = 5$ ). Мандельброт назвал ее островом Коха.

Ориентируя фрагмент Коха внутрь треугольника, получим иную фигуру, представленную на рис. 2.7 ( $p = 5$ ).

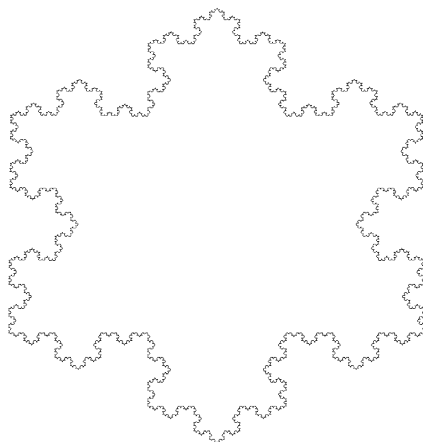


Рис. 2.6. Остров Коха

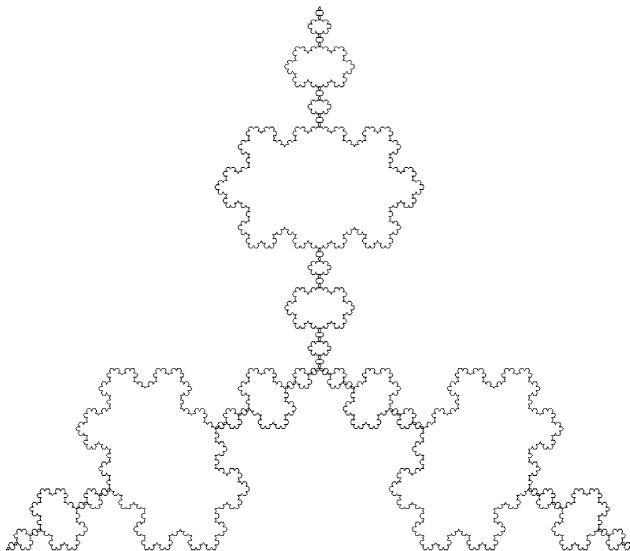


Рис. 2.7. Остров Коха, ориентированный внутрь треугольника

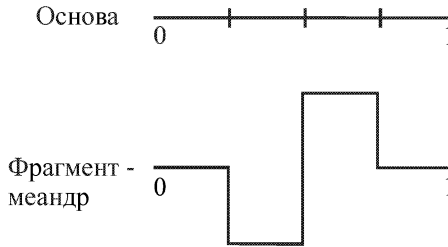


Рис. 2.8. Основа и фрагмент для построения фрактала Минковского

Основа и фрагмент, показанные на рис. 2.8, позволяют построить фрактал Минковского. После четырех шагов получаем фигуру, представленную на рис. 2.9 ( $p = 5$ ).

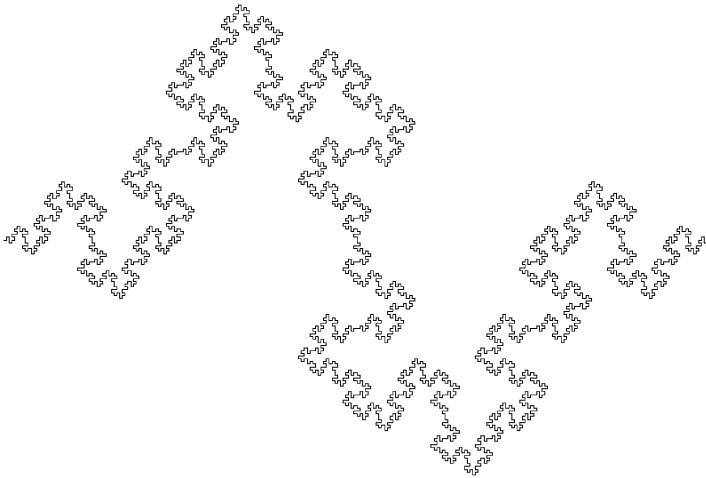


Рис. 2.9. Фрактал Минковского

В этом случае также можно использовать формулу (2.4) для вычисления  $D$ :

$$D = \frac{\lg N}{\lg \frac{1}{a}} = \frac{\lg N^2}{-\lg a^2}. \quad (2.10)$$

При  $N = 8$ ,  $a = 1/4$ , где  $a$  – длина отрезка, получаем  $D = 1.5$ .



Попробуйте написать программу построения приближения для фрактала Минковского. Эта программа очень похожа на программу построения кривой Коха за исключением того, что здесь удобнее использовать восьмеричную систему счисления.

## 2.5. Общая схема построения конструктивных фракталов

Теперь мы можем рассмотреть более общую процедуру (алгоритм) построения подобных фракталов. Предполагаем, что основа состоит из  $u$  отрезков, а фрагмент из  $v$  отрезков. Вершины для основы и фрагмента должны быть явно заданы.

На рис. 2.10 точка  $O$  является началом координат, т. е. имеет координаты  $(0, 0)$ , точка  $E$  имеет координаты  $(1, 0)$ . Рассмотрим точки  $P_1(0.4, 0.2)$ ,  $P_2(0.6, -0.2)$ . Тогда  $OP_1 = P_1P_2 = P_2E = 1/\sqrt{5}$ .

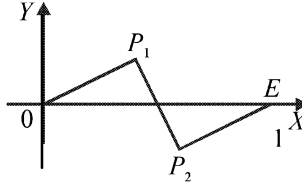


Рис. 2.10. Фрагмент в декартовой системе координат

В качестве основы возьмем, например, квадрат с вершинами  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ . Тогда  $u=4$ ,  $v=3$ ; вершины основы:  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ; вершины фрагмента:  $(0.4, 0.2)$ ,  $(0.6, -0.2)$ . Зададим также порядок аппроксимации  $p$ . Тогда из отрезка  $OE$  образуется ломаная с  $v^p - 1$  вершинами.

Для вычисления координат вершин используется преобразование подобия

$$\begin{cases} x' = (x_2 - x_1)x - (y_2 - y_1)y + x_1 \\ y' = (y_2 - y_1)x + (x_2 - x_1)y + y_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

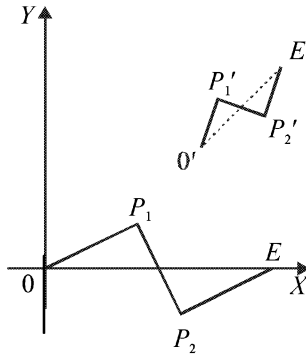


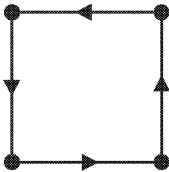
Рис. 2.11. Преобразование подобия

При этом  $O(0, 0) \rightarrow O'(x_1, y_1)$ ,  $E(1, 0) \rightarrow E'(x_2, y_2)$ ,  $P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$ .

Подробнее о таких преобразованиях будем говорить позже, в главе 4.

### 2.5.1. Варианты

1) Основа:



квадрат с вершинами  $(\pm 1, \pm 1)$

Фрагмент:

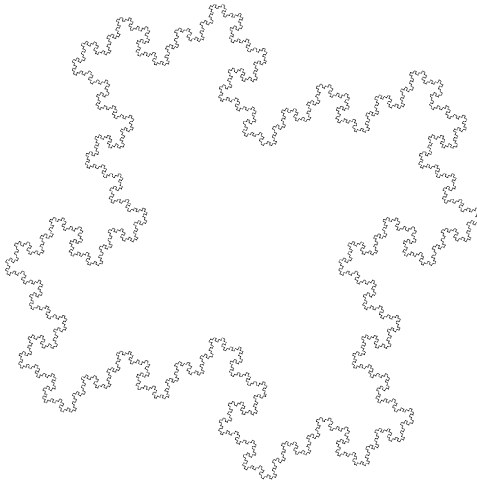


Рис. 2.12. Фрактальный остров

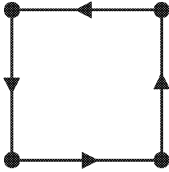
с промежуточными точками

$(0.4, 0.2), (0.6, -0.2)$ .

$u = 4, v = 3, p = 6$ .

Результат представлен на рис. 2.12.

2) Основа:



квадрат с вершинами  $(\pm 1, \pm 1)$ .

Фрагмент:

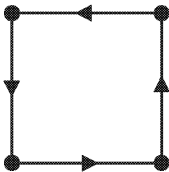


с промежуточными точками  $(0.25, 0.25), (0.75, -0.25)$ .

$u = 4, v = 3, p = 6$ .

Результат показан на рис. 2.13.

3) Основа:



квадрат с вершинами  $(\pm 1, \pm 1)$ .

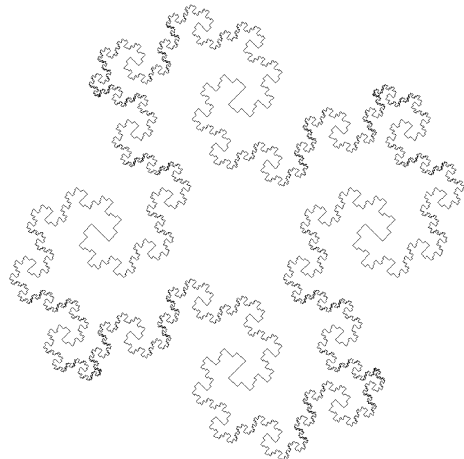


Рис. 2.13. Остров Минковского

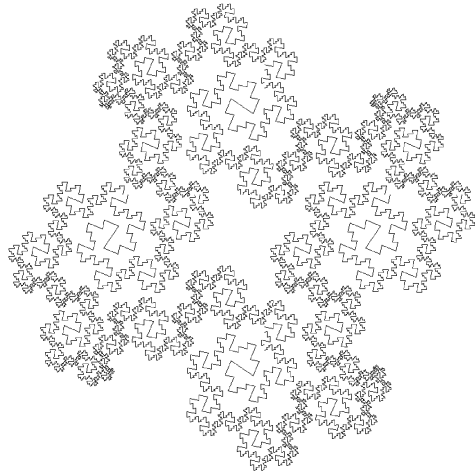


Рис. 2.14. Остров фьордов

Фрагмент:



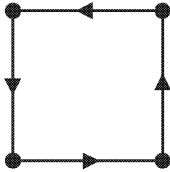
с промежуточными точками

$(0.3, 0.3), (0.7, -0.3)$ .

$u = 4, v = 3, p = 6$ .

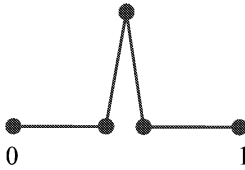
Результат можно увидеть на рис. 2.14.

4) Основа:



квадрат с вершинами  $(\pm 1, \pm 1)$ .

Фрагмент:



с промежуточными точками  $(0.47, 0), (0.5, 0.47), (0.53, 0)$ .

$u = 4, v = 4, p = 5$ .

Результат представлен на рис. 2.15.

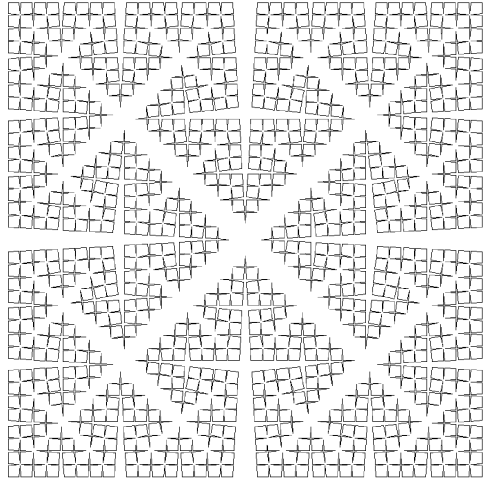


Рис. 2.15. Резаный квадрат

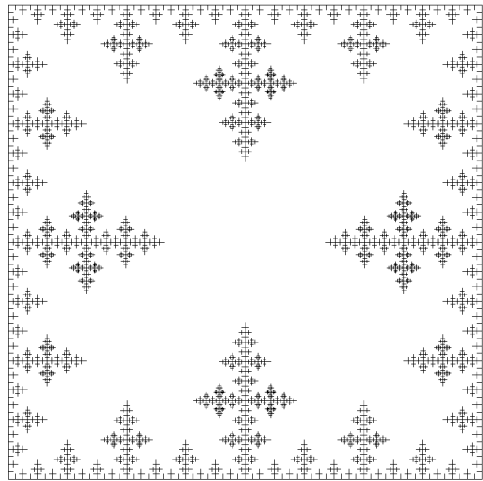
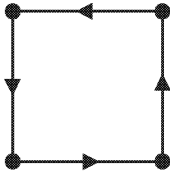


Рис. 2.16. Ледовый квадрат

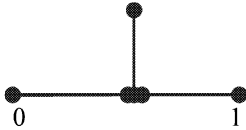
5)

Основа:



квадрат с вершинами  $(\pm 1, \pm 1)$ .

Фрагмент:

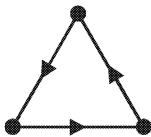


с промежуточными точками  $(0.5, 0)$ ,  $(0.5, 0.33)$ ,  $(0.5, 0)$ .  
 $u = 4, v = 4, p = 6$ .

Результат показан на рис. 2.16.

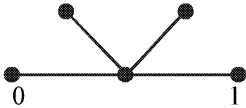
6)

Основа:



равносторонний треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(0.5, 0.85)$ ,  $(0, 1)$ .

Фрагмент:



с промежуточными точками  $(0.5, 0)$ ,  $(0.375, 0.2165)$ ,  $(0.5, 0)$ ,  $(0.625, 0.2165)$ ,  $(0.5, 0)$ .

$u = 3, v = 6, p = 5$ .

Результат представлен на рис. 2.17.

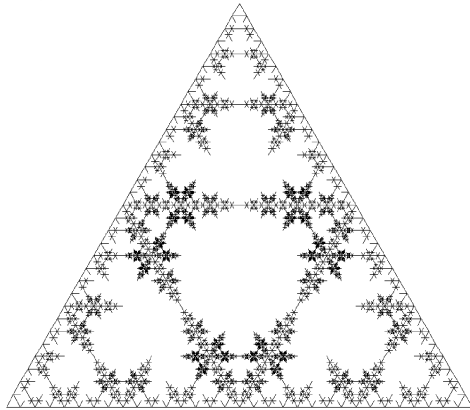


Рис. 2.17. Ледовый треугольник

## 7) Фрактал Леви.

Возьмем в качестве фрагмента половину квадрата, т. е. отрезок заменяем половиной квадрата.

Основа:



отрезок.

Фрагмент:



с промежуточной точкой  $(0.5, 0.5)$ .

$u = 1, v = 2, p = 13$ .

Результат представлен на рис. 2.19.

Предел кривой при  $p \rightarrow \infty$  называется кривой Леви. На рис. 2.19

показано приближение кривой Леви при  $p = 13$ . Французский математик Том Леви (1886 – 1971) был одним из первых ученых, которые исследовали фрактальные кривые. Если в качестве основы взять квадрат, то получим фигуру, представленную на рис. 2.20 ( $p = 13$ ).

Кривую Леви можно анализировать так же, как и кривую Коха. Положение  $2^p$  отрезков  $p$ -го приближения определяется двоичным разложением: индекс  $n$  отдельного отрезка, считая от начала, записывается в двоичном виде

$$n = t_0 + t_1 * 2 + t_2 * 2^2 + \dots + t_{p-1} * 2^{p-1}. \quad (2.12)$$

Далее вычисляем сумму  $S$  всех двоичных цифр:

$$S = t_0 + t_1 + \dots + t_{p-1}. \quad (2.13)$$

Направление  $n$ -го отрезка будет  $\varphi = \frac{S\pi}{2}$  (по часовой стрелке).

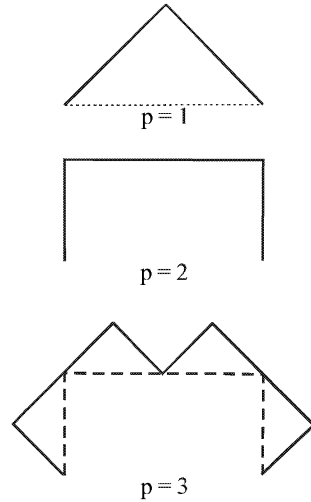


Рис. 2.18. Последовательные приближения фрактала Леви

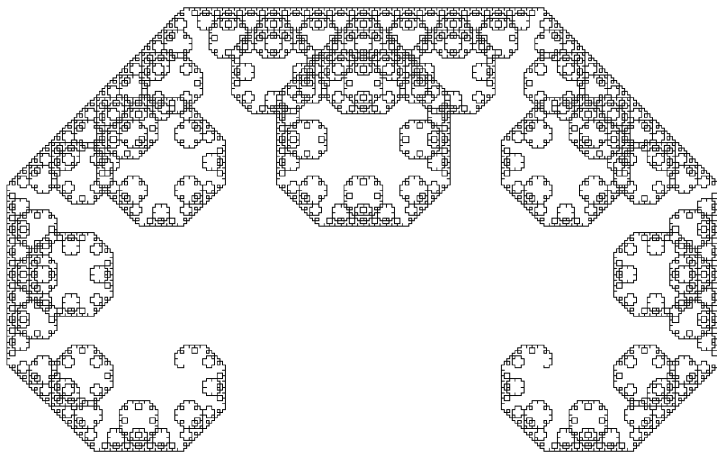


Рис. 2.19. Фрактал Леви

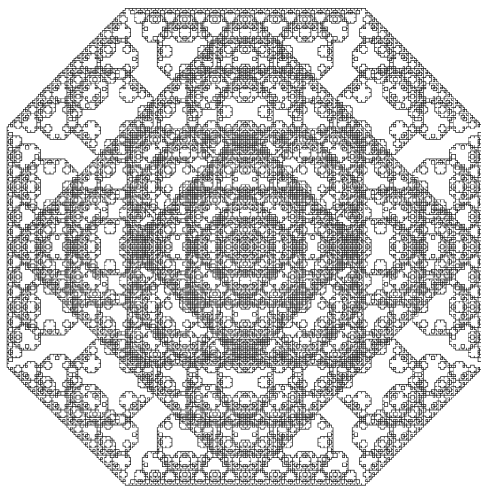


Рис. 2.20. Ковер Леви

## 2.6. Семейство драконов

Продеваем следующую процедуру. Сложим полоску бумаги поперек вдвое. Повторим это дважды. После разворачивания получим полоску, состоящую из восьми кусков (см. рис. 2.21). Посмотрев на эту полоску в профиль, мы увидим ломаную линию. Этот эксперимент по сгибанию бумаги можно продолжить, но не очень долго.

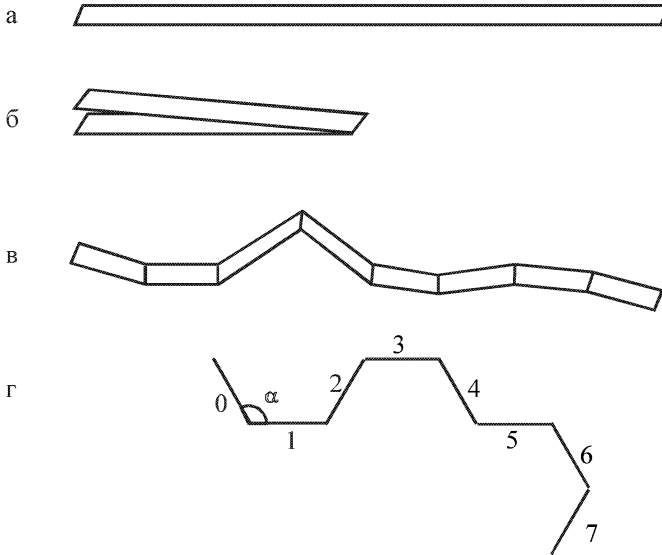


Рис. 2.21. Последовательность сложений полоски бумаги

Пусть угол в каждом сгибе один и тот же. Обозначим его через  $\alpha$ . На каждой складке мы поворачиваем «влево» или «вправо». Введем параметр  $d$ , который принимает два значения:  $d = 1$  (соответствует повороту влево),  $d = -1$  (соответствует повороту вправо). Тогда получаем следующие последовательности:

$\{n\}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\{d\}$	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1



Тогда

$$d(16) = d(8) = d(4) = d(2) = d(1) = 1$$

$$d(12) = d(6) = d(3) = -1$$

$$d(10) = d(5) = 1$$

Следовательно, имеем следующие правила:

$$d(n) = 1, \quad n = 1 + 4m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$d(n) = -1, \quad n = 3 + 4m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.14)$$

$$d(n) = d(n/2), \quad n = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

### 2.6.1. Кривая «Дракона»

Следуя правилу, приведенному выше, мы можем нарисовать ломаную линию, которая получается в результате сгибания полоски любое число раз.

Рис. 2.22 показывает ломаную линию с углом  $\alpha = 100^\circ$  при вершине и  $p = 6$ . Эта фигура состоит из 64 отрезков. Если положить  $\alpha = 90^\circ$  и начало линии в точке  $(0, 0)$ , а конец – в  $(1, 0)$ , то получим кривую Дракона, изображенную на рис. 2.23 для  $p = 14$  ( $2^{14} = 16384$  отрезков).

Ломаная линия на рис. 2.23 ( $p = 14$ ) показалась похожей ее первооткрывателю Дж. Хайверу на китайских драконов, поэтому она и получила название кривой Дракона. Эта ломаная не пересекает саму себя и, кроме того, она регулярно заполняет часть плоскости (занятой драконом).

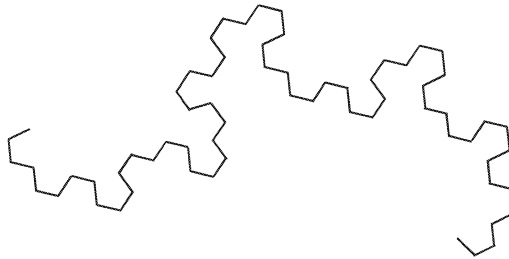


Рис. 2.22. Часть кривой «Дракона»

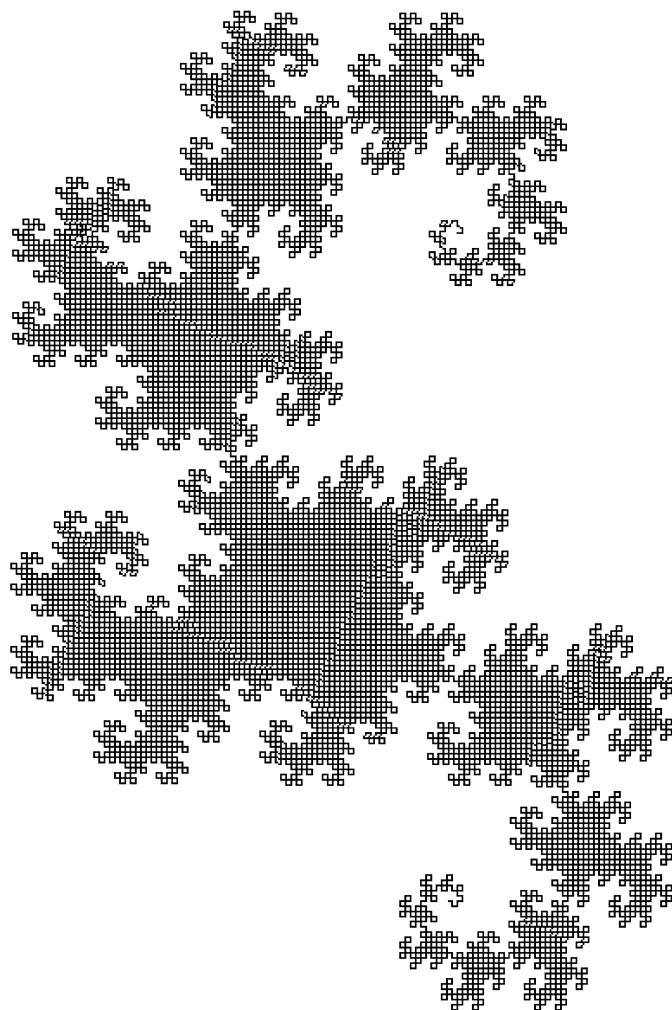


Рис. 2.23. Кривая «Дракона»

Можно немного скруглить углы, как показано на рис. 2.24.

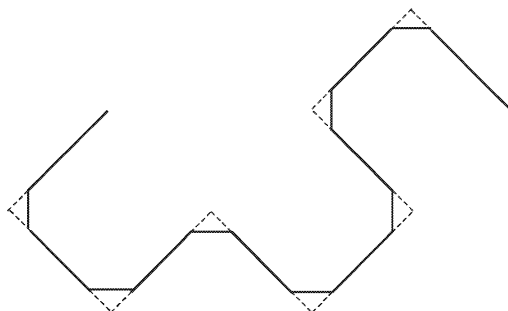


Рис. 2.24. Скругление кривой «Дракона»

При  $p = 11$  получим кривую, изображенную на рис. 2.25.

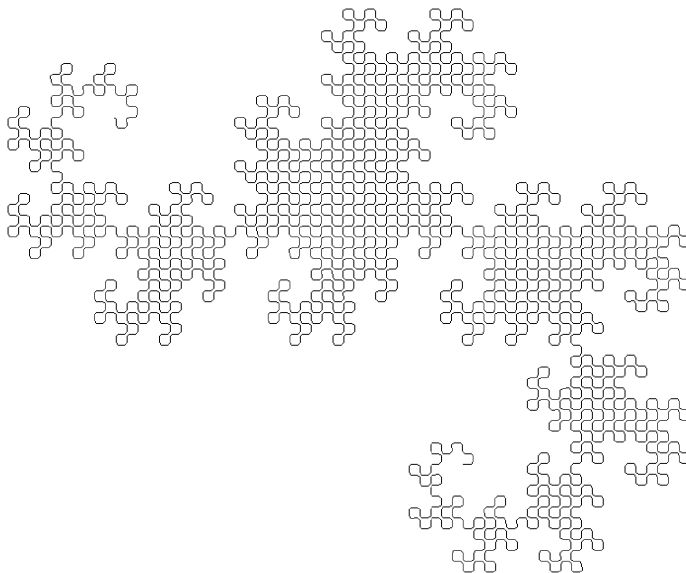


Рис. 2.25. Сглаженная кривая «Дракона»

## Глава 3. Спирали, деревья, звезды

Фигуры и формы, о которых пойдет речь в этой главе, заинтересовали еще древних греков. Пифагор доказал свою знаменитую теорему, построив фигуру, в которой на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В наш век эта фигура Пифагора выросла в «дерево». Внимание Архимеда привлекли спирали: он даже написал о них трактат. Один из видов спиралей носит его имя. Спирали являются строительными блоками живого мира. Ядро клетки состоит из двойной спиральной структуры – ДНК, содержащей в себе генетический код формирующегося организма. Иногда и сами организмы имеют спиральную структуру, например, улитки.

В неживой природе примером спиральной структуры может служить спиральная галактика.

### 3.1. Спирали

Можно выделить три типа плоских спиралей (раскручивающуюся, Архимеда и роста), из которых для наших целей самой важной является спираль роста. Остановимся кратко на двух других типах спиралей: 1) раскручивающаяся спираль, 2) спираль Архимеда.

1) Раскручивающаяся спираль (рис. 3.1). Когда мы разматываем нить с катушки, держа ее все время натянутой, то конец нити описывает спираль. Читатель, используя рис. 3.1, легко сможет представить именно тот случай, о котором мы говорим. Декартовы координаты точки  $P$  на спирали находятся по формулам:

$$\begin{aligned}x &= a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \\y &= a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)\end{aligned}\quad (3.1)$$

где  $(a, \varphi)$  – полярные координаты точки  $A$  на катушке (черный круг на рис. 3.1),  $(x, y)$  – координаты точки  $P$  (см. рис. 3.1).

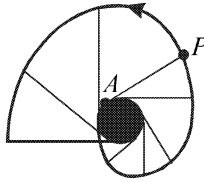


Рис. 3.1. Раскручивающаяся спираль

2) Спираль Архимеда (рис. 3.2).

В полярных координатах уравнение спирали Архимеда имеет вид:

$$r = a\varphi, \quad (3.2)$$

где  $a > 0$  – постоянное число, определяющее расстояние между соседними витками.

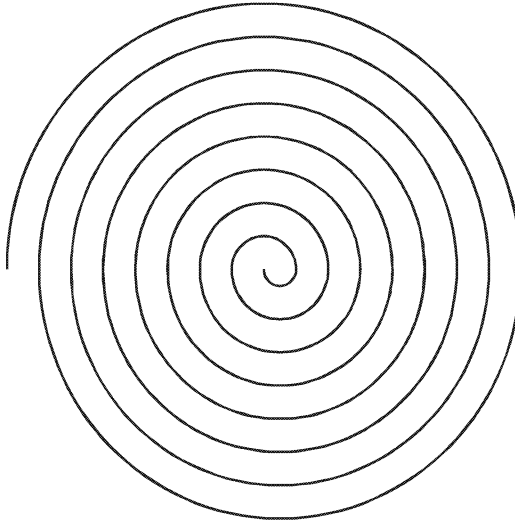


Рис. 3.2. Спираль Архимеда

3) Спираль роста (логарифмическая спираль).

В полярных координатах спираль роста имеет вид:

$$\ln r = a\varphi \quad (3.3)$$

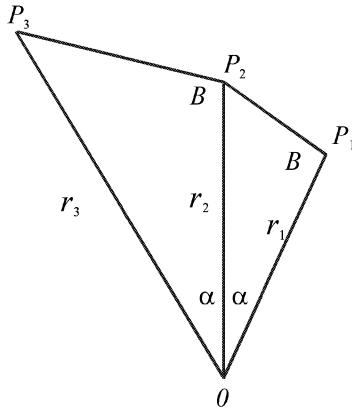


Рис. 3.3. Три последовательные точки логарифмической спирали

Для логарифмических спиралей справедливо соотношение:

$$\ln \frac{r_3}{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{или} \quad \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \text{или} \quad r_2^2 = r_1 r_3. \quad (3.4)$$

Следовательно,  $r_2$  является средним геометрическим  $r_1$  и  $r_3$ . Иначе говоря, полярные радиусы  $r_1, r_2, r_3, \dots$  последовательных точек логарифмической спирали  $P_1, P_2, P_3, \dots$  при увеличении полярных углов на постоянную величину « $a$ » образуют геометрическую последовательность.

Уравнение логарифмической спирали можно записать в виде:

$$r = \exp(a\varphi). \quad (3.5)$$

Поэтому при  $a > 0$  спираль раскручивающаяся, при  $a < 0$  – скручивающаяся, при  $a = 0$  – окружность. Более общая форма для логарифмической спирали имеет вид:

$$r = r_0 \exp(a\varphi), \quad (3.6)$$

где  $r_0$  – некоторая постоянная.

Логарифмическая спираль приводила в изумление художников и математиков. Знаменитый швейцарский математик Якоб Бернулли (1654 - 1705) изучал ее и назвал «*spira mirabilis*» (лат.) – чудесной спи-

рально. Он обнаружил самоподобие этой спирали: изменение масштаба спирали дает такой же результат, что и вращение спирали как целого. Действительно, поворот спирали на угол  $\gamma$  означает замену  $\varphi$  на  $\varphi - \gamma$ . Поэтому

$$r = r_0 \exp(a(\varphi - \gamma)) = r_0 \exp(-a\gamma) \exp(a\varphi) = \bar{r}_0 \exp(a\varphi). \quad (3.7)$$

То есть получаем ту же спираль, но в другом масштабе. Бернулли это свойство казалось таким удивительным, что на его надгробии в соборе Базеля начертаны слова «*Eadem mutata resurgo*» (преобразованный, я восстану снова неизменным).

### 3.2. Дерево Пифагора

Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман (1891 – 1961) во время второй мировой войны, используя для этого обычную чертежную линейку.

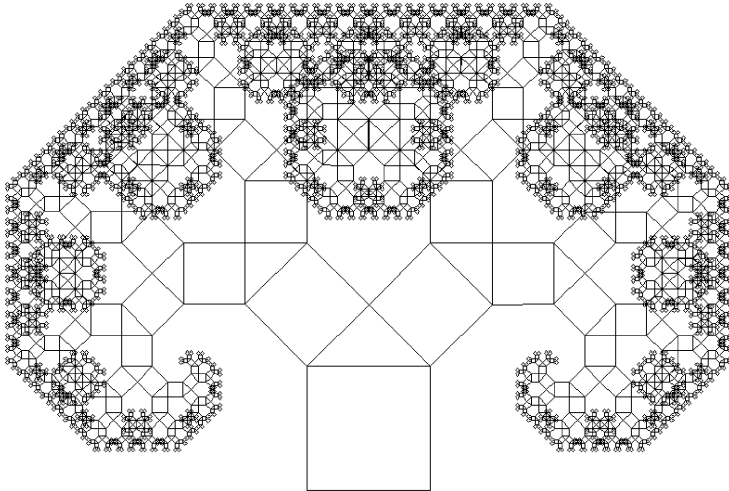


Рис. 3.4. Дерево Пифагора

Пример Пифагорова дерева дан на рис. 3.4 ( $p = 12$ ). Если мы пронумеруем квадраты, как на рис. 3.5, то обнаружим, что квадрат с

индексом  $n$  «держит на себе» равнобедренный треугольник, от которого произрастают два более мелких квадрата. Квадраты слева имеют индекс  $2n$ , справа –  $(2n+1)$ . Вместе прямоугольный треугольник, два квадрата на его катетах и квадрат на гипотенузе дают геометрическое представление теоремы Пифагора. Если площадь первоначального квадрата равна единице, то общая площадь квадратов 2 и 3 также будет единица. То же самое получим для каждого следующего уровня. Тогда квадраты с номерами 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 имеют общую площадь ту же, что и основной квадрат.

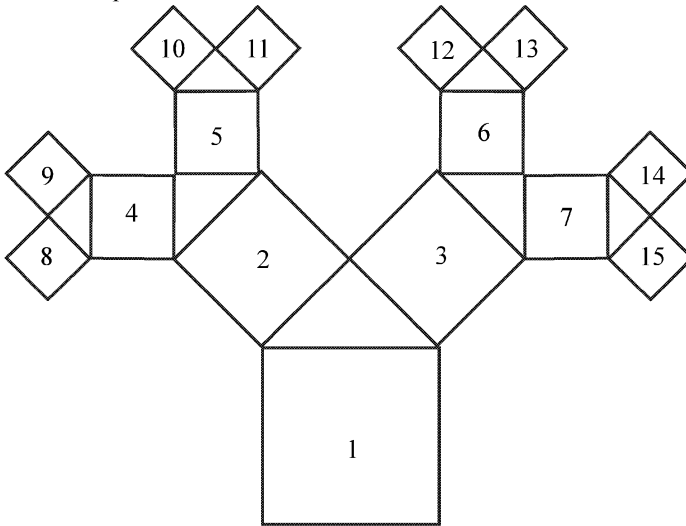


Рис. 3.5. Первые стадии построения дерева Пифагора

Позицию квадрата, например с номером 13, можем получить, используя двоичное представление  $13 = 1\underline{101}$ . Читая цифры слева направо и пренебрегая самой левой позицией, получаем: 1 (вправо), 0 (влево), 1 (вправо). Итак, построение пифагорова дерева связано с двоичной системой счисления. Этот факт удобно использовать при его построении.



### 3.2.1. Склонившееся (спиральное) дерево Пифагора

Как обобщение стандартного дерева Пифагора, Босман предложил строить склонившееся дерево Пифагора. Схема построения такого дерева показана на рис. 3.6. Фигура образуется добавлением на каждом шаге справа квадрата.

Завиток фигуры – это логарифмическая (ломаная) спираль, которая определяется преобразованием подобия  $R$ .

Преобразование подобия  $R$  – это поворот на угол  $\alpha$ , комбинируемый с уменьшением масштаба в  $\cos \alpha$  раз. Можно рассматривать преобразование подобия  $L$ , действующее слева: поворот на угол  $\pi/2 - \alpha$  в комбинации с уменьшением масштаба в  $\sin \alpha$  раз. Тогда получим дерево, которое показано на рис. 3.7, где  $\alpha = \pi/6$  ( $30^\circ$ ) [3].

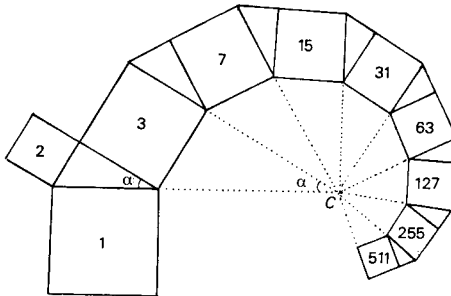


Рис. 3.6. Логарифмическая спираль в склонившемся дереве Пифагора

Можно упростить дерево Пифагора, отбросив квадраты и рисуя только отрезки, которые соединяют «центры» треугольников. Сами треугольники не рисуются. В результате получим обнаженное дерево (первые стадии построения показаны на рис. 3.8(а), а 10-я стадия – на рис. 3.8(б) ( $p = 14$ )).

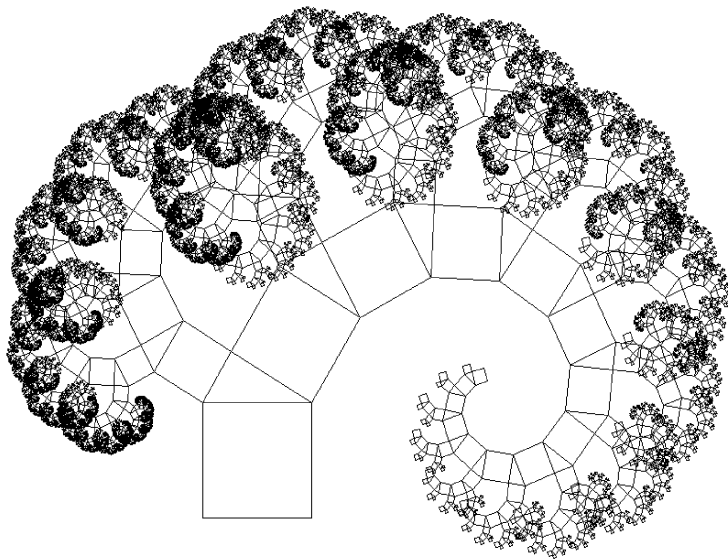


Рис. 3.7. Склонившееся дерево Пифагора ( $p = 14$ )

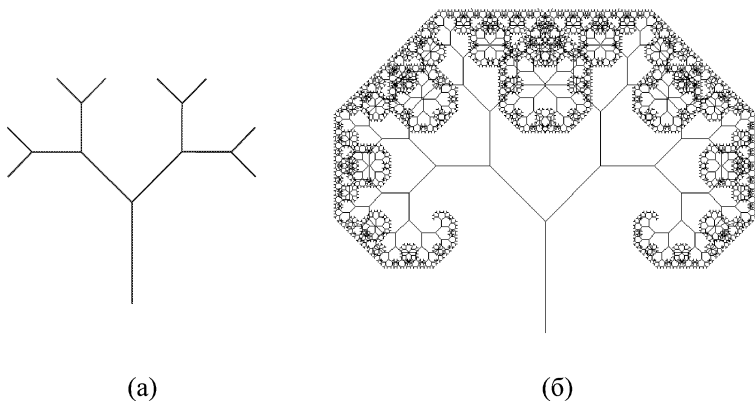


Рис. 3.8. Обнаженное дерево Пифагора

В книге Мандельброта [1] есть и другие варианты дерева Пифагора.

Одна из версий, основанная на стволе, показанном на рис. 3.9, приведена на рис. 3.10 ( $p = 11$ ).



Рис. 3.9. Ствол дерева Мандельброта

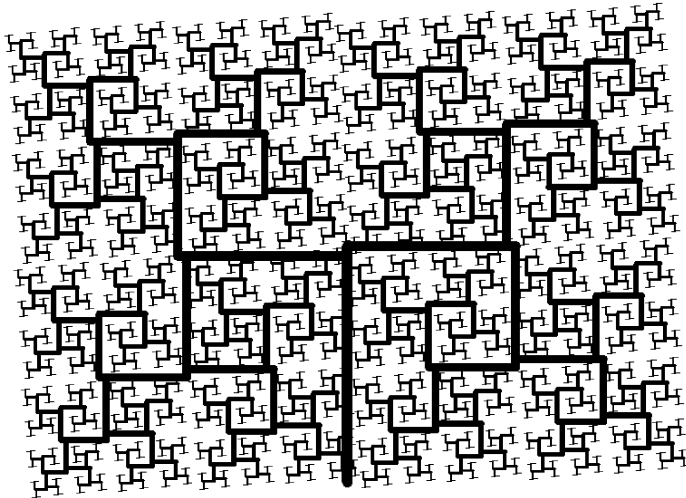


Рис. 3.10. Дерево Мандельброта

Мандельброт построил и реалистичное фрактальное дерево (рис. 3.12), основанное на модели, показанной на рис. 3.11.

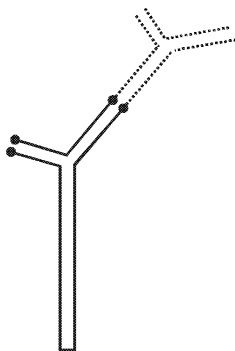


Рис. 3.11. Модель реалистичного дерева

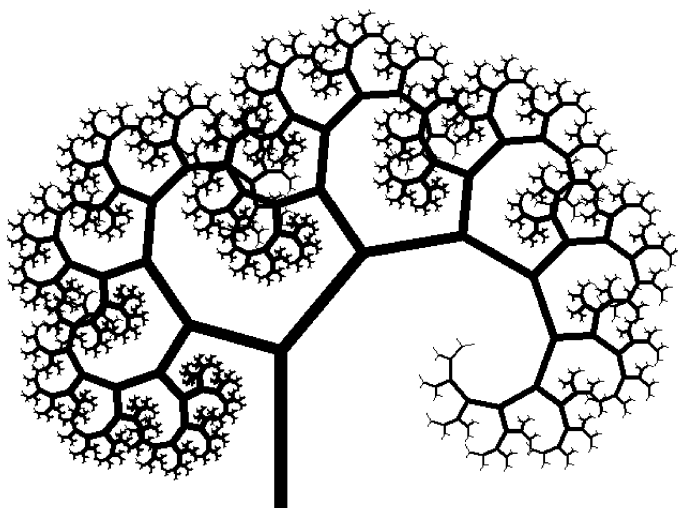


Рис. 3.12. Реалистичное дерево ( $p = 11$ )

### 3.3. Звезды

На рис. 3.13 показан звездный фрактал. Он состоит из правильной пятиконечной звезды с гирляндой из 5 меньших образцов. Каждая из этих 5 более мелких звезд несет на своих четырех свободных концах

еще более мелкие звезды. Теоретически этот процесс можно продолжать бесконечно. В результате получим звездный фрактал, обладающий самоподобием. На рис. 3.13 показано 5 шагов (1280 отрезков). Этот звездный фрактал строится как замкнутая ломаная линия, последовательные отрезки всегда пересекаются под одним и тем же углом. Фрагмент с  $\alpha = 4\pi/5$  ( $144^\circ$ ) изображен на рис. 3.14. Предположим, что отрезки пронумерованы от 0 до  $n = 1279$ . Если первый отрезок с индексом  $n = 0$  имеет направление  $\varphi = 0$ , то направление произвольного отрезка с индексом  $n$  будет  $n\alpha$ . При построении такого фрактала мы должны иметь правило, по которому определяется длина  $n$ -го отрезка, если мы знаем длину  $(n-1)$ -го отрезка. Для случая, изображенного на рис. 3.13, имеем 5 различных длин:  $1, r, r^2, r^3, r^4$ , где  $r$  – показатель уменьшения (на рис. 3.13 он равен 0.35).

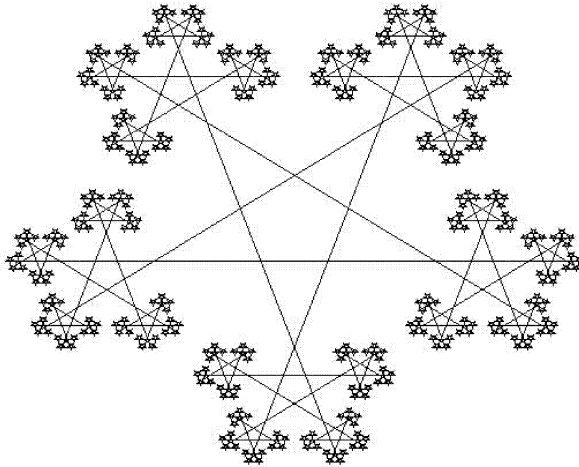


Рис. 3.13. Звездный фрактал

Правило, на котором основано построение рис. 3.13, следующее:

$n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, \dots$	длина $r^4$
$n = 4, 8, 12, 20, 24, 28, 36, 40, 44, 52, \dots$	длина $r^3$
$n = 16, 32, 48, 80, 96, 112, \dots$	длина $r^2$
$n = 64, 128, 192, 320, 384, 448, \dots$	длина $r$
$n = 0, 256, 512, 768, 1024, \dots$	длина 1

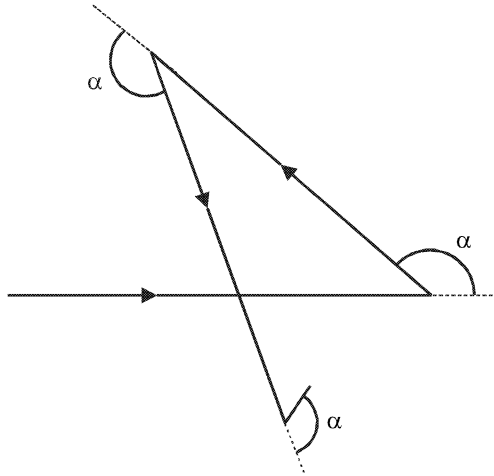


Рис. 3.14. Схема построения звездного фрактала

Отсюда следует, что длина отрезка с индексом  $n$  зависит от числа множителей 4 в  $n$ . Обобщим это правило так, чтобы можно было построить другой звездный фрактал. Обозначим число шагов через  $p$  и возьмем произвольное число  $\nu$  вместо 4.

Тогда мы получим общее правило:

$n$ не имеет множителя $\nu$	Длина $r^{p-1}$
$n$ имеет 1 множитель $\nu$	Длина $r^{p-2}$
...	...
$n$ имеет, по крайней мере, $(p-1)$ множителей $\nu$	Длина 1

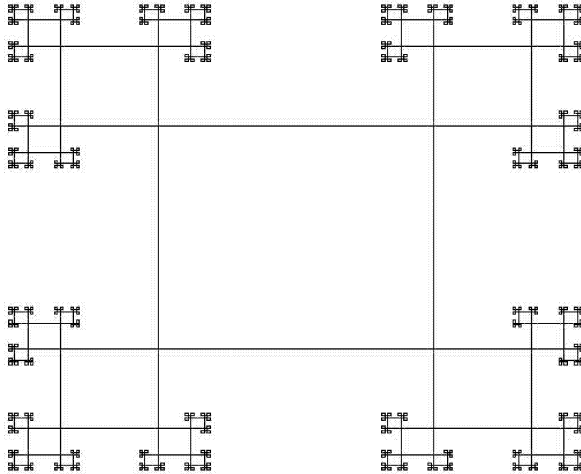


Рис. 3.15. Квадратичный звездный фрактал

В общем случае индекс отрезка изменяется от 0 до  $(\nu + 1)\nu^{p-1}$ . Из них ровно  $\nu + 1$  отрезков самой большой длины 1;  $(\nu + 1)(\nu - 1)$  – длины  $r$ ;  $(\nu + 1)(\nu^2 - \nu)$  – длины  $r^2$  и т. д. Рис. 3.13 был построен для  $p = 5$ ,  $\nu = 4$ ,  $\alpha = 4\pi/5$ ,  $r = 0.35$ . На рис. 3.15 показан фрактал, построенный для  $p = 7$ ,  $\nu = 3$ ,  $\alpha = \pi/2$ ,  $r = 0.47$ .

Попробуйте написать программу построения звездных фракталов с произвольными  $p$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $r$ .

Итак, мы рассмотрели разнообразные конструктивные фракталы, приближение для которых задается достаточно сложной линией. А что же такое линия? Интуитивно мы понимаем, что это такое. Более строгие математические определения смотрите в *Приложении* (глава 10).

## Глава 4. Анализ конструктивных фракталов

### 4.1. Инвариантные преобразования

Фракталы можно определить как множества точек, инвариантных относительно полугруппы сжатий.

В самом простом случае сжатие – это масштабное уменьшение с вращением или без него и задается линейным преобразованием плоскости  $(x,y) \rightarrow (x',y')$ :

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Преобразование (4.1) с матрицей  $A$  будем для краткости обозначать буквой  $T$ . При

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (4.2)$$

преобразование (отображение плоскости в себя) имеет единственную неподвижную точку  $x' = x = 0, y' = y = 0$ .

Тип неподвижной точки  $O(0, 0)$  определяют корни характеристического уравнения

$$\mu^2 - (a+d)\mu + \Delta = 0, \quad \Delta = \det A \quad (4.3)$$

или

$$\det(A - \mu E) = 0. \quad (4.4)$$

- 1) В случае  $|\mu_1| < 1, |\mu_2| < 1$  точка  $O$  – устойчивая;
- 2) при  $|\mu_1| < 1, |\mu_2| > 1$  – седловая (гиперболическая);
- 3) при  $|\mu_{1,2}| = 1$  – эллиптическая;
- 4) при  $|\mu_1| > 1, |\mu_2| > 1$  – неустойчивая.



Говорят, что отображение  $T$  сохраняет площадь, если  $|\det A| = 1$ . Поэтому, когда  $|\mu_1| \cdot |\mu_2| = 1$ , то отображение  $T$  сохраняет площадь. Сохраняющее площадь отображение может иметь лишь точки эллиптического или гиперболического типа.

Можно рассматривать произведение двух или большего числа отображений  $T$ . Например, если точка  $M_1(x, y)$  под действием отображения  $T$  переходит в точку  $M_2(x, y)$ , а точка  $M_2(x, y)$ , в свою очередь, переходит в точку  $M_3(x, y)$ , то мы можем записать  $M_2 = TM_1$ ,  $M_3 = TM_2$  или  $M_3 = T(TM_1) = T^2M_1$ .

Рассмотрим подробнее отображение, сохраняющее площадь.

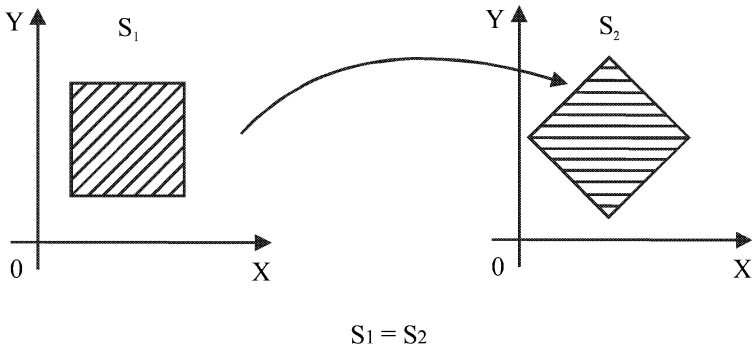


Рис. 4.1. Отображение, сохраняющее площадь

**Теорема 4.1:** Существует линейное невырожденное преобразование  $(x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$  приводящее (4.1) при  $\Delta = 1$ ,  $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$  к виду:

$$\begin{cases} \hat{x}' = \hat{x} \cos \alpha - \hat{y} \sin \alpha \\ \hat{y}' = \hat{x} \sin \alpha + \hat{y} \cos \alpha \end{cases}$$

где  $\alpha$  – параметр (угол поворота).

## 4.2. Поворот

Итак, рассмотрим преобразование поворота на угол  $\alpha$  (против часовой стрелки) без растяжения (сжатия). Оно имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad (4.5)$$

Якобиан  $\Delta$  этого преобразования, очевидно, равен 1.

Формула (4.5) определяет поворот относительно начала координат. Отображение, описывающее поворот относительно произвольной точки  $(x_0, y_0)$ , записывается в виде:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos \alpha - (y - y_0) \sin \alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Точка  $(x_0, y_0)$  – неподвижная точка – центр вращения.

Для примера рассмотрим два поворота:  $L$  – поворот влево относительно точки  $A(0, 0)$  с углом вращения  $\pi/6$  и  $R$  – поворот вправо относительно точки  $B(1, 0)$  с углом вращения  $\pi/3$ . В результате для отрезка  $AB$  на рис. 4.2 получим:

$$RL(AB) = A_2B_2, \text{ так как } L(AB) = AB_1, R(AB_1) = A_2B_2;$$

$$LR(AB) = A_1B_1, \text{ так как } R(AB) = A_2B, L(A_2B) = A_1B_1.$$

Заметим, что  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  параллельны и повернуты относительно  $AB$  на  $\pi/6 + \pi/3 = \pi/2$  ( $90^\circ$ ).

Формально имеем

$$L: \begin{cases} x' = (\sqrt{3}x - y)/2 \\ y' = (x + \sqrt{3}y)/2 \end{cases} \quad R: \begin{cases} x' = (x - \sqrt{3}y + 1)/2 \\ y' = (\sqrt{3}x + y - \sqrt{3})/2 \end{cases} \quad (4.7)$$

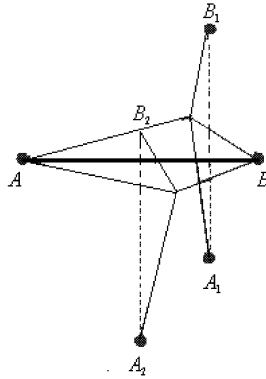


Рис. 4.2. Сочетание двух вращений

Поэтому получаем

$$RL: \begin{cases} x' = -y + 1/2 \\ y' = x - \sqrt{3}/2 \end{cases} \quad LR: \begin{cases} x' = -y + \sqrt{3}/2 \\ y' = x - 1/2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Следовательно,  $RL$  и  $LR$  являются поворотом на  $90^\circ$ . Положения центров вращения для  $RL$  и  $LR$  соответственно равны

$$\left( \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{1-\sqrt{3}}{4} \right); \left( \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \right).$$

### 4.3. Сжатие (растяжение)

Сжатие (растяжение) связано с изменением масштаба. Перемасштабирование или центральное расширение характеризуется центром и показателем сжатия « $c$ ». Так, центральное расширение (сжатие), то есть расширение (сжатие) относительно начала координат, выражается соотношениями

$$C: \begin{cases} x' = cx \\ y' = cy \end{cases}, \quad (4.9)$$

а центральное расширение (сжатие) относительно точки  $(x_0, y_0)$  – формулами

$$C: \begin{cases} x' = c(x - x_0) + x_0 \\ y' = c(y - y_0) + y_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

При  $c > 1$  преобразование  $C$  определяет растяжение, а при  $|c| < 1$  – сжатие. Для фракталов обычно имеем  $|c| < 1$ . При  $c = -1$  говорят об отражении, оно соответствует повороту относительно точки  $O$  на  $180^\circ$ .

#### 4.4. Поворот с растяжением (сжатием)

Самым важным преобразованием подобия является поворот, скомбинированный с центральным расширением (сжатием). Определяющими характеристиками являются центр и показатель масштабирования. Поворот с расширением – это произведение преобразований:  $RC$  или  $CR$ . Здесь порядок преобразований не имеет значения.

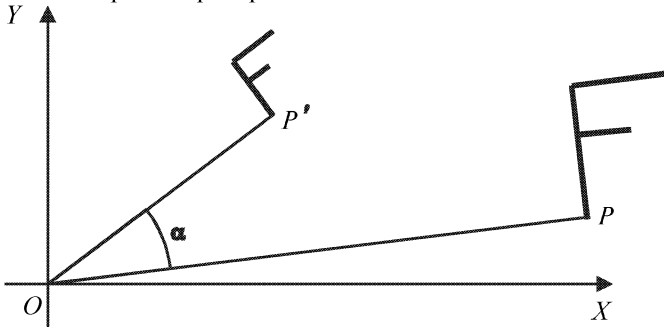


Рис. 4.3. Преобразование «поворот–растяжение»

Преобразование «поворот–растяжение» относительно начала координат  $O$  имеет вид:

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}, \quad \Delta = \det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Величина  $\Delta = a^2 + b^2$  характеризует величину растяжения–сжатия. При  $\Delta > 1$  имеем растяжение, а при  $\Delta < 1$  – сжатие. В координатах преобразование «поворот–растяжение» показано на рис. 4.4. Точка  $E$  с координатами  $(1, 0)$  переходит в точку  $E'$  с координатами  $(a, b)$ . При этом масштабный множитель  $OE'/OE = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Угол вращения  $\alpha$  удовлетворяет соотношениям:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OE'} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{AE'}{OE'} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

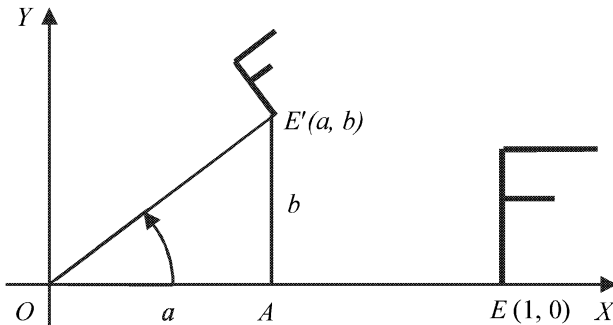


Рис. 4.4. Преобразование «поворот–растяжение»

Преобразование «поворот–растяжение» относительно произвольного центра записывается в виде:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d \end{cases} \quad (4.12)$$

#### 4.5. Применение поворота–сжатия

Рассмотрим кривую Леви. На рис. 4.5 показаны первые фазы ее построения. Фактически приближение фрактала определяется своими вершинами. Поэтому то, что нам нужно сделать, это на каждом шаге найти вершины (и соединить их прямыми линиями). На рис. 4.5 мож-

но обнаружить два поворота–сжатия. Первое преобразование,  $L$ , имеет центр в точке  $O$ ,  $\pi/4$  – угол вращения и  $1/\sqrt{2}$  – показатель уменьшения.

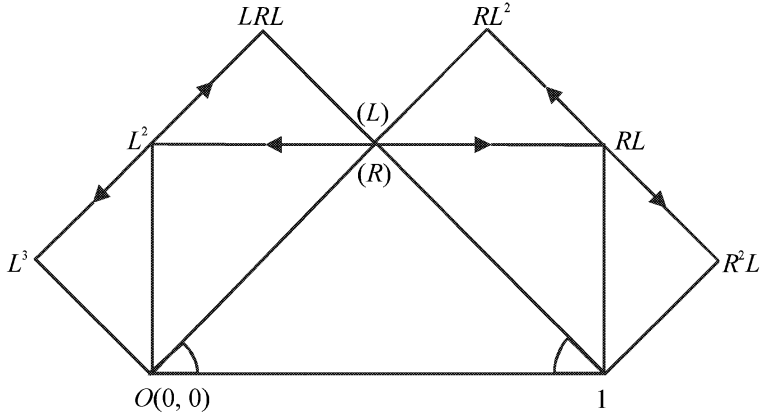


Рис. 4.5. Подобные преобразования во фрактале Леви

Второе преобразование,  $R$ , имеет центр в точке  $(1, 0)$ , угол вращения  $-\pi/4$  и показатель сжатия  $1/\sqrt{2}$ . Как  $L$ , так и  $R$  преобразуют вершины в другие вершины так, что фрактал Леви является инвариантным множеством относительно  $L$ ,  $R$  и их комбинаций.

$$L: \begin{cases} x' = (x - y)/2 \\ y' = (x + y)/2 \end{cases} \quad R: \begin{cases} x' = (x + y + 1)/2 \\ y' = (-x + y + 1)/2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Из (4.13) следует:  $\Delta = 1/2 < 1$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$ .

Точки фрактала Леви на каждом шаге (фазе)  $p$  можно получать, например, подвергая правую точку  $(1, 0)$  последовательности комбинаций преобразований  $L$  и  $R$ . Здесь можно использовать двоичную систему счисления, интерпретируя  $L$  как двоичную цифру 1, а  $R$  – как 0. Таким образом, фрактал состоит из такого же числа точек, сколько чисел между 0 и 1 в двоичной системе, а их бесконечное множество.

Если мы выберем произвольную точку  $P$  в качестве начальной и подвергнем ее преобразованиям  $L$  и  $R$  несколько раз, то число точек на каждом шаге будет удваиваться. Мы можем изобразить этот процесс в виде дерева с числовыми индексами (рис. 4.6). Например, точка с номером 18 получится в результате преобразования  $LRL(L(P))$ .

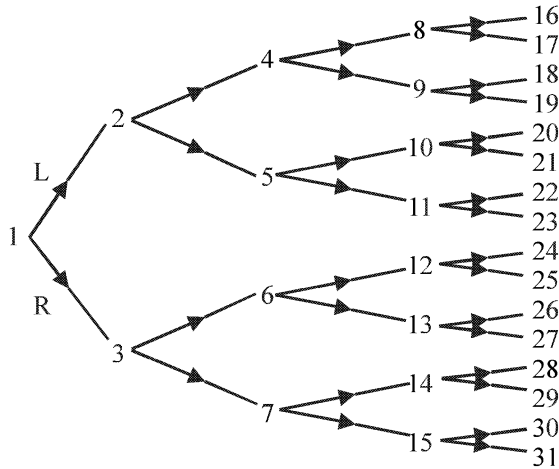


Рис. 4.6. Нумерация двоичного дерева

Если точка  $P$  является точкой фрактала, то и все ее итерации, которые получаются из нее, также будут точками фрактала. Это один из способов написания программы для построения вершин фрактала. Этот метод быстрый и эффективный, но требует много машинной памяти.

Есть другой способ, который требует значительно меньше памяти компьютера. Он называется методом «обратного следа» [3] и включен в программу «*Fractals*». Для этого необходимо по-другому перенумеровать дерево (рис. 4.7).

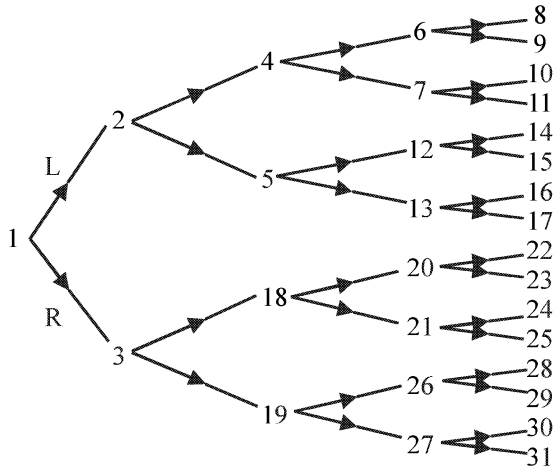


Рис. 4.7. Нумерация с использованием метода «обратного следа»

С помощью этого метода перенумерации мы приходим к самым маленьким ветвям и затем возвращаемся.

Приведем пример программы на языке Basic [3] (с небольшой модернизацией) построения фракталов, для которых  $L$  и  $R$  имеют вид:

$$L: \begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay, \end{cases} \quad R: \begin{cases} x' = cx - dy + 1 - c \\ y' = dx + cy - d \end{cases}$$

Итак,  $L$  – это поворот-сжатие относительно точки  $(0, 0)$  с показателем сжатия  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , а  $R$  – поворот-сжатие относительно точки  $(1, 0)$  с показателем сжатия  $\sqrt{c^2 + d^2}$ .

Программа использует метод обратного следа, и читатель сможет ее понять, используя рис. 4.7 и полагая  $p = 4$ .

REM Программа построения конструктивных фракталов

```
SCREEN 12: CLS
```

```
WINDOW (-1.1, -1)-(2.1, 1.4)
```

```
INPUT "Введите число уровней P"; P
```

```
DIM X1(P), Y1(P), X2(P), Y2(P)
```



```

INPUT "Введите параметры преобразования a,b,c,d";a,b,c,d
      X1(0) = a: Y1(0) = b
      PSET (0,0): PSET (1,0): PSET (a,b)
      S = 1: GOSUB 140
      FOR m = 1 TO 2^(P-1)-1
          S = P: n = m
110      IF n mod 2 = 0 THEN n = INT (n/2)
          S = S-1: GOTO 110:
REM четные m пропускаем, метод обратного следа
          GOSUB 140
      NEXT m
      BEEP
120  a$ = INKEY$: IF a$ = "" THEN 120
      END
140  X1(S-1) = X2(S-1): Y1(S-1) = Y2(S-1)
FOR J = S TO P
    X = X1(J-1): Y = Y1(J-1)
    X1(J) = a*X - b*Y: Y1(J) = b*X + a*Y
    X2(J) = c*X - d*Y + 1 - c: Y2(J) = d*X + c*Y - d
    PSET (X1(J), Y1(J))
    PSET (X2(J), Y2(J))
NEXT J
      RETURN
      END

```

**Примеры:**

- 1) Положив  $a = d = 0$ ,  $b = c = 0.7$ ,  $p = 17$ , получим рис. 4.8. Здесь  $L$  – четверть оборота с показателем уменьшения 0.7 и  $R$  – обычное центральное сжатие с показателем сжатия 0.7 относительно  $(1, 0)$ .
- 2) Положив  $a = b = 0.6$ ,  $c = 0.53$ ,  $d = 0$ ,  $p = 18$ , получим рис. 4.9. Здесь  $L$  и  $R$  имеют такой же тип, как и в примере 1. Угол вращения для  $L$  равен  $\pi/4$ . Результат напоминает ветвь с листьями.
- 3) Выбрав  $a = 0$ ,  $b = 1/\sqrt{2}$ ,  $c = 1/2$ ,  $d = -1/2$ , получаем рис. 4.10 ( $p = 17$ ). Здесь  $L$  и  $R$  являются поворотами с одинаковым сжатием  $1/\sqrt{2}$ . Углы вращения  $\pi/2$  и  $-\pi/4$  соответственно.

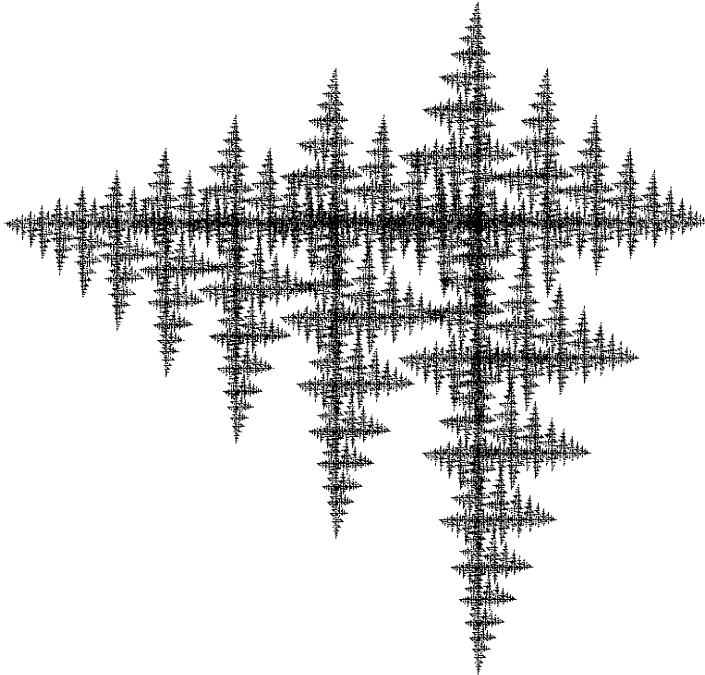


Рис. 4.8. Фрактал, полученный с помощью «поворота-сжатия»

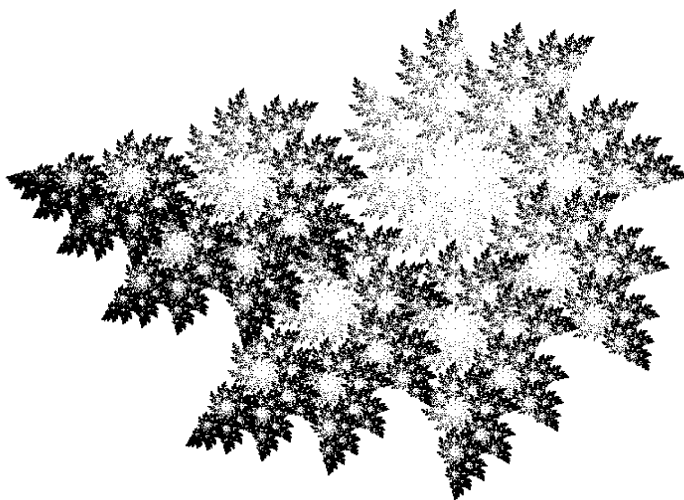


Рис. 4.9. Фрактал, полученный с помощью «поворота-сжатия»

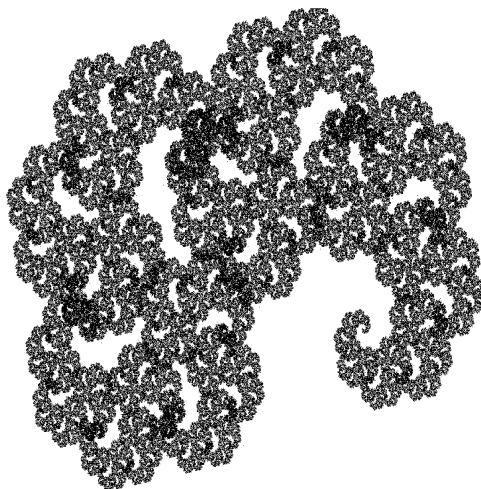


Рис. 4.10. Фрактал, полученный с помощью двойного «поворота-сжатия»

## 4.6. Отражение

Отражение  $S$  линии характеризуется осью отражения (осью симметрии) (рис. 4.11). В терминах алгебры преобразований это можно выразить как  $S^2 = E$  ( $E$  – тождественное преобразование).

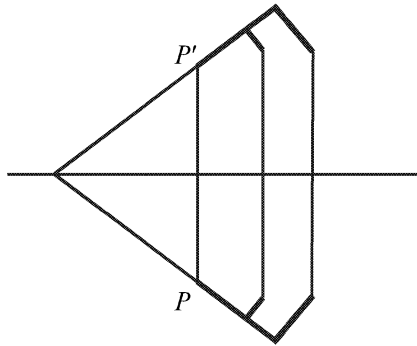


Рис. 4.11. Отражение

Для фракталов отражение линии обычно встречается в комбинации с изменением масштаба. Будем называть эту комбинацию «сжатие-отражение». Характеристика сжатия-отражения – это центр, неподвижная точка, и две оси, перпендикулярные одна другой, – единственные линии, которые остаются на месте при преобразовании.

Преобразования типа «сжатие-отражение» записываются в виде:

$$\begin{cases} x' = cx \\ y' = -cy \end{cases} \quad (4.14)$$

или в более общем виде:

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases} \quad (4.15)$$

с показателем сжатия  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

### 4.7. Применения сжатия-отражения

Проиллюстрируем сжатие-отражение на примере построения кривой Коха. На рис. 4.12 показаны первые фазы построения кривой Коха.

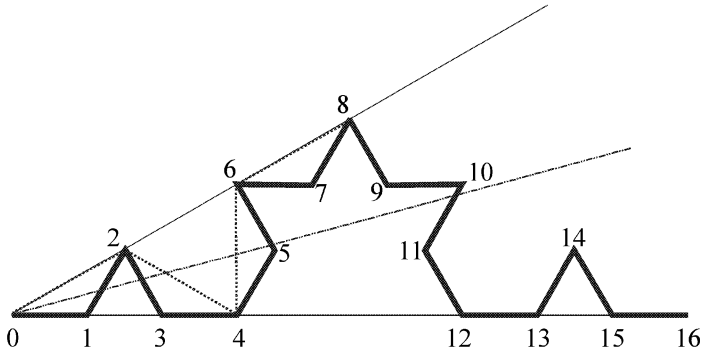


Рис. 4.12. «Сжатие-отражение» во фрактале Коха

Линия, соединяющая точки 0, 2, 4, 6, 8, имеет такую же форму, что и линия, соединяющая точки 0, 4, 8, 12, 16 первой фазы. Только теперь она отражается и сжимается. Показатель сжатия  $1/\sqrt{3}$ . Это преобразование описывается формулой (4.15) с  $c = d = 0$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  равны координатам точки 8:  $a = 1/2$ ,  $b = 1/2\sqrt{3}$ .

Итак, кривая Коха инвариантна относительно преобразования (4.15) (с центром в точке (0, 0)). Аналогично можно написать преобразование «отражение-сжатие» относительно точки (1, 0). Мы можем тогда записать оба преобразования в виде:

$$L: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + by \\ y' = bx - \frac{1}{2}y, \end{cases} \quad R: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - by + \frac{1}{2} \\ y' = -bx - \frac{1}{2}y + b \end{cases} \quad (4.16)$$

$$c \ b = 1/(2\sqrt{3}).$$

**Примеры:**

1)  $L: a = 1/2, b = \sqrt{3}/6 = 0.2887,$

$R: a = 2/3, b = 0.$

Результат приведен на рис. 4.13 ( $p = 17$ ).

2)  $L$  – поворот-растяжение с  $a = b = 0.4641,$

$R$  – сжатие-отражение с  $c = 0.6222, d = -0.1965.$

На рис. 4.14 ( $p = 17$ ) показан соответствующий фрактал типа дендрит.

$$3) \quad L: \begin{cases} x' = \frac{x+y}{2} \\ y' = \frac{x-y}{2} \end{cases}, \quad R: \begin{cases} x' = \frac{3x-y+2}{5} \\ y' = \frac{-x-3y+1}{5} \end{cases} \quad (4.17)$$

Результат на рис. 4.15 ( $p = 17$ ).

Попробуйте написать программу, использующую формулы вида (4.15).

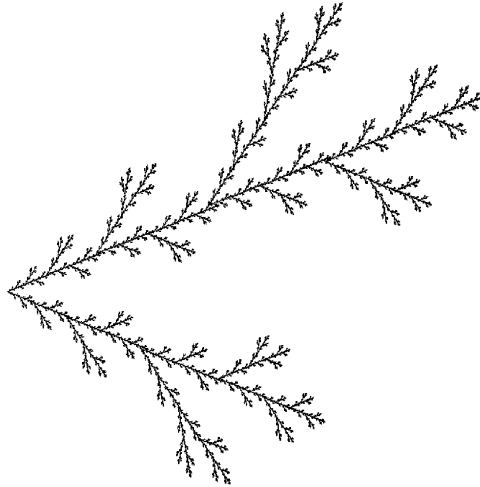


Рис. 4.13. Фрактал, полученный с помощью «сжатия-отражения»

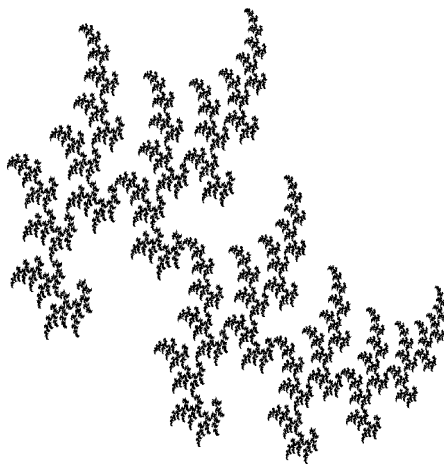


Рис. 4.14. Фрактал, полученный с помощью «поворота-сжатия» и «сжатия-отражения»

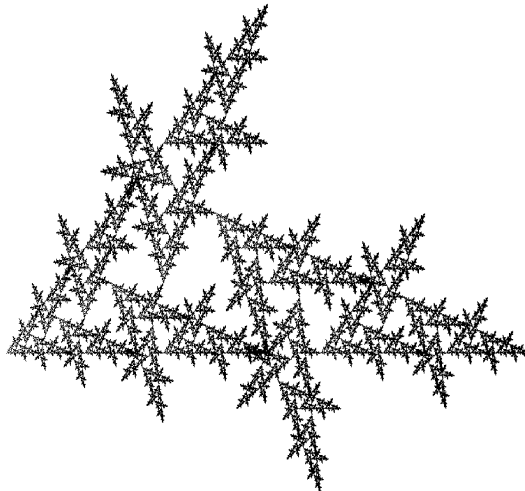


Рис. 4.15. Фрактал, полученный с помощью двойного «сжатия-отражения»

## Глава 5. Случайность во фракталах

Мы построили много различных кривых, обладающих самоподобием. Сравним одну из них, кривую Коха, с береговой линией западного Британского побережья. В действительности береговые линии созданы по капризу природы, и есть случайность в этом созидательном процессе.

Если интерпретировать самоподобие статистически, то получим более реалистические картины. Подобная теория достаточно сложна. Однако построить статистические фракталы с помощью компьютера достаточно просто, ибо компьютер позволяет получать псевдослучайные последовательности чисел.

Некоторые из методов, основанных на случайностях, называют методами Монте-Карло. Более широкое и формальное название – стохастические методы. Термин «*стохастичность*» происходит от греческого слова, обозначающего «*предположение*».

Итак, в этом разделе вы увидите, как можно менять фракталы с помощью введения случайности. Мы будем говорить о случайных фракталах в связи с броуновским движением. Термин «*броуновское движение*» происходит от биолога Роберта Брауна (1773 – 1858), который наблюдал, как микроскопические частицы двигаются изменяющимися курсами. В связи с броуновскими движениями в теории фракталов возник термин «*броуновские фракталы*» (подробности см., например, в [18]).

В предыдущей главе мы обсуждали конструкцию фрактала с древовидной структурой (см., например, рис. 4.6). Начиная от начальной точки  $P$  новые точки получаются в результате применения двух преобразований  $L$  и  $R$ . Для каждого конкретного фрактала имеем конкретную последовательность этих преобразований. Сейчас мы поступим по-другому. Мы образуем случайную последовательность из точек  $P_0, P_1, P_2, \dots$  Каждая точка получается из предыдущей с помощью приме-



нения к ней преобразования  $L$  или  $R$ , причем каждое из этих преобразований выбирается случайно, с вероятностью 0.5, т. е.:

$$P_{n+1} = \begin{cases} \text{или } LP_n \\ \text{или } RP_n \end{cases}.$$

На компьютере это можно организовать, используя датчик псевдослучайных чисел `rnd`, например, так:

```
IF rnd < 1/2 THEN P(n+1) = LP(n)   ELSE
P(n+1) = RP(n)
```

**Пример 5.1:** Пусть

$$L = \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad R = \begin{cases} x' = 1 + \frac{a(x-1)}{(x-1)^2 + y^2 + 1} \\ y' = \frac{ay}{(x-1)^2 + y^2 + 1} \end{cases}$$

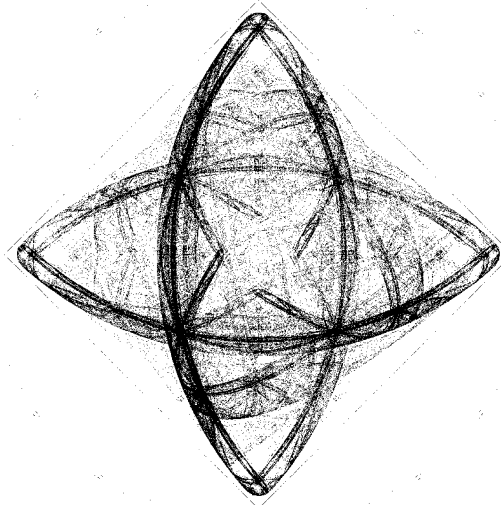


Рис. 5.1. Фрактал, полученный с помощью двух преобразований на основе метода Монте-Карло

Положим, например,  $a = 2.8$ . Здесь  $L$  – поворот на  $90^\circ$  относительно точки  $(0, 0)$ , а  $R$  – «растяжение» относительно точки  $(1, 0)$  с переменным показателем, который зависит от расстояния от центра  $(1, 0)$ . Полученный случайный фрактал показан на рис. 5.1 ( $p = 6$ ). Фигура симметричная, что можно использовать при счете.

**Пример 5.2:** Вводя случайность в качестве малых возмущений при построении фракталов, мы можем представить фракталы в виде моделей природных объектов типа деревьев, растений, кораллов и др. В качестве иллюстрации построим обдуваемое ветром дерево Пифагора (рис. 5.3; сравните с рис. 3.4).

Основной фрагмент – это ствол, изображенный на рис. 5.2. Боковые ветви присоединяются в местах  $AB$  и  $BC$ . Положим:  $A = (0, a)$ ,  $B = (0.5, a + 0.5)$ ,  $C = (1, a)$ . Пусть  $a = 3$ .

Фрагмент ствола копируется подобным образом с уменьшением масштаба. Случайность вносится при присоединении уменьшенного фрагмента ствола, например, так  $a \rightarrow a[1 + \omega(\text{rnd} - 1/2)]$ . Полагая  $\omega = 0.1$ , получаем рис. 5.3 ( $p = 12$ ).

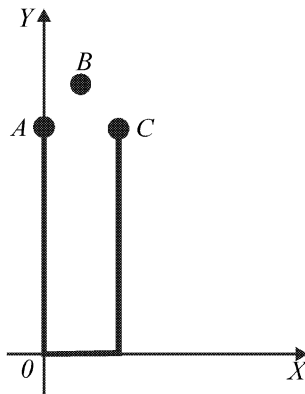


Рис. 5.2. Ствол дерева Пифагора

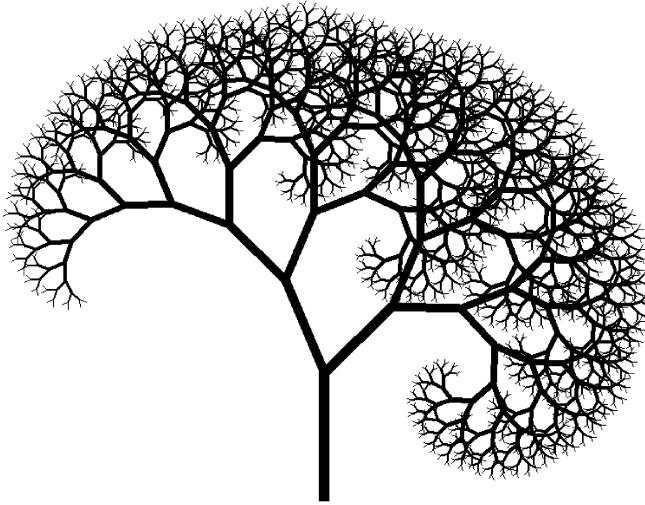


Рис. 5.3. «Обдуваемое ветром» дерево Пифагора

Обратимся теперь к броуновскому движению.

В 1828 г. шотландский биолог Роберт Браун (1773 – 1858) открыл необычное явление. Когда он смотрел в микроскоп на маленькие частицы, плавающие в жидкости, он был поражен тем фактом, что частицы совершали крошечные, переменчивые по направлению, непредсказуемые движения.

Этот феномен был объяснен значительно позднее, в начале нашего века, когда зародились квантовая механика и статистическая физика. Молекулы жидкости совершают тепловое нерегулярное движение, которое становится более сильным при возрастании температуры. Молекулы непрерывно отскакивают от более крупных частиц, которые наблюдаются в микроскоп. Это и заставляет частицы изменять направление движения.

Понятие фрактальной кривой помогает нам сформировать отпечаток траектории частицы при броуновском движении. Эта траектория похожа на трехмерную береговую линию с изгибами в любых масштабах. Следуя Мандельброту, можно расширить понятие «фрактал»

до геометрической структуры со статистическим самоподобием. Тогда путь микроскопических частиц при тепловом движении – это броуновская фрактальная кривая.

## 5.1. Броуновская кривая

Построим броуновскую фрактальную кривую на плоскости. Возьмем отрезок  $[0, 1]$  и разделим его, скажем, на 1000 интервалов. Пусть  $x_0 = 0$ ,  $x_j = j \cdot h$ ,  $h = 0.001$ ,  $j = 1, \dots, 1000$  ( $x_{1000} = 1$ ). С помощью компьютера образуем последовательность случайных чисел  $r_j$ ,  $j = 0, \dots, 1000$ ,  $0 < r_j < 1$ . Далее получаем точки  $P_k(x_k, y_k)$ , где  $x_k = \frac{k}{1000}$ ,  $y_k = (r_1 - 1/2) + (r_2 - 1/2) + \dots + (r_k - 1/2)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 1000$ .

Так как для каждого  $k$  величина  $r_k - 1/2$  находится в интервале  $(-1/2, 1/2)$ , то каждая точка  $P_k$  ложится случайно либо немного выше, либо немного ниже предыдущей. Результат представлен на рис. 5.4.

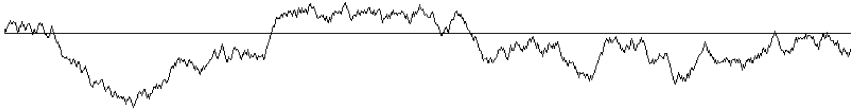


Рис. 5.4. Броуновская кривая «побед и поражений»

Кривую на рис. 5.4 иногда называют кривой «побед и поражений».

## 5.2. Квазислучайность в динамике

В этом разделе мы соприкоснемся с возникновением случайности, точнее, квазислучайности, в детерминированных динамических системах (ДС). Квазислучайность в ДС – чрезвычайно сложная, интересная и недостаточно изученная область в теории ДС. Одним из первых, кто обратил внимание на возможность сложной динамики, был, по видимому, французский математик Анри Пуанкаре (1854–1912).

А. Пуанкаре обогатил почти все области математики результатами первостепенного значения. Его можно с полным правом назвать не только выдающимся математиком, но и первоклассным механиком, физиком, астрономом.

А. Пуанкаре указал на возможность существования в динамических системах гомоклинных и гетероклинных движений. Позже было доказано, что в окрестности гомоклинных движений решения ДС ведут себя квазислучайным образом. В настоящее время сложную динамику в детерминированных ДС связывают с терминами «хаос» и «стохастичность». Мы не будем здесь касаться этого достаточно сложного раздела в современной теории ДС, а лишь проиллюстрируем возможность возникновения сложной динамики на наиболее простом примере одномерной дискретной ДС.

### 5.2.1. Модель ограниченного роста популяции

Предметом обсуждения в данном примере является математическая модель ограниченного роста популяции, которая описывает число насекомых (скажем, мух) в последующих поколениях. Введем в этой задаче масштабирование так, чтобы число мух определялось числом между 0 и 1.

Модель неограниченного роста очень проста:  $x_{n+1} = ax_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  Это означает, что в каждом поколении будет в « $a$ » раз больше мух, чем в предыдущем поколении. Показатель  $a$  называется показателем Мальтуса (по имени экономиста Мальтуса (1766–1834), который посвятил свою жизнь изучению моделей роста). Число Мальтуса можно интерпретировать как степень плодовитости популяции насекомых. В 1845 г. Верхольст вывел отсюда модель ограниченного роста:

$$T : x_{n+1} = ax_n(1 - x_n). \quad (5.1)$$

Это и есть одномерная дискретная динамическая система – отображение  $T$ . Действительные биологические модели, конечно, более сложные.

Обратимся к исследованию модели (5.1). Положим  $0 < a \leq 4$ . Тогда итерации  $x_n$  не выходят из единичного отрезка  $[0, 1]$ . График функции  $y = g(x) = ax(1 - x)$  показан на рис. 5.5.

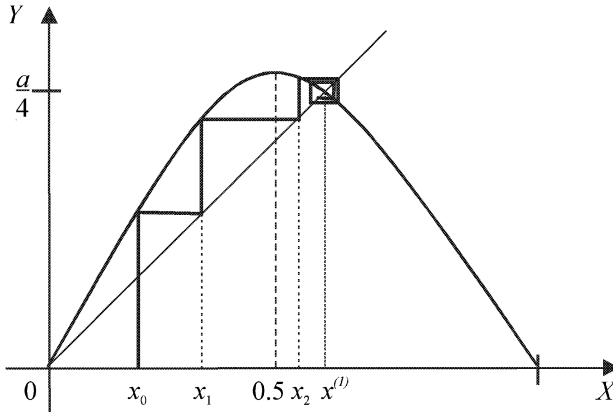


Рис. 5.5. График функции  $y = ax(1 - x)$

Пересечение графика функции  $y = g(x)$  с прямой  $y = x$  определяет неподвижные точки отображения (5.1). На рис. 5.5 также показан итерационный процесс, сходящийся к неподвижной точке. Глядя на этот рисунок, нетрудно понять, что нетривиальная неподвижная точка  $x^{(1)}$  будет устойчивой, если  $|f'(x^{(1)})| < 1$ . Обратимся к более строгому анализу отображения (5.1).

Из уравнения  $x = ax(1 - x)$  находим неподвижные точки  $x^{(0)} = 0$ ,  $x^{(1)} = (a - 1)/a$ . Линеаризуя отображение (5.1) в окрестности неподвижной точки, получаем  $x_{n+1} = a(1 - 2x^{(k)})(x_n - x^{(k)})$ ,  $k = 0, 1$ .

Число  $\mu = |a(1 - 2x^{(k)})|$  является мультипликатором неподвижной точки. При  $\mu < 1$  неподвижная точка устойчивая, а при  $\mu > 1$  — неустойчивая. При  $\mu = 1$  устойчивость неподвижной точки определяется нелинейным членом.

При  $0 < a < 1$  отображение (5.1) имеет одну неподвижную точку на отрезке  $[0, 1]$ , при  $1 < a \leq 4$  – две неподвижные точки:  $x^{(0)} = 0$ ,  $x^{(1)} = (a-1)/a$ . Соответственно, величина  $\mu$  равна  $a$  и  $2-a$ .

Поэтому при  $0 < a < 1$  имеем единственную устойчивую неподвижную точку  $x^{(0)}$ . При  $a=1$  эта точка теряет устойчивость и при  $1 < a < 3$  имеем другую устойчивую точку  $x^{(1)}$ . Если  $1 < a < 2$ , то последовательность  $x_n$  асимптотически приближается к  $x^{(1)}$  с одной стороны, а при  $2 < a < 3$  с двух сторон (в этом случае последовательность «осциллирует» относительно точки  $x^{(1)}$ ).

Таким образом, для биологической модели важно, что при  $1 < a < 3$  имеется устойчивое решение.

При дальнейшем увеличении параметра  $a$  неподвижная точка  $x^{(1)}$  теряет устойчивость. Куда же будет стремиться последовательность  $x_n$ , если  $x_0$  взята вблизи  $x^{(1)}$ ? Оказывается, к периодической периода 2 точке. Такая точка находится из условия  $x = T(Tx) = T^2x$  или  $x = a^2x(1-x)(1-ax(1-x))$ , или из уравнения  $a^2(1-x)(1-ax(1-x)) = 1$ . Далее приведем компьютерные результаты для бифуркационных значений параметра  $a$ , т. е. для значений  $a$ , при которых периодическая периода  $p = 2^j$  точка теряет устойчивость:

3 ( $j=0$ ), 3.449499 ( $j=1$ ), 3.544090 ( $j=2$ ), 3.564407 ( $j=3$ ), 3.568759 ( $j=4$ ), 3.569692 ( $j=5$ ), 3.569891 ( $j=6$ ), 3.569934 ( $j=7$ ).

Последовательность бифуркационных значений  $a_j$  сходится к значению  $a_\infty \approx 3.569946$  и похожа на геометрическую прогрессию, ибо

$$F = \frac{a_{j-1} - a_j}{a_j - a_{j+1}} \approx 4.6692016.$$

Число  $F$  называется постоянной Фейгенбаума, который первым обнаружил такую закономерность в последовательности  $\{a_j\}$ .

Описанное нами явление удвоения периода в модели  $x \rightarrow ax(1-x)$  напоминает фрактал, основанный на двоичной системе с показателем масштабирования, равным числу Фейгенбаума.

Удвоение периода останавливается на значении  $a_\infty \approx 3.569946$ . Что же произойдет при дальнейшем увеличении  $a$ ? Оказывается, будет наблюдаться чередование аperiodического (хаотического) движения с

периодическим. Например, около значения  $a \approx 3.83$  существуют устойчивые периодические точки периода 3. При  $a \approx 3.841$  эти точки теряют устойчивость и далее возникают устойчивые периодические точки периода 6 (или, как иногда говорят, цикл периода 6). Далее этот процесс «удвоения» периода тройных точек идет подобно описанному выше процессу удвоения периода. Оказывается, что на интервале  $(a_\infty, 4)$  существует бесчисленное множество «окон» существования устойчивых периодических точек. Впервые подобный результат был получен украинским математиком А. И. Шарковским в 60-х годах XX века.

Удвоение периода является одним из сценариев перехода к хаосу. Этот сценарий называют обычно сценарием Фейгенбаума.

При  $a = a_\infty$  имеем хаос – аperiodическое движение. Итак, при  $a_\infty < a < 4$  модель (отображение) ведет себя либо хаотически, либо периодически. Рис. 5.6 показывает нам чередование этих областей, а также бифуркации удвоения периода.

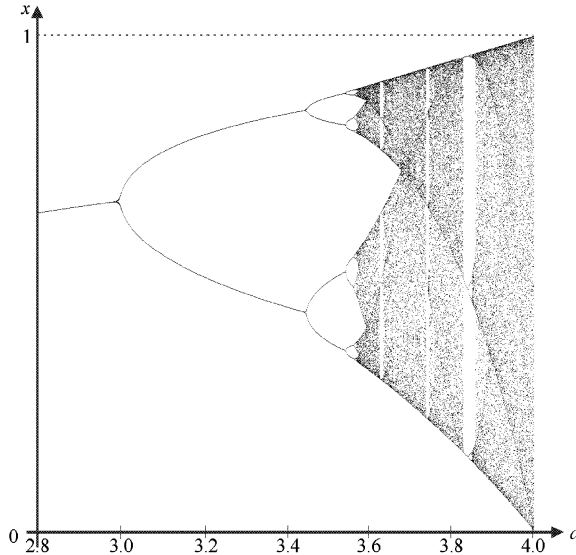


Рис. 5.6. Порядок и хаос в модели ограниченного роста популяции  $x \rightarrow ax(1-x)$



$a = 2.9$	Единственная устойчивая точка
$a = 3.0$	переход к 2-циклу (бифуркация)
$a = 3.2$	2-цикл
$a = 3.5$	4-цикл
$a = 3.74$	5-цикл
$a = 3.83$	3-цикл
$a = 4$	полный хаос

На рис. 5.7 представлен в увеличенном виде фрагмент рис. 5.6.

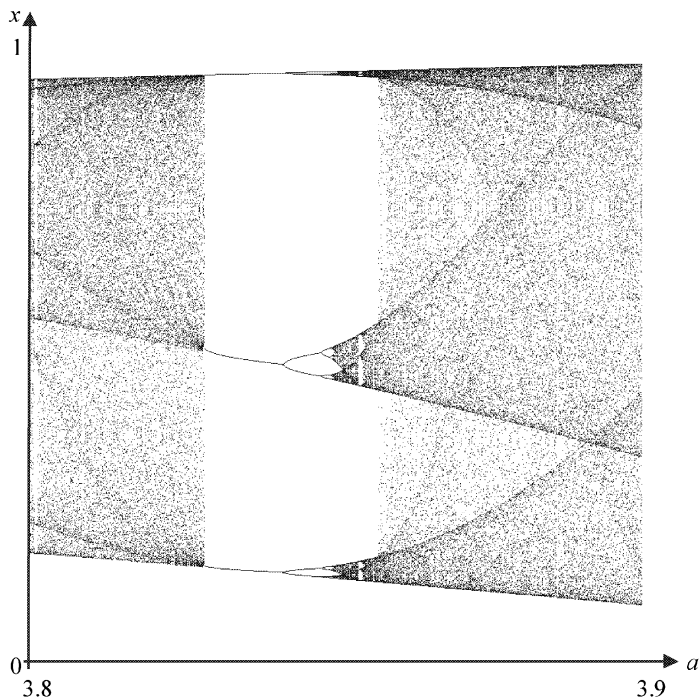


Рис. 5.7. Увеличение предыдущей диаграммы вблизи  $a = 3.83$

Наряду с моделью (5.1) можно использовать модели:

$$\bar{x} = f(x, a), \quad (5.2)$$

где  $f = a \sin \pi x$ ,  $f = x \exp(a(1-x))$ ,

$$f = x(1+a(1-x)), f = \frac{ax}{(1+ax)^5}.$$

Для этих моделей интересующийся читатель может сам построить бифуркационные диаграммы, подобные той, которая показана на рис. 5.6.

### 5.2.2. Определение детерминированного хаоса по Девани [20]

Рассмотрим отображение  $f(x)$  метрического пространства  $(X, d)$  в себя:  $f(x) : X \rightarrow X$ . Здесь  $d$  – метрика в пространстве  $X$ . Например, если в качестве  $X$  взять евклидово пространство  $R^n$ , то в качестве метрики можно рассматривать евклидово расстояние

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

**Определение 1.** Будем называть отображение  $f(x) : X \rightarrow X$  *хаотическим*, если: 1)  $f$  обладает существенной зависимостью от начальных условий; 2)  $f$  транзитивно; 3) периодические точки  $f$  плотны в  $X$ .

**Определение 2.** Пусть  $x \in X$ , а  $U$  – открытое множество, содержащее  $x$ . Говорят, что отображение  $f$  *обладает существенной зависимостью от начальных условий*, если для некоторого  $\delta > 0$  существует такое целое число  $n > 0$  и такая точка  $y \in U$ , что  $d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) > \delta$ .

**Определение 3.** *Отображение  $f$  называется **транзитивным**, если для любой пары  $U, V$  открытых множеств существует такое  $n \geq 0$ , что  $f^{(n)}(U \cap V) \neq \emptyset$ .*

**Определение 4.** *Говорят, что периодические точки отображения  $f$  **плотны** в  $X$ , если в любой окрестности любой точки  $X$  существует по крайней мере одна периодическая точка (и, следовательно, бесконечно много периодических точек).*

В работе [21] было показано, что в случае непрерывной  $f$  условие 1) в определении хаотического отображения является избыточным.

Заметим также, что существуют и другие определения хаоса.

Нетрудно показать, что отображение окружности  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , определяемое соотношением  $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ , является хаотическим.

В качестве примера рассмотрим отображение (5.1) при  $a = 4$ , т.е. при  $f(x) = 4x(1-x)$ ,  $x \in [0,1]$ . Делая замену  $x = \sin^2 \theta$ , придем к отображению  $\bar{\theta} = 2\theta \bmod \pi$ , которое является хаотическим.

## Часть 2. Введение во фрактальную динамику

В предыдущей части, где мы рассматривали конструктивные фракталы, было показано, что в основе их построения лежат линейные двумерные отображения. В последнем параграфе первой части мы познакомились с нелинейным одномерным отображением, которое является простейшей моделью ограниченного роста популяции. Было установлено, что поведение итераций  $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$  может иметь хаотический характер (например, при  $a = 4$ ). Здесь мы пойдем дальше и рассмотрим некоторые классы двумерных нелинейных отображений, которые относятся к дискретным динамическим системам. Наша цель – показать, что в таких отображениях могут существовать фрактальные структуры или фракталы. Анализ нелинейных динамических систем сопряжен, как правило, со значительными трудностями, и мы это увидим на примере простейших нелинейных отображений, которые можно представить в виде одномерного комплексного отображения. Такие отображения наиболее изучены. Их исследование связано с именами Жюлиа [8], Фату [9], Монтеля [11], Сулливана [12] и др.

Одномерные комплексные отображения порождают наиболее популярные в последние годы фракталы Жюлиа, Мандельброта, Ньютона и др. Этот раздел фрактальной теории, по сути, стал классическим, и мы изложим его основы в этой части. В главе 9 мы рассмотрим обобщение фракталов Жюлиа на трехмерное гиперпространство, являющееся подпространством пространства кватернионов.

Аттракторы Жюлиа и Ньютона являются отталкивающими (неустойчивым) множествами. Для обратных отображений имеем аттрактор. Эти отображения индуцируют на аттракторе хаотические отображения. Точное доказательство хаотичности подобных отображений имеется лишь в некоторых случаях наборов линейных или кусочно-линейных преобразований (систем итерированных функций [18]).

## Глава 6. Одномерные комплексные отображения

### 6.1. Итерации комплексных функций. Множества Жюлиа и Фату

Множества Жюлиа дают наиболее впечатляющие иллюстрации того, как простой процесс может привести к чрезвычайно запутанным множествам. Итерации (отображения)

$$z_{n+1} = f(z_n),$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  с простой функцией на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , например с  $f(z) = z^2 + c$ , где  $c$  – ненулевая константа, вызывают появление различных экзотических фракталов (см. рис. 7.1).

Множества Жюлиа появляются в результате итераций функции  $f$  комплексной переменной  $z$  и относятся к дискретным динамическим системам. В общем, множество Жюлиа – это динамический репеллер (отталкивающее множество). Как правило – это фрактал.

Для функций, которые являются аналитическими на комплексной плоскости (и, следовательно, дифференцируемыми, то есть  $f'(z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (f(z + \omega) - f(z)) / \omega$  существует как комплексное число, где  $z, \omega \in \mathbb{C}$ ), мы можем использовать мощные методы теории функций комплексной переменной для получения намного более детальной информации о структуре таких отталкивающих множеств.

#### 6.1.1. Основы теории множеств Жюлиа

Для удобства изложения мы предположим, что  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  является полиномом степени  $n \geq 2$  с комплексными коэффициентами,  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Заметим, что с небольшими изменениями теория остается справедливой, если  $f$  – рациональная функция  $f(z) = R(z) = P(z)/Q(z)$  (где  $P, Q$  – полиномы) на расширенной ком-

плексной плоскости  $C \cup \{\infty\}$ , и многое из нее выполняется, если  $f$  – мероморфная функция (то есть функция, которая аналитична на  $C \cup \{\infty\}$ , за исключением конечного числа полюсов). Дадим краткое изложение основ теории комплексных отображений, следуя, в основном, Монтелю [11] и Фальконеру [2].

Будем обозначать через  $f^k$   $k$ -ю итерацию (композицию)  $f \circ \dots \circ f$  функции  $f$ . Если  $f(\omega) = \omega$ , то точку  $\omega$  назовем неподвижной точкой  $f$ , и если  $f^p(\omega) = \omega$  для некоторого целого  $p > 1$  – то периодической точкой  $f$ ; наименьшее  $p$  такое, что  $f^p(\omega) = \omega$  называется периодом  $\omega$ . Мы назовем  $\omega, f(\omega), \dots, f^{p-1}(\omega)$  орбитой периода  $p$ . Пусть  $\omega$  – периодическая точка периода  $p$ , с  $(f^p)'(\omega) = \lambda$ , где штрих означает комплексное дифференцирование. Точка  $\omega$  называется

- притягивающей, если  $0 \leq |\lambda| < 1$ ;
- индифферентной, если  $|\lambda| = 1$ ;
- отталкивающей, если  $|\lambda| > 1$ .

Множество Жюлиа  $J(f)$  преобразования  $f$  определим как замыкание множества отталкивающих периодических точек  $f$ . Дополнение множества Жюлиа называется множеством Фату [9, 10] и обозначается через  $F(f)$ . Здесь мы исследуем геометрию и фрактальную природу множеств Жюлиа в случае, когда  $f$  – полином. Мы покажем, что  $J(f)$  является инвариантным множеством как для отображения  $f$ , так и для обратного отображения  $f^{-1}$ , то есть  $J = f(J) = f^{-1}(J)$ . Также покажем, что множество  $J$  непустое и компактное. Более того, итерации  $f$  ведут себя «хаотически» на  $J$ , и  $J$  обычно является фракталом.

Обратимся к простейшему примеру, когда  $f(z) = z^2$  и, следовательно,  $f^k(z) = z^{2^k}$ . Точки, удовлетворяющие  $f^p(z) = z$ , это  $\{\exp(2\pi i q / (2^p - 1)) : 0 \leq q < 2^p - 2\}$ . Они являются отталкивающими,

так как  $\left| (f^p)'(z) \right| = 2^p$  в таких точках. Таким образом, множество Жю-  
 лия  $J(f)$  – это окружность единичного радиуса:  $|z| = 1$ . Очевидно,  
 $J = f(J) = f^{-1}(J)$  и  $f^k(z) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , если  $|z| < 1$ ;  $f^k(z) \rightarrow \infty$ ,  
 если  $|z| > 1$  и итерации  $f^k(z)$  остаются на  $J$  для всех  $k$ , если  $|z| = 1$ .  
 Итак, множество Жюлиа  $J$  является границей между множествами то-  
 чек, которые стремятся к 0 и  $\infty$ , то есть это – окружность. Конечно, в  
 этом особом случае  $J$  не является фракталом (рис. 6.1(a)).

Изменим теперь немного функцию  $f$ , положив  $f(z) = z^2 + c$ ,  
 где  $c$  – это небольшое комплексное число. Легко видеть, что мы все еще  
 имеем  $f^k(z) \rightarrow \omega$ , если  $z$  мало, где  $\omega$  – это неподвижная точка  $f$ ,  
 близкая к 0, и что  $f^k(z) \rightarrow \infty$ , если  $z$  велико. Опять, множество Жю-  
 лия – это граница между этими двумя типами поведения, но оказывается,  
 что теперь  $J$  является фрактальной кривой, схематически изобра-  
 женной на рис. 6.1(b)).

Чтобы установить основные свойства множеств Жюлиа, нам  
 потребуется понятие нормальных семейств аналитических функций и  
 теорема Монтеля<sup>1</sup>.

Пусть  $U$  является открытым множеством в  $\mathcal{C}$ , и пусть  $g_k : U \rightarrow \mathcal{C}$   
 является семейством комплексных аналитических функций (то есть  
 функций, дифференцируемых на  $U$  в комплексном смысле). *Говорят,*  
*что семейство  $\{g_k\}$  является нормальным на  $U$ , если любая последо-*  
*вательность функций, выбранных из  $\{g_k\}$ , имеет подпоследователь-*  
*ность, которая сходится равномерно на любом компактном подмно-*  
*жестве  $U$  либо к ограниченной аналитической функции, либо к  $\infty$ . За-*  
*метим, что по стандартной теории комплексной переменной это оз-*  
*начает, что подпоследовательность сходится либо к конечной анали-*

---

<sup>1</sup> Читатели, которые хотят опустить эти технические подробности, мо-  
 гут перейти к главе 7.

тической функции, либо к  $\infty$  на каждой связной компоненте  $U$ . В первом случае производные подпоследовательности должны сходиться к производной от предельной функции. Семейство  $\{g_k\}$  является нормальным в точке  $\omega$  множества  $U$ , если существует некоторое открытое подмножество  $V \subset U$ , содержащее  $\omega$  такое, что  $\{g_k\}$  является нормальным семейством на  $V$ . Это эквивалентно тому, что существует окрестность  $V$  точки  $\omega$ , в которой каждая последовательность из  $\{g_k\}$  имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся к ограниченной аналитической функции или к  $\infty$ .

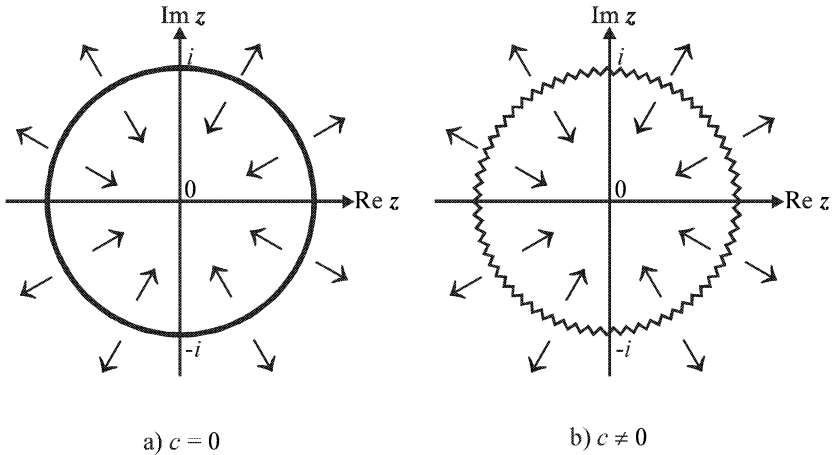


Рис. 6.1

Теория множеств Жюлиа основывается на фундаментальной теореме Монтеля. Эта глубокая теорема утверждает, что ненормальные семейства функций принимают все комплексные значения, исключая возможно одно около каждой точки.

**Теорема Монтеля 6.1 [11]:** Пусть  $\{g_k\}$  является семейством комплексных аналитических функций в открытой области  $U$ . Если  $\{g_k\}$  не является нормальным семейством, то для всех  $\omega \in \mathbb{C}$ , с не более чем



одним исключением, мы имеем  $g_k(z) = \omega$  для некоторого  $z \in U$  и некоторого  $k$ .

Мы проверим нормальность итераций комплексного полинома  $f$ . Определим

$$J_0(f) = \{z \in C : \text{семейство } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ не нормально в } z\}. \quad (6.1)$$

Используя теорему Монтеля, мы покажем, что  $J_0(f)$  совпадает с замыканием отталкивающих периодических точек, то есть с  $J(f)$ . Фактически (6.1) часто рассматривается как определение множества Жюлиа. Хотя наше определение  $J(f)$  интуитивно более понятно,  $J_0(f)$  гораздо легче для исследования. Мы выведем несколько основных свойств  $J_0(f)$  с конечной целью показать, что  $J(f) = J_0(f)$ .

Заметим, что дополнение

$$F_0(f) = C \setminus J_0(f) = \{z \in C \text{ и таких, что существует открытое множество } V \text{ с } z \in V \text{ и семейством } \{f^k\}, \text{ нормальным на } V\} \quad (6.2)$$

является, очевидно, открытым множеством.

**Утверждение 6.1.** *Если  $f$  – полином, то  $J_0(f)$  компактно.*

**Доказательство.** По вышеприведенному замечанию  $J_0(f)$  имеет открытое дополнение, поэтому оно замкнуто. Так как  $f$  – полином степени, по крайней мере, 2, мы можем найти такое  $r$ , что  $|f(z)| \geq 2|z|$  и  $|f^k(z)| > 2^k r$ , если  $|z| \geq r$ . Таким образом,  $f^k(z) \rightarrow \infty$  равномерно на открытом множестве  $V = \{z : |z| > r\}$ . По определению,  $\{f^k\}$  нормально на  $V$ , так что  $V \subset C \setminus J_0(f)$ . Таким образом,  $J_0(f)$  ограничено и поэтому компактно.

(Заметим, что если  $f: C \cup \{\infty\} \rightarrow C \cup \{\infty\}$  является рациональной функцией, то  $J_0$  должно быть замкнуто, но не обязано быть ограниченным. Действительно, возможно  $J_0$  будет всей комплексной плоскостью; например, если  $f(z) = ((z-2)/z)^2$ .)

**Утверждение 6.2.**  $J_0(f)$  не пусто.

**Доказательство.** Предположим, что  $J_0(f) = \emptyset$ . Тогда, для любого  $r > 0$  семейство  $\{f^k\}$  нормально на открытом круге  $B_r^0(0)$  с центром в начале координат и радиусом  $r$  (так как замкнутый диск  $B_r(0)$  является компактным, он может быть покрыт конечным числом открытых множеств, на которых  $f^k$  нормальна). Так как  $f$  – полином, взяв  $r$  достаточно большим, получим, что  $B_r^0(0)$  содержит точку  $z$ , для которой  $|f^k(z)| \rightarrow \infty$  и также содержит неподвижную точку  $\omega$  преобразования  $f$ :  $f^k(\omega) = \omega$  для всех  $k$ . Таким образом, невозможно для любой подпоследовательности  $\{f^{k_i}\}$  равномерно сходиться либо к ограниченной функции, либо к бесконечности на любом компактном подмножестве  $B_r^0(0)$ , которое содержит как  $z$ , так и  $\omega$ , опровергая нормальность  $\{f^k\}$ .

**Утверждение 6.3.**  $J_0(f)$  является инвариантным как для  $f$ , так и для  $f^{-1}$ , то есть  $J_0 = f(J_0) = f^{-1}(J_0)$ .

**Доказательство.** Мы покажем, что дополнение  $F_0(f)$  – инвариант. Пусть  $V$  – открытое множество с  $\{f^k\}$  нормальной на  $V$ . Так как  $f$  непрерывна, то  $f^{-1}(V)$  – открытое множество. Пусть  $\{f^{k_i}\}$  является подпоследовательностью  $\{f^k\}$ . Тогда  $\{f^{k_i+1}\}$  имеет подпоследовательность  $\{f^{k_{i+1}}\}$ , которая равномерно сходится на компактных подмножествах  $V$ . Таким образом, если  $D$  – компактное подмножество  $f^{-1}(V)$ , то  $\{f^{k_i+1}\}$  равномерно сходится на компактном множестве  $f(D)$ , поэтому  $f^{k_i}$  равномерно сходится на  $D$ . Таким образом,  $\{f^k\}$  нормальна на  $f^{-1}(V)$ , поэтому  $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$ . Другие требуемые включения могут быть получены аналогичным способом, используя то, что полином  $f: C \rightarrow C$  – открытое отображение, то есть, что  $f(V)$  открыто, когда  $V$  открыто.

**Утверждение 6.4.**  $J_0(f^p) = J_0(f)$  для любого положительного целого  $p$ .

**Доказательство.** Снова мы работаем с дополнением  $F_0$ . Очевидно, если любая последовательность  $\{f^k\}$  имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся на данном множестве, то же самое верно для  $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$ . Таким образом,  $F_0(f) \subset F_0(f^p)$ .

Если  $D$  компактно и  $\{g_k\}$  семейство функций, равномерно сходящихся на  $D$  либо к ограниченной функции, либо к  $\infty$ , то то же самое верно для  $\{h \circ g_k\}$  для любого полинома  $h$ . Таким образом, если  $\{f^{pk}\}_{k \geq 1}$  нормально на любом открытом множестве  $V$ , то это справедливо и для  $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$ ,  $r = 0, 1, \dots, p-1$ . Но любая подпоследовательность  $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$  содержит бесконечную подпоследовательность  $\{f^{pk+r}\}_{k \geq 1}$  для некоторого целого  $r$  с  $0 \leq r \leq p-1$ , которая имеет подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах  $V$ . Отсюда  $\{f^k\}$  нормальна, поэтому  $F_0(f) \supset F_0(f^p)$ .

Наш следующий результат утверждает, что  $f$  есть «перемешивающее» преобразование, то есть окрестности точек в  $J_0$  покрывают почти всю комплексную плоскость при итерациях  $f$ .

**Утверждение 6.5.** Пусть  $f$  – полином,  $\omega \in J_0(f)$  и пусть  $U$  – любая окрестность  $\omega$ . Тогда  $W \equiv \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$  совпадает с  $\mathbb{C}$ , исключая, возможно, единственную точку. Любая такая исключительная точка не принадлежит  $J_0(f)$  и не зависит от  $\omega$  и  $U$ .

**Доказательство.** По определению  $J_0$  семейство  $\{f^k\}$  не нормально в точке  $\omega$ , поэтому первая часть непосредственно вытекает из теоремы Монтеля.

Предположим, что  $\nu \notin W$ . Если  $f(z) = \nu$ , то, так как  $f(W) \subset W$ , то  $z \notin W$ . Так как  $\mathbb{C} \setminus W$  состоит из самое большее одной точки, то  $z = \nu$ . Отсюда,  $f$  – полином степени  $n$  такой, что единственное

решение  $f(z) - v = 0$  – это  $v$ , и  $f(z) - v = c(z - v)^n$  для некоторой константы  $c$ .

Если  $z$  достаточно близка к  $v$ , то  $f^k(z) - v \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и сходимость имеет место, например, на  $\{z : |z - v| < (2c)^{-1/(n-1)}\}$ . Таким образом,  $\{f^k\}$  нормальна в точке  $v$ , поэтому исключительная точка  $v \notin J_0(f)$ . Очевидно,  $v$  зависит только от полинома  $f$ . (Фактически, если  $W$  не содержит точку  $v$  из  $\mathbb{C}$ , то  $J_0(f)$  – это окружность с центром в точке  $v$  и радиуса  $c^{-1/(n-1)}$ ).

Следующее утверждение (следствие) является основой многих компьютерных картинок множеств Жюлиа.

#### Утверждение 6.6.

- (а) Следующее свойство выполняется для всех  $z \in \mathbb{C}$  с, самое большее, одним исключением: если  $U$  – открытое множество, пересекающее  $J_0(f)$ , то  $f^{-k}(z)$  пересекает  $U$  для бесконечно многих значений  $k$ .
- (б) Если  $z \in J_0(f)$ , то  $J_0(f)$  – это замыкание  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ .

#### Доказательство.

- (а) При условии, что  $z$  не является исключительной точкой утверждения 6.5,  $z \in f^k(U)$ . Поэтому  $f^{-k}(z)$  пересекает  $U$  для некоторого  $k$ . Используя это повторно, мы получим бесконечную последовательность  $k$  с  $f^{-k}(z)$ , пересекающей  $U$ .
- (б) Если  $z \in J_0(f)$ , то  $f^{-k}(z) \subset J_0(f)$  по утверждению 6.3, так что  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$  и, поэтому, его замыкание содержится в замкнутом множестве  $J_0(f)$ . С другой стороны, если  $U$  – открытое множество, содержащее  $z \in J_0(f)$ , то  $f^{-k}(z)$  пересекает  $U$  для некоторого  $k$  по пункту (а);  $z$  не может быть исключительной точкой по утверждению 6.5.

Другое непосредственное следствие из утверждения 6.5 – это то, что  $J_0(f)$  не может быть «слишком толстым».

**Утверждение 6.7.** *Если  $f$  – полином, то  $J_0(f)$  имеет пустую внутренность.*

**Доказательство.** Предположим,  $J_0(f)$  содержит открытое множество  $U$ . Тогда  $J_0(f) \supset f^k(U)$  для всех  $k$ , по утверждению 6.3, поэтому  $J_0(f) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(U)$ . По утверждению 6.5,  $J_0(f)$  это вся плоскость  $\mathbb{C}$ , исключая, возможно, одну точку. Это опровергает утверждение 6.1 об ограниченности  $J_0(f)$ .

**Утверждение 6.8.**  $J_0(f)$  – совершенное множество (то есть замкнутое и не имеет изолированных точек) и поэтому несчетно.

**Доказательство.**

Пусть  $v \in J_0(f)$  и пусть  $U$  будет окрестностью  $v$ . Мы должны показать, что  $U$  содержит другие точки  $J_0(f)$ . Мы рассмотрим эти три случая отдельно.

- (1)  $v$  не является неподвижной или периодической точкой  $f$ . По утверждению 6.3 и утверждению 6.6(б),  $U$  содержит точку  $f^{-k}(v) \in J_0(f)$  для некоторого  $k \geq 1$ , и эта точка должна быть отлична от  $v$ .
- (2)  $f(v) = v$ . Если  $f(z) = v$  не имеет решения отличного от  $v$ , тогда так же, как и в доказательстве утверждения 6.5,  $v \notin J_0(f)$ . Таким образом, существует  $\omega \neq v$  с  $f(\omega) = v$ . По утверждению 6.6(б)  $U$  содержит точку  $f^{-k}(\omega)$  для некоторого  $k \geq 1$ . Любая такая точка находится в  $J_0(f)$  с помощью обратного инварианта и отличается от  $v$ , так как  $f^k(v) = v$ .
- (3)  $f^p(v) = v$  для некоторого  $p > 1$ . По утверждению 6.4,  $J_0(f) = J_0(f^p)$ , поэтому, применяя (6.2) к  $f^p$ , мы видим, что  $U$  содержит точки  $J_0(f^p) = J_0(f)$  другие, чем  $v$ .

Мы можем теперь доказать главный результат этого раздела, что  $J_0(f)$  – множество точек ненормальности  $\{f^k\}$  (это точно то же самое, что и  $J(f)$ , замыкание отталкивающих периодических точек  $f$ ).

**Утверждение 6.9.** *Если  $f$  – полином, тогда  $J(f) = J_0(f)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\omega$  будет отталкивающей периодической точкой  $f$  периода  $p$ , поэтому  $\omega$  – отталкивающая неподвижная точка  $g = f^p$ . Предположим, что  $\{g^k\}$  нормально в точке  $\omega$ , тогда  $\omega$  имеет открытую окрестность  $V$ , на которой подпоследовательность  $\{g^{k_i}\}$  сходится к конечной аналитической функции  $g_0$  (она не может сходиться к  $\infty$ , так как  $g^k(\omega) = \omega$  для всех  $k$ ). По известному результату из комплексного анализа производные также сходятся,  $(g^{k_i})'(z) \rightarrow g_0'(z)$ , если  $z \in V$ . Однако  $\left| (g^{k_i})'(\omega) \right| = |(g'(\omega))^{k_i}| \rightarrow \infty$ , так как  $\omega$  – это отталкивающая неподвижная точка и  $|g'(\omega)| > 1$ . Это опровергает конечность  $g_0'(\omega)$ , поэтому  $\{g^k\}$  не может быть нормальным в  $\omega$ . Таким образом,  $\omega \in J_0(g) = J_0(f^p) = J_0(f)$ , по утверждению 6.4. Так как  $J_0(f)$  замкнуто, то отсюда следует  $J(f) \subset J_0(f)$ .

Пусть  $K = \{\omega \in J_0(f) \text{ такое, что существует } z \neq \omega \text{ с } f(z) = \omega \text{ и } f'(z) \neq 0\}$ . Предположим, что  $\omega \in K$ . Тогда существует открытая окрестность  $V$  точки  $\omega$ , в которой мы можем найти локальную аналитическую обратную функцию  $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} \setminus V$ , так что  $f(f^{-1}(z)) = z$  для  $z \in V$  (только выбирайте значения  $f^{-1}(z)$  непрерывным способом). Определим семейство аналитических функций  $\{h_k\}$  на  $V$  с помощью

$$h_k(z) = \frac{(f^k(z) - z)}{(f^{-1}(z) - z)}.$$

Пусть  $U$  будет любая открытая окрестность  $\omega$  с  $U \subset V$ . Так как  $\omega \in J_0(f)$ , семейство  $\{f^k\}$  и, таким образом, из определения, семейство  $\{h_k\}$  не является нормальным на  $U$ . По теореме Монтеля  $h_k(z)$  должно

принимать значение 0 или 1 для некоторого  $k$  и  $z \in U$ . В первом случае  $f^k(z) = z$  для некоторого  $z \in U$ ; во втором случае  $f^k(z) = f^{-1}(z)$ , поэтому  $f^{k+1}(z) = z$  для некоторого  $z \in U$ . Таким образом,  $U$  содержит периодическую точку  $f$ , поэтому  $\omega \in J(f)$ .

Мы показали, что  $K \subset J(f)$ ; беря замыкание, получим  $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$ . Однако  $K$  содержит все точки из  $J_0(f)$ , исключая конечное число точек. Так как  $J_0(f)$  не содержит изолированных точек по утверждению 6.8, то  $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$ , что и требовалось доказать.

Если  $\omega$  – притягивающая неподвижная точка преобразования  $f$ , то мы назовем множество

$$A(\omega) = \{ z \in \mathbf{C} : f^k(z) \rightarrow \omega \text{ при } k \rightarrow \infty \}$$

бассейном притяжения для  $\omega$ . Мы определяем бассейн притяжения бесконечности,  $A(\infty)$ , аналогично. Так как  $\omega$  – притягивающая точка, то существует открытое множество  $V$ , содержащее  $\omega$  в  $A(\omega)$  (если  $\omega = \infty$ , мы можем взять  $\{z : |z| > r\}$  для достаточно большого  $r$ ). Это означает, что  $A(\omega)$  открытое, ибо если  $f^k(z) \in V$  для некоторого  $k$ , то  $z \in f^{-k}(V)$ , которое открытое. Следующая характеристика  $J$  как границы любого бассейна притяжения чрезвычайно полезна в определении множеств Жюлиа. Обозначим границу множества  $A$  через  $\partial A$ .

**Утверждение 6.10.** Пусть  $\omega$  — притягивающая неподвижная точка  $f$ . Тогда  $\partial A(\omega) = J(f)$ . То же самое справедливо, если  $\omega = \infty$ .

**Доказательство.** Если  $z \in J(f)$ , то  $f^k(z) \in J(f)$  для любых  $k$ . Следовательно, невозможна сходимость к притягивающей неподвижной точке и  $z \notin A(\omega)$ . Однако, если  $U$  – любая окрестность  $z$ , то множество  $f^k(U)$ , по утверждению 6.5, содержит точки  $A(\omega)$  для некоторого  $k$ . Поэтому существуют точки произвольно близкие к  $z$ , которые приближаются к  $\omega$ . Таким образом,  $z \in \overline{A(\omega)}$ , и поэтому  $z \in \partial A(\omega)$ .

Предположим,  $z \in \partial A(\omega)$ , но  $z \notin J(f) = J_0(f)$ . Тогда  $z$  имеет связную открытую окрестность  $V$ , на которой  $\{f^k\}$  имеет подпоследовательность, сходящуюся либо к аналитической функции, либо к  $\infty$ . Подпоследовательность сходится к  $\omega$  на  $V \cap A(\omega)$ , которое открыто и не пусто, и поэтому сходится и на  $V$ , так как аналитическая функция постоянна на связном множестве, если она постоянна на любом открытом подмножестве. Все точки  $V$  отображаются в  $A(\omega)$  итерациями  $f$ , поэтому  $V \subset A(\omega)$ , опровергая, что  $z \in \partial A(\omega)$ .

В качестве примера, иллюстрирующего это утверждение, рассмотрим случай  $f(z) = z^2$ . Множество Жюлиа – это единичная окружность, которая является границей как для  $A(0)$ , так и для  $A(\infty)$ .

Теперь мы соберем все главные результаты этого раздела.

**Утверждение 6.11.** *Множество Жюлиа  $J(f)$  – это замыкание отталкивающих периодических точек полинома  $f$ . Оно несчетно, компактно, не содержит изолированных точек и инвариантно для  $f$  и  $f^{-1}$ . Если  $z \in J(f)$ , то  $J(f)$  – это замыкание  $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ . Множество Жюлиа – это граница бассейна притяжения каждой притягивающей неподвижной точки  $f$ , включая  $\infty$ , и  $J(f) = J(f^p)$  для каждого положительного целого  $p$ .*

**Доказательство** следует из  $J(f) = J_0(f)$ .

Можно обнаружить и более существенные свойства динамики  $f$  на множестве Жюлиа, например, что  $f$  действует хаотически на  $J$  (см. п. 6.2). Действительно, периодические точки  $f$  плотны в  $J$ , по определению. С другой стороны,  $J$  содержит точки  $z$  с итерациями  $f^k(z)$ , которые плотны в  $J$ . Более того,  $f$  имеет чувствительную зависимость от начальных условий на  $J$ :  $|f^k(z) - f^k(\omega)|$  будет большим для некоторого  $k$  при близких  $z$  и  $\omega \in J$ .



## 6.2. Одномерные комплексные рациональные эндоморфизмы

Рассмотрим одномерные комплексные рациональные отображения вида:

$$z_{k+1} = \frac{P_n(z_k)}{Q_m(z_k)} = R(z_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

где  $P_n = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ ,  $Q_m = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$ ,  $m \leq n$ . Если положить  $z = x + iy$  и разделить реальную и мнимые части, то мы придем к двумерному вещественному отображению. Заметим, что коэффициенты полиномов также могут быть комплексными числами. Отображения  $R$  вида (6.3) являются, вообще говоря, необратимыми отображениями. Например, у таких отображений обратное отображение может быть неоднозначным. Подобные отображения называются *эндоморфизмами*. Отметим, что полиномиальные отображения, рассмотренные в п. 6.1, являются частным случаем (6.3) при  $m=0$ .

Исследованию эндоморфизмов вида (6.3) посвящены объемные труды французских математиков Жюлиа [8] и Фату [9, 10]. Неслучайно, что многие из экспериментов Мандельброта [1] сделаны на основе работы Гастона Жюлиа (1893 - 1978). Хотя Мандельброт родился в Польше (1924), он получил образование во Франции и имел возможность ознакомиться с работами Жюлиа и Фату.

В 1918 г. Жюлиа опубликовал работу [8], в которой он, по сути, заложил основы фрактальной теории для конформных преобразований, т.е. отображений, которые “оставляют углы неизменными”. Примером такого отображения является аналитическое преобразование

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad c = \text{const}, \quad (6.4)$$

которое является частным случаем отображения (6.3).

В последние годы интерес к таким отображениям возрос, благодаря, в частности, красивым компьютерным представлениям их нерегулярных репеллеров (множеств Жюлиа), которые являются фракталами. В дополнение к п. 6.1 приведем краткую информацию по таким отображениям, следуя, например, обзорной статье Якобсона [13].

Если положить  $z = x + iy$ ,  $i = \sqrt{-1}$  и разделить в (6.3) действительную и мнимую части, то придем к двумерному вещественному отображению плоскости  $(x, y)$ . Итерации отображения (6.3) – это последовательность точек  $z_j = (x_j, y_j)$ . Эту последовательность точек называют *траекторией* или *орбитой отображения* (6.3). Отображение (6.3), как мы отметили в п. 6.1.1, может иметь циклические траектории. А именно, точка  $M$  называется периодической (циклической) периода  $p$  точкой отображения  $R$ , если  $R^p M = M$ , и для любого  $1 \leq j < p$  имеем  $R^j M \neq M^j$ . Наличие периодической точки означает существование  $p$  точек  $M_1, M_2, \dots, M_p$ , которые последовательно под действием отображения  $R$  переходят одна в другую, и последняя точка совпадает с первой  $(M_1 \xrightarrow{R} M_2 \xrightarrow{R} M_3 \xrightarrow{R} \dots \xrightarrow{R} M_p = M_1)$ . Итак, точки  $M_j$ ,  $j \in \overline{1, p}$ , образуют циклическую последовательность или, иначе говоря, цикл периода  $p$ .

Подобно одномерному вещественному отображению, рассмотренному в 5-й главе, итерации отображения (6.3) могут быть как асимптотически устойчивыми, так и иметь нерегулярное поведение.

Для описания возможных типов динамики в последнее время используется следующая классификация периодических траекторий (иначе, циклов) эндоморфизма (6.3) [13]. Обозначим циклическую последовательность (траекторию)  $z_j$  периода  $p$  через  $\alpha$  ( $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ ), то есть  $R\alpha_0 = \alpha_1, R\alpha_1 = \alpha_2, \dots, R\alpha_{p-1} = \alpha_0$ .

**Определение 6.1.** Цикл  $\alpha$  называется

притягивающим (устойчивым), если  $\mu = \left| (R^p(\alpha))' \right| = \left| \prod_{j=0}^{p-1} R'(\alpha_j) \right| < 1$ ;

нейтральным рациональным, если  $\mu = \exp(2\pi ir)$ ,  $r \in \mathbb{Q}$  ( $r$  – рациональное число);

нейтральным иррациональным, если  $\mu = \exp(2\pi i\theta)$ ,  $\theta$  – иррациональное;

отталкивающим, если  $\mu > 1$ .

Точки с нерегулярным поведением содержатся в так называемом множестве Жюлиа  $J(R)$ , которое совпадает с замыканием множества отталкивающих траекторий отображения (6.3).

Множество  $J(R)$  непустое, совершенное и инвариантное относительно  $R$  и  $R^{-1}$ . Если  $J(R)$  содержит внутреннюю точку (то есть точки из ее окрестности также принадлежат  $J(R)$ ), то все точки плоскости  $(x, y)$  принадлежат  $J(R)$ . Такая ситуация реализуется, например, для  $R = \frac{(z^2 + 1)^2}{4z(z^2 - 1)}$ . Однако в смысле категории такие эндоморфизмы являются исключением. Обозначим через  $C$  комплексную плоскость  $(x, y)$ ,  $z = x + iy$ .

Если  $\Delta(R) = C \setminus J(R) \neq \emptyset$ , то всякая компонента связности  $D \subset \Delta(R)$  состоит из точек с одинаковым асимптотическим поведением. Поведение точек  $z \in \Delta(R)$  изучалось Жюлиа [8] и Фату [9, 10]. Окончательный результат был получен Сулливаном [12].

**Теорема 6.2.** Пусть  $D$  – компонента связности  $\Delta(R)$ . Тогда существует такое  $k_0$ , что область  $R^{k_0} D = D_1$  – периодическая, то есть  $D_1 = R^m(D_1)$ ,  $R^k D_1 \cap R^l D_1 = \emptyset$  при  $|k - l| < m$  и некотором  $m$ ;

число периодических компонент конечно;

динамика на любой периодической компоненте  $D$  относится к одному из следующих типов:

- a) для всякого  $z \in D$  траектория  $\{R^n(z)\}$  сходится к точкам некоторого притягивающего цикла  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$ , где  $\alpha_j \in R^j D$ ;
- b) для всякого  $z \in D$  траектория  $\{R^n(z)\}$  сходится к точкам некоторого рационального притягивающего цикла  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$ , где  $\alpha_j$  принадлежит границе  $R^j D$ ;
- c)  $D$  содержит точку некоторого иррационального нейтрального цикла  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$  и  $R^m|_D$  топологически сопряжено с поворотом на иррациональный угол в единичном круге;

- d)  $R^m \setminus D$  топологически сопряжено с поворотом кольца на некоторый иррациональный угол.

На рис. 6.2, полученном с помощью программы «Fractals», показана структура множества  $J(R)$  и компонент связности множества  $\Delta(R)$  для отображения:

$$z' = (5z - 2z^3)/3 \quad (6.5)$$

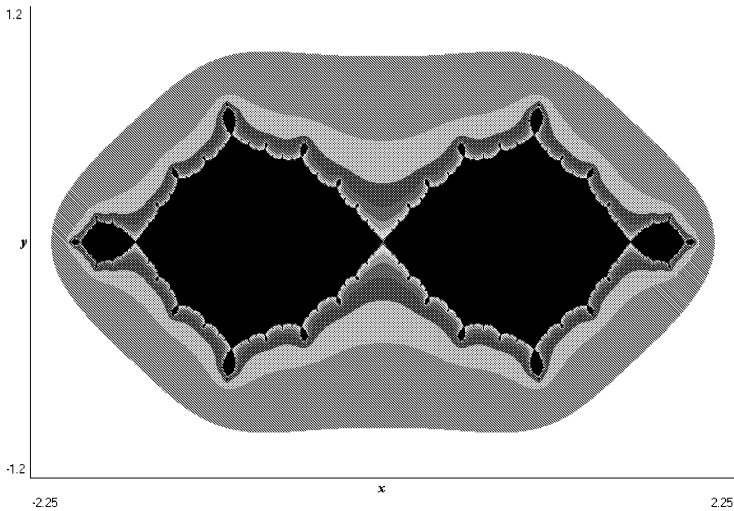


Рис. 6.2. Структура множества Жюлиа для отображения (6.5)

Множество  $\Delta(R)$  состоит из инвариантной относительно  $R$  области притяжения к бесконечности  $D_\infty$  и областей притяжения  $D_1, D_{-1}$  к неподвижным точкам  $z = 1, z = -1$ , а так же объединения всех преобразований  $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{-n}(D_{\pm 1})$ . Множество Жюлиа  $J(R)$  совпадает с границей множества  $D_\infty$ . Далее мы рассмотрим более детально отображение Жюлиа  $z' = z^2 + c$ .

Наиболее изучены рациональные эндоморфизмы, удовлетворяющие следующему условию гиперболичности.

Существуют такие  $c > 1$  и  $k_0 \in \mathbb{N}$ , что для всякого  $z \in J(R)$  справедливо неравенство  $\left| (R^{k_0}(z))' \right| > c$ .

Для гиперболических эндоморфизмов любая компонента множества  $J(R)$  переходит в компоненту типа  $a$ ).

**Необходимое и достаточное условие гиперболичности состоит в следующем:**

*итерации любой критической точки отображения  $z' = R(z)$  сходятся к некоторому притягивающему циклу (критической называется точка  $z = z_{кр}$ , для которой  $R'(z_{кр}) = 0$ ).*

Рациональные отображения с гиперболическим множеством Жюлиа «структурно устойчивы», то есть не меняют структуры при малом изменении параметров (коэффициентов полиномов  $P_n, Q_m$ ).

Хотя в настоящее время неизвестно, плотны ли гиперболические отображения, имеет место следующая теорема о структурной устойчивости на множестве Жюлиа (так называемая  $J$ -устойчивость), доказанная Любичем [14].

**Теорема 6.3.** *Для всякого семейства рациональных эндоморфизмов, голоморфно зависящих от параметров  $\mu \in U \subset \mathbb{C}^k$ ,  $k = \max(n, m)$ , множество  $S = \{ \mu : F_\mu(z) \text{ есть } J\text{-устойчивый эндоморфизм} \}$  открыто и всюду плотно в  $U$ .*

Естественно возникает вопрос об эргодических свойствах множества Жюлиа, то есть вопрос об инвариантных мерах, сосредоточенных на этом множестве. В частности, возникает вопрос о вычислении фрактальной размерности множества Жюлиа.

## Глава 7. Фракталы Жюлиа и Мандельброта

### 7.1. Фракталы Жюлиа

В 1918 году Гастон Жюлиа написал подробный «мемуар» в несколько сотен страниц, который был награжден призом Французской Академии. «Этот труд написан на высоком уровне, но ... едва ли можно найти в нем какие-то изображения» [3]. Работа Жюлиа игнорировалась в течение почти полувека, однако теперь она оказалась в центре внимания. Компьютеры сделали видимым то, что не могло быть изображено во времена Жюлиа. Визуальные результаты превзошли все ожидания (см., например, [4], [7]).

В работе Жюлиа рассматриваются итерации отображения вида:  $x \rightarrow f(x, y)$ ,  $y \rightarrow g(x, y)$ , которые сохраняют углы, то есть конформные преобразования. Наиболее изученным примером отображений такого вида является отображение (6.4), которое после деления вещественной и мнимой частей запишется в виде ( $z = x + iy$ ,  $c = a + ib$ ):

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a, \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + b\end{aligned} \quad (7.1)$$

Оказывается, это отображение дает множество фракталов, соответствующих множеству Жюлиа  $J(a, b)$ .

Используя утверждение 6.11, дадим следующее

**Определение 7.1.** Множество Жюлиа  $J(a, b)$  – это граница области  $D_\infty$  (то есть граница области притяжения бесконечности).

Заметим, что при  $a = b = 0$  множество Жюлиа – это окружность единичного радиуса. Действительно, в этом случае отображение  $z_{n+1} = z_n^2$  имеет единственную устойчивую неподвижную точку  $z = 0$ . При  $|z| < 1$  итерации стремятся к нулю, а при  $|z| > 1$  – уходят на бесконечность. При малых значениях  $a, b$  множество  $J(a, b)$  уже не имеет

форму окружности и, как правило, является фракталом (см. рис. 7.1). На рис. 7.2 показан увеличенный фрагмент рисунка 7.1.

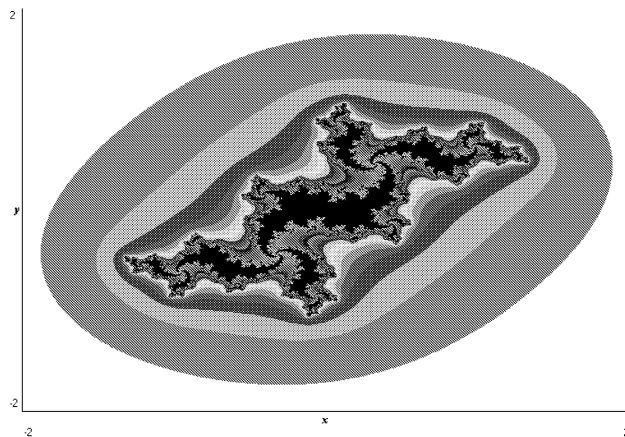


Рис. 7.1. Фрактал Жюлия при  $a = -0.22$ ,  $b = -0.74$

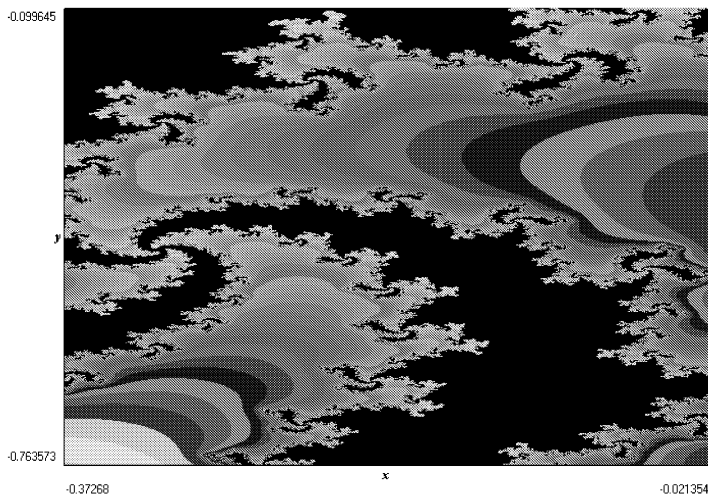


Рис. 7.2. Фрагмент фрактала Жюлия при  $a = -0.22$ ,  $b = -0.74$

Жюлиа подробно исследовал свойства этого множества. Вот наиболее важные из этих свойств (см. Утверждение 6.11) .

- 1) *Отображение (6.4) (или (7.1)) преобразует  $J(a, b)$  в себя. Другими словами, множество  $J(a, b)$  – инвариантное множество преобразования (7.1).*
- 2) *Почти каждая точка  $P(x, y)$  имеет два прообраза.*

Действительно, разрешая (7.1) относительно  $x$  и  $y$ , получаем

$$x_n^2 - y_n^2 = x_{n+1} - a$$

$$(x_n^2 + y_n^2)^2 = (x_n^2 - y_n^2)^2 + 4x_n^2 y_n^2 = (x_{n+1} - a)^2 + (y_{n+1} - b)^2$$

Поэтому  $x_n^2 + y_n^2 = \sqrt{(x_{n+1} - a)^2 + (y_{n+1} - b)^2}$  и, следовательно,

$$x_n^2 = \frac{1}{2}(x_{n+1} - a) + \frac{1}{2}\sqrt{(x_{n+1} - a)^2 + (y_{n+1} - b)^2}.$$

Из этой формулы находим два значения для  $x_n$ :

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{x_{n+1} - a + \sqrt{(x_{n+1} - a)^2 + (y_{n+1} - b)^2}}{2}}. \quad (7.2)$$

Если  $x_n$  известно,  $y_n$  можно найти из второго соотношения в формуле (7.1):

$$y_n = (y_{n+1} - b)/2x_n \quad (7.3)$$

Итак, точка  $P(x, y)$  имеет два прообраза. Каждый из этих прообразов имеет, в свою очередь, также по два прообраза и т. д. Снова мы получаем структуру двоичного дерева. Согласно Жюлиа, прообразы заполняют  $J$  всюду плотно.

- 3) *Все неустойчивые периодические циклы расположены в  $J$ .*
- 4) *Орбита произвольной точки  $P \in J$  остается в  $J$  и является либо периодическим циклом, либо хаотической орбитой.*
- 5) *Для обратного отображения (7.2), (7.3) множество Жюлиа – аттрактор.*

Используя формулы (7.1), несложно написать компьютерную программу для построения фрактала Жюлиа – множества Жюлиа  $J(a, b)$ . На рис. 7.3 показан фрактал  $J(0, 1)$ , а на рис. 7.4 – фрактал  $J(-3/4, 0)$ .



Фракталы Жюлия всегда симметричны относительно начала координат. Если же  $b = 0$ , то они симметричны относительно обеих осей  $x$  и  $y$ . Этот факт можно использовать при написании программы построения фракталов. Рассмотрим подробнее случай  $b = 0$ .

Если в (7.1) положим  $b = 0$  и начнем итерации от точки  $P(x, y)$  на оси  $x$  ( $y = 0$ ), то ее образ также будет лежать на оси  $x$ . Таким образом, для орбиты, выходящей из этой точки,  $y_n = 0$ , и

$$x_{n+1} = x_n^2 + a. \quad (7.4)$$

То есть, отображение (7.1) в этом случае сводится к одномерному отображению (7.4).

Отображение (7.4) эквивалентно модели ограниченного роста популяции

$$\xi_{n+1} = \alpha \xi_n (1 - \xi_n). \quad (7.5)$$

Действительно, делая в этом отображении замену  $\xi_n = 1/2 - x_n/\alpha$ , получаем (7.4) с  $a = \alpha/2 - \alpha^2/4$ .

В главе 5 мы нашли, что для  $1 < \alpha < 3$  отображение (7.5) имеет устойчивую неподвижную точку  $\xi = 1 - 1/\alpha$ , и установили поведение при  $\alpha > 3$ . А именно, при увеличении  $\alpha$  от  $\alpha = 3$  наблюдается удвоение периода по Фейгенбауму. Значение  $\alpha = 3$  соответствует  $a = -3/4$ , а неподвижная точка  $\xi = 2/3$  соответствует  $x = -1/2$ . Итак, эта неподвижная точка находится на границе области устойчивости. Для двумерного отображения (7.1) это означает, что неподвижная точка  $(-1/2, 0)$  находится на границе области устойчивости и, следовательно, принадлежит фракталу.

Дальнейший анализ показывает, что фрактал на рис. 7.4 состоит из бесконечного ряда островов, которые касаются друг друга попарно на оси  $x$ .

Рис. 7.5 показывает фрактал  $J(0.11, 0.66)$ . Примечательно, что он не является связным, а состоит из отдельных компонент, подобно точечному множеству Кантора. Фракталы такого типа обычно называют «пылью Фату» в честь математика Фату.

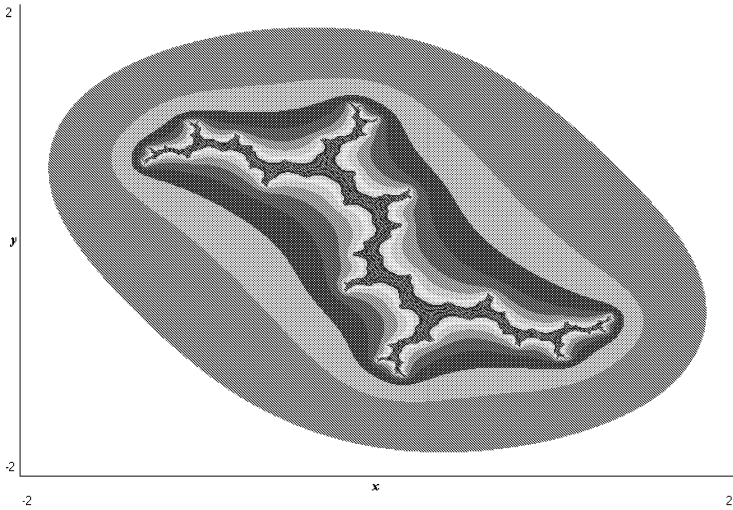


Рис. 7.3. Фрактал Жюлиа при  $a = 0, b = 1$

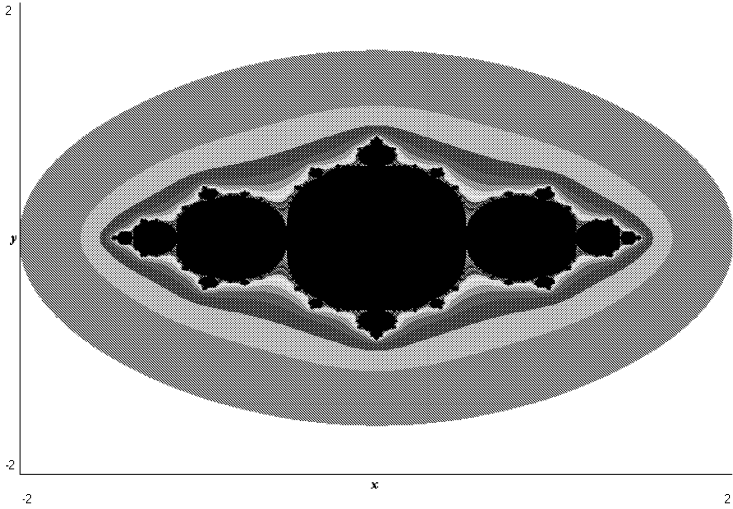


Рис. 7.4. Фрактал Жюлиа при  $a = -0.75, b = 0$

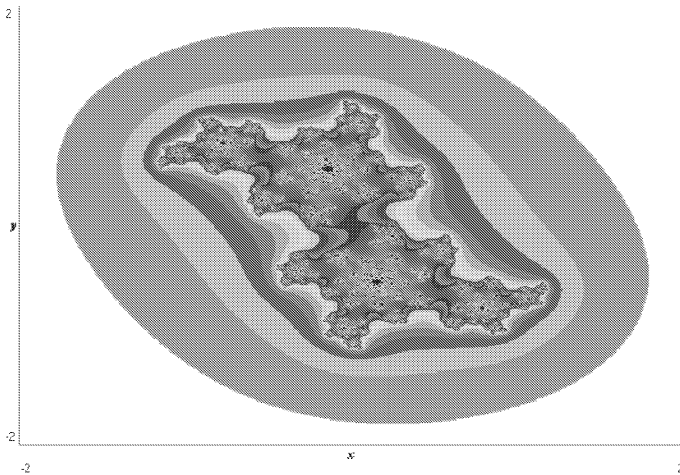


Рис. 7.5. Фрактал Жюлия при  $a=0.11$ ,  $b=0.66$

Фракталы Жюлия дают много прекрасных картин, особенно если использовать при их построении цвет.

При построении цветных фракталов используется условие приближения орбиты к аттрактору – бесконечно удаленному, как для фракталов Жюлия, или к конечному, как для фракталов Ньютона, о которых речь пойдет ниже.

Так как для приближения к аттрактору орбите может потребоваться огромное количество итераций, то в программе необходимо использовать некое предельное значение для числа итераций, после которого считаем, что орбита подошла к аттрактору.

Цвет же каждой точки на экране определяется числом итераций, которое потребовалось орбите, чтобы приблизиться к аттрактору. Если использовать 256 цветов, то номер цвета можно, например, определить по формуле  $n \bmod 256$ , где  $n$  – число совершенных итераций.

## 7.2. Фрактал Мандельброта

Фракталы Жюлиа (множества Жюлиа  $J(a, b)$ ) можно разделить на два основных класса: 1) связные и 2) вполне несвязные. Во втором случае фрактал состоит из несчетного множества дискретных точек. Классический пример подобного множества – точечное множество Кантора на отрезке  $[0, 1]$ .

Если же фрактал связный, то он состоит из набора линий, иногда – из единственной замкнутой кривой, иногда – это петли внутри петель, внутри петель и т. д., иногда – это дендрит.

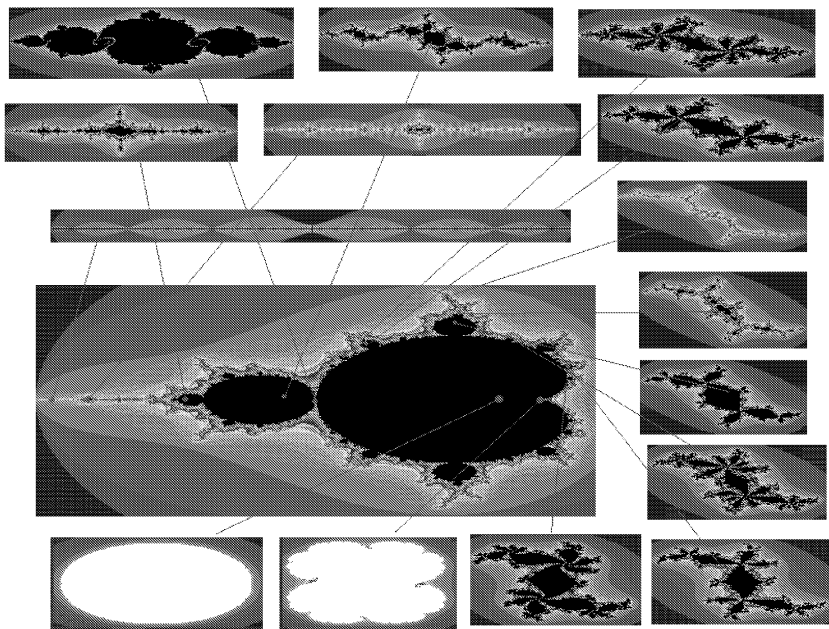


Рис. 7.6. Фрактал Мандельброта и множества Жюлиа для указанных точек из множества Мандельброта.

Для фракталов Жюлия  $J(a, b)$  тип зависит от значений параметров  $a$  и  $b$ . Мандельброт нашел множество параметров на плоскости  $(a, b)$ , для которого фрактал Жюлия связный. Ключ к построению такого множества дал Жюлия: надо проверить орбиту, выходящую из начальной точки  $x_0 = a, y_0 = b$ . Если эта орбита уходит на бесконечность, то  $J(a, b)$  – несвязный, подобно пыли Кантора. Это дает алгоритм для построения «бифуркационного» множества. Все точки на плоскости  $(a, b)$ , для которых  $J(a, b)$  – связное множество, составляют, так называемое множество Мандельброта. На рис. 7.6 множество Мандельброта – это точки, расположенные в черной области. Это множество симметрично относительно оси  $a$ . Граница множества Мандельброта представляет собой фрактал Мандельброта, в чем легко убедиться, увеличивая его отдельные фрагменты. Множество Мандельброта напоминает конгломерат фруктов или овощей; иногда его называют «картофельным человеком». Часть, по форме похожая на почку, ограничена кривой, похожей на сердце. Сглаженная (круговая) часть на самом деле является окружностью с центром  $(-1, 0)$  и радиусом  $1/4$ . Вокруг нее лежит ряд маленьких и крошечных кругов. Более подробные картины показывают, что это явление повторяется при уменьшении масштаба.

На оси  $a$  множество Мандельброта описывается одномерным отображением вида (7.4), (7.5). Для такого отображения мы установили явление удвоения периода Фейгенбаума с универсальным масштабированием. Это явление для отображения (7.5) характеризуется бифуркационными значениями  $\alpha = 3; 3.4495; 3.5441; 3.5644; 3.5688; \dots; 3.5699$ . Для отображения (7.4), соответственно, имеем:  $a = -0.7500; -1.2500; -1.3681; -1.3940; -1.3996; \dots; -1.4012$ . Эти значения соответствуют точкам касания круговых областей, диаметры которых уменьшаются, и их уменьшение определяется постоянной Фейгенбаума. Можно найти подобные области вокруг больших кругов.

Изучая отображение (7.5), мы установили, что для  $\alpha \approx 3.83$  существует 3-цикл. Для фигуры Мандельброта это соответствует островам с  $a = -1.75, b = 0$ . При более детальном рассмотрении эти острова называются «континентом» в миниатюре. Мы также можем увидеть подобные острова в окрестности значения,  $a = -0.12, b = \pm 0.74$ . Они, в

свою очередь, соответствуют устойчивому 3-циклу отображения Жюлиа (7.1).

На рис. 7.6 показаны множества Жюлиа для выделенных точек в множестве Мандельброта.

### 7.3. Фрактал Мандельброта на экране компьютера

Хорошие иллюстрации фрактала Мандельброта можно получить на экране дисплея в цвете. Сформируем на экране дисплея прямоугольник с размером  $(2n_1 + 1)(2n_2 + 1)$  пикселей, где  $n_1, n_2$  определяются разрешением (растром) экрана. Каждый пиксель соответствует паре значений  $(a, b)$ , которые нужно проверить. Проверка состоит в повторяющемся применении итерационного процесса (7.1) с заданными значениями  $(a, b)$  в качестве параметров. Чтобы получить множество Мандельброта, возьмите значения  $a \in [-2.5, 1.5]$ ,  $b \in [-2, 2]$ . Вопрос в том, уходит или нет орбита на бесконечность. Оказывается, если за максимальное число итераций  $k_{max}$ , которое выбирается заранее, орбита не покидает круга  $x^2 + y^2 \leq 4$ , то точка  $(a, b)$  принадлежит множеству Мандельброта; на экране такие точки будем обозначать черным цветом. Если же за число итераций  $k < k_{max}$  орбита покидает указанный круг, то считаем, что она уходит на бесконечность. Цвет соответствующей точки  $(a, b)$  выбираем, например, по формуле  $k \bmod 256$ , если используем 256 цветов, или по какой-то другой формуле, или же задавая палитру.

## Глава 8. Фракталы Ньютона

Рассмотрим нелинейное уравнение:

$$f(x) = 0.$$

Нас будут интересовать не только вещественные, но и комплексные корни уравнения. Поэтому вместо  $x$  будем писать  $z$ . Воспользовавшись алгоритмом Ньютона решения нелинейных уравнений, получаем

$$z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

Если удачно выбрать начальное приближение  $z_0$ , то с помощью формулы (8.1) найдем быстро сходящуюся к корню последовательность  $\{z_n\}$ . Если  $f(z)$  – полином, то (8.1) определяет рациональный эндоморфизм. В качестве примера рассмотрим случай  $f = z^k - a$ ,  $k \geq 1$  – целое число. Тогда формула (8.1) примет вид:

$$z_{n+1} = \frac{(k-1)z_n^k + a}{k(z_n^{k-1})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

Выбирая какое-либо начальное приближение, мы найдем корень  $k$ -й степени из числа  $a$ . Как известно, рассматриваемое уравнение имеет  $k$  корней

$$z_{j+1} = \sqrt[k]{a}(\cos(2j\pi/k) + i\sin(2j\pi/k)), \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

расположенных на окружности радиуса  $\sqrt[k]{a}$  и отстоящих друг от друга на угол  $2\pi/k$ .

Заметим, что вычисление  $\sqrt[k]{a}$  в компьютерах основано на формуле (8.2) с начальным приближением  $z_0 = a$  и  $k = 2$ . Корни уравнения  $z^k - a = 0$  являются устойчивыми неподвижными точками отображения (8.2). Основная проблема в применении метода Ньютона связана с выбором начального приближения. Она будет решена, если мы укажем области притяжения неподвижных точек отображения (8.2). Для этого попытаемся построить границу, разделяющую области притяжения различных корней. Оказывается, «граница» имеет фрактальную структуру. Оценив «ширину»

фрактальной зоны, мы тем самым определим области притяжения различных неподвижных точек отображения (различных корней уравнения). Покажем это на примере  $k = 3$ ,  $a = 1$ . Отображение (8.2) принимает вид:

$$z_{n+1} = \frac{2z_n^3 + 1}{3(z_n^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3)$$

Полагая  $z = x + iy$  и разделяя вещественную и мнимую части, приходим к двумерному вещественному отображению:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2}{3}x_n + \frac{x_n^2 - y_n^2}{3(x_n^2 + y_n^2)^2}, \\ y_{n+1} &= \frac{2}{3}y_n \left( \left( 1 - \frac{x_n}{(x_n^2 + y_n^2)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Далее, воспользовавшись программой «Fractals», получаем фрактал, представленный на рисунке 8.1. На рисунке 8.2 показан фрактал для случая  $k = 4$ ,  $a = 1$ , а на рисунке 8.3 – для случая  $k = 5$ ,  $a = 1$ .

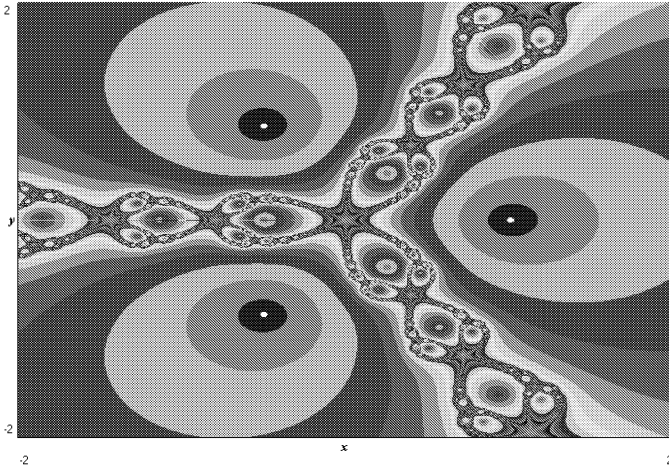
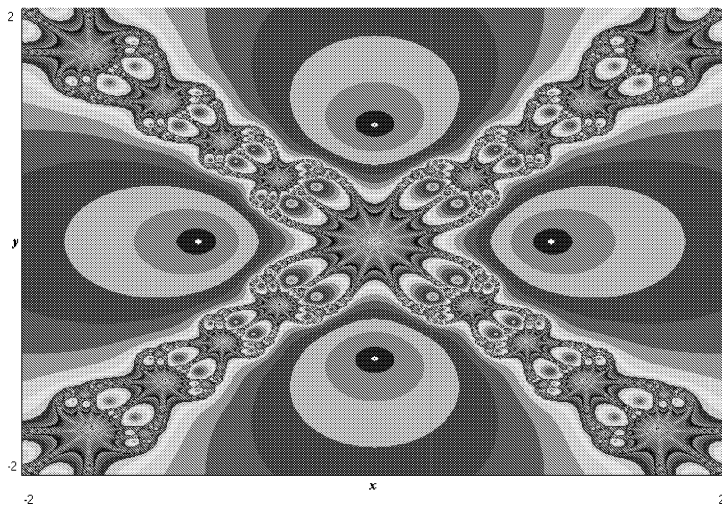
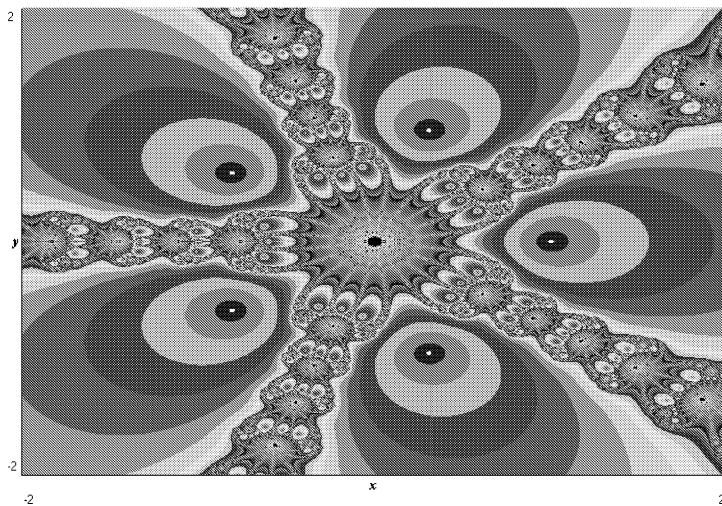


Рис 8.1. Фрактал Ньютона при  $k = 3$ ,  $a = 1$



Рис. 8.2. Фрактал Ньютона при  $k = 4$ ,  $a = 1$ Рис. 8.3. Фрактал Ньютона при  $k = 5$ ,  $a = 1$

## Глава 9. Элементы гиперкомплексной динамики

Здесь мы рассмотрим квадратичное отображение в 3-х мерном гиперпространстве  $H^3$ , исследуем свойства замыкания множества отталкивающих точек, которое является аналогом множества Жюлиа [22]. В заключение приведем компьютерные визуализации этого множества.

Далее, следуя [23], рассмотрим задачу построение цветных паттернов (мозаик) в трехмерном гиперпространстве  $H^3$ , обладающих определенным типом симметрии. Предваряя эти результаты, начнем с гиперкомплексных чисел.

### 9.1. Гиперкомплексные числа и кватернионы

Гиперкомплексные числа имеют вид (см., например, [24])

$$z = \sum_{k=0}^n a_k i_k, \quad (9.1)$$

где  $a_k$  – произвольные действительные числа ( $a_k \in R^1$ ), а  $i_k$  – некоторые символы, которые называют «мнимыми единицами». Иногда говорят, что имеется  $n+1$ -мерное пространство с базисом  $1, i_1, \dots, i_n$  над полем вещественных чисел  $R^1$ . Над выражениями (9.1) будем производить действия

сложения (вычитания) по формулам  $\sum_{k=0}^n a_k i_k + \sum_{k=0}^n b_k i_k = \sum (a_k + b_k) i_k$ . Для

определения «умножения» необходимо задать «таблицу умножения», т. е. указать, чему равны всевозможные произведения  $i_k i_l$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n$ . Задание разных «таблиц умножения» приводит к разным системам гиперкомплексных чисел. Например, в случае комплексных чисел, когда  $n=1$ ,

таблица умножения сводится к единственному равенству  $i \cdot i = -1 + 0 \cdot i$ . В случае  $n=3$  определим таблицу умножения следующим образом:

$$\{i_k i_j\} = \begin{pmatrix} -1 & i_3 & -i_2 \\ -i_3 & -1 & i_1 \\ i_2 & -i_1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Таким образом,  $i_k i_k = -1$  и умножение некоммутативно. Введем обозначение  $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k$ . Тогда из (9.2) следует  $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$ . В этом случае гиперкомплексные числа

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in R^1, \quad (9.3)$$

называются **кватернионами**. Соотношение (9.3) можно представить в виде

$$q = u + vj, \quad u = a + bi, \quad v = c + di, \quad u, v \in C.$$

Здесь через  $C$  обозначено пространство комплексных чисел. Через  $H^4$  будем обозначать пространство кватернионов. Для любого  $q \in H^4$  (также как и в пространстве  $C$ ) можно определить сопряженный кватернион:  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ . По аналогии с комплексными числами число  $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = |q|$  называется модулем кватерниона  $q$ . Справедливы следующие соотношения  $|q| = q\bar{q} = |u|^2 + |v|^2$ . Наконец, гиперкомплексная система кватернионов – это система с делением.

Гиперкомплексные системы и, в частности, кватернионы хорошо известны алгебраистам. Здесь мы будем использовать гиперкомплексную систему при рассмотрении «динамической задачи» об отображениях, обобщающих известное отображение Жюлиа.

## 9.2. Отображение Жюлиа в гиперпространстве

Рассмотрим отображение (дискретную динамическую систему)

$$z_{m+1} = f(z_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad z \in H^4, \quad (9.4)$$

где  $f(z) = P_n(z)$  – полином степени  $n$ , коэффициенты которого, вообще говоря, являются кватернионами. В качестве примера такого отображения рассмотрим квадратичное отображение

$$z_{m+1} = z_m^2 + q, \quad z, q \in H^4, \quad (9.5)$$

где  $q = a + bi + cj + dk$  – вещественные параметры. Многое из того, о чем мы будем говорить, переносится на отображения

$$z_{m+1} = P_n(z_m), \quad \text{где } n > 2.$$

Исследование (9.5) сведем к анализу траекторий отображения

$$z_{m+1} = z_m^2 + q, \quad z, q \in H^3, \quad (9.6)$$

где  $H^3$  – подпространство пространства  $H^4$ , элементами которого являются всевозможные гиперкомплексные числа  $a+bi+cj$ ,  $a, b, c \in R^1$ . Разделяя в (9.5) действительную и мнимые части ( $f(z) = f_1 + f_2i + f_3j + f_4k$ ), приходим к вещественному отображению в  $R^4$ :

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m^2 - y_m^2 - p_m^2 - r_m^2 + a \\ y_{m+1} &= 2x_m y_m + b \\ p_{m+1} &= 2x_m p_m + c \\ r_{m+1} &= 2x_m r_m + d \end{aligned} \quad (9.7)$$

Если  $r_0 = 0$  и  $d = 0$ , то  $r_m = 0$ ,  $m=1,2,\dots$ . В этом случае отображение (9.7) сводится к 3-х мерному отображению (9.6):

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m^2 - y_m^2 - p_m^2 + a \\ y_{m+1} &= 2x_m y_m + b \\ p_{m+1} &= 2x_m p_m + c \end{aligned} \quad (9.8)$$

А именно, это отображение мы и рассмотрим в данном разделе. Будем называть его 3-х мерным отображением Жюлиа и обозначать через J3D. Если в (9.8) положить  $c=0$  и  $p_0 = 0$ , то это отображение в свою очередь сведется к рассмотренному в гл. 6–7 двумерному отображению Жюлиа J2D:

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m^2 - y_m^2 + a \\y_{m+1} &= 2x_m y_m + b\end{aligned}\quad (9.9)$$

Наконец, если  $b=0$  и  $y_0 = 0$ , то (9.9) приводит к одномерному (логистическому – logistic map) отображению J1D:

$$x_{m+1} = x_m^2 + a. \quad (9.10)$$

### 9.2.1. Свойства отображения J3D

Как мы заметили, справедливо

**Свойство 1.** Если  $c = 0$  и  $p_0 = 0$ , то J3D сводится к J2D.

Далее приведем другие свойства отображения J3D, снабжая их, по возможности, доказательством.

**Свойство 2.** Обратное отображение  $f^{(-1)}(z)$  имеет вид

$$\begin{aligned}x &= \pm \sqrt{\frac{\bar{x} - a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - b)^2 + (\bar{p} - c)^2}} \\y &= \frac{\bar{y} - b}{2} \\p &= \frac{\bar{p} - c}{2}\end{aligned}\quad (9.11)$$

**Свойство 3.** При  $b^2 + c^2 \neq 0$  отображение (9.8) имеет в ограниченной части пространства  $R^3$  две неподвижных точки  $O_1(x', y', p')$  и

$$O_2(x'', y'', p''), \text{ где } x' = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}, \quad y' = b\alpha, \quad p' = c\alpha \text{ и } x'' = \frac{\alpha + 1}{2\alpha},$$

$$y'' = -b\alpha, \quad p'' = -c\alpha, \quad \alpha = \sqrt{\frac{4a - 1 + \sqrt{1 - 8a + 16(a^2 + b^2 + c^2)}}{8(b^2 + c^2)}}$$

**Свойство 4.** При выполнении условий  $b^2 + c^2 \neq 0$ ,  $|x'| < 0.5$ ,

$\sqrt{x'^2 + y'^2 + p'^2} < 0.5$  неподвижная точка  $O_1$  устойчивая, а  $O_2$  всегда неустойчивая.

Доказательство этого свойства следует из того, что для точки  $O$  при указанных условиях мультипликаторы  $\mu_{1,2,3}$  лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости ( $\text{Re } \mu, \text{Im } \mu$ ), а для  $O_2$  имеется корень вне единичной окружности. Здесь  $\mu_{1,2,3}$  – корни характеристического уравнения

$$(2x^* - \mu)[(2x^* - \mu)^2 + 4(y^{*2} + p^{*2})] = 0,$$

где  $(x^*, y^*, p^*)$  – одна из неподвижных точек.

**Свойство 5.** При  $b = c = 0$  и  $a \in (-0.75, 0.25)$  существует единственная устойчивая неподвижная точка  $O_1\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, 0, 0\right)$  и единственная неустойчивая неподвижная точка  $O_2\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, 0, 0\right)$ . При  $a = 0.25$

эти неподвижные точки сливаются и при  $a > 0.25$  исчезают; от сложной точки  $(0.5, 0, 0)$  рождается инвариантное множество – цикл:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y^2 + p^2 = \frac{4a - 1}{4}. \text{ На интервале } a \in (-2, -0.75) \text{ имеется счет-$$

ное множество подынтервалов существования устойчивых периодических точек.

Доказательство существования счетного множества подынтервалов с устойчивыми периодическими точками следует из редукции J3D к логистическому отображению J1D (9.10).

Обозначим через J3D(f) замыкание множества отталкивающих (неустойчивых) точек отображения J3D:  $\bar{z} = f(z, q) = z^2 + q$ ,  $z, q \in H^3$ ,

т.е. если  $\omega \in J3D(f)$ , то  $J3D(f) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{(n)^{-1}}(\omega) \right)$ .

Иногда это множество мы будем обозначать через  $J3D(a, b, c)$ . Множество  $J3D(f)$  является 3-х мерным аналогом множества Жюлиа  $J2D(f)$ . Как мы заметили выше, это множество может не содержать неустойчивую неподвижную точку (из-за ее отсутствия).

**Свойство 6.** При  $|q|=0$  ( $a=b=c=0$ ) множество  $J3D(0,0,0)$  принадлежит сфере  $x^2 + y^2 + p^2 = 1$  и идуцированное на ней отображение является хаотическим.

Действительно,  $\bar{z} = z^2$  и сфера является отталкивающим множеством.

Так как в силу (8) имеем  $\frac{y_{m+1}}{p_{m+1}} = \frac{y_m}{p_m}$ , то множество  $J3D(0,0,0)$  рас-

слаивается на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, лежащие в плоскости, проходящей через ось  $x$  и прямую  $y = -\frac{y_0}{p_0} p$ . Отображение на окружности  $F(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , как

известно [18], хаотично. Этот факт указывает на возможность хаотичности отображения J3D на множестве  $J3D(a, b, c)$  при  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ .

**Свойство 7.** Множество  $J3D(a, 0, 0)$  симметрично относительно осей  $y, p$  и при малых  $a$  лежит на поверхности вращения относительно оси  $x$ .

**Свойство 8.** Если  $|q| > 2$  и  $|z| \geq q$ , то любая траектория отображения J3D стремится к бесконечности.

*Доказательство* повторяет соответствующее доказательство для  $J2D$  [2,18]. Пусть  $|q| = 2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  малое число. Тогда

$$|f(z, q)| = |z^2 + q| \geq |z^2| - |q| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \geq |z|(|q| - 1) \geq |z|(1 + \varepsilon).$$

Далее получаем

$$|f^{(2)}(z, q)| \geq |f(z, q)|(1 + \varepsilon) \geq |z|(1 + \varepsilon)^2, \dots$$

$$|f^{(n)}(z, q)| \geq |z|(1 + \varepsilon)^n. \text{ Следовательно, } f^{(n)}(z, q) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

**Свойство 9.** Множество  $J3D(f)$  лежит в ограниченной области пространства  $R^3$  и является границей области притяжения бесконечности и устойчивых точек.

*Доказательство.* Первая часть свойства 9 следует из устойчивости бесконечности, а вторая – из определения  $J3D(f)$ .

По аналогии с  $J2D(f)$  последнее свойство множества  $J3D(f)$  можно принять за его определение.

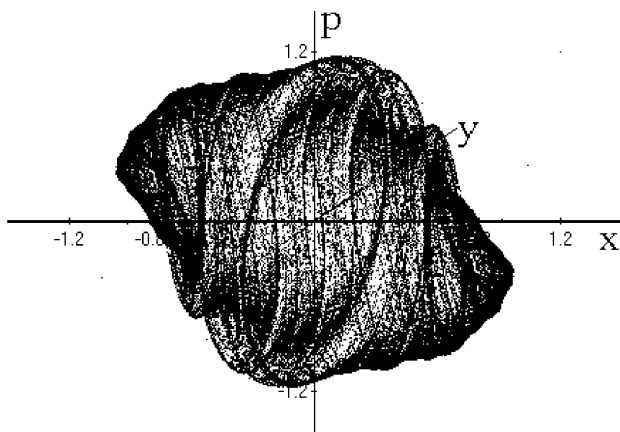
**Свойство 10.** Для обратного отображения  $f^{-1}$  множество  $J3D(f)$  - аттрактор.

Это свойство, а также свойство 2 будем использовать при компьютерном построении множества  $J3D(f)$ .

**Свойство 11.** Множество  $J3D(f)$  инвариантно относительно  $f$  и  $f^{-1}$ .

**Свойство 12.** Если итерации точки  $(x_0 = a, y_0 = b, p_0 = c)$  не уходят на бесконечность, то множество  $J3D(a, b, c)$  связно; в противном случае это множество может содержать как связную, так и несвязную компоненты. При  $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 2$  множество  $J3D(a, b, c)$  вполне несвязно.



Рис. 9.1. Множество  $J3D(0.1,0.5,0.2)$

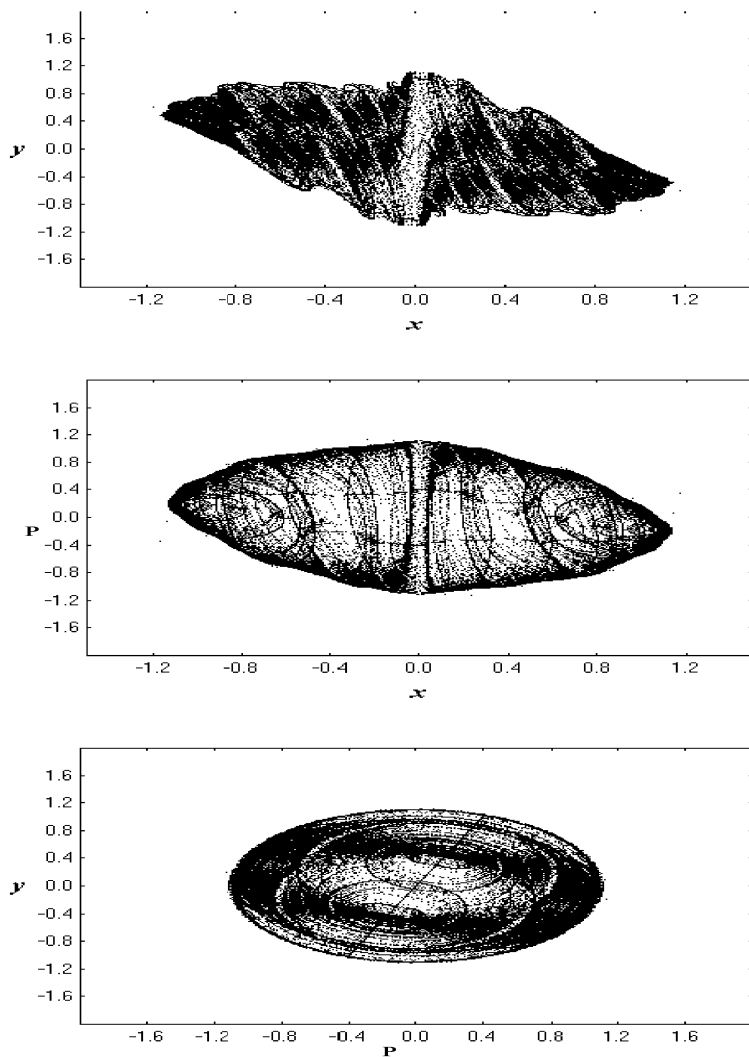


Рис. 9.2. Проекция множества  $J3D(0.1, 0.5, 0.2)$  на координатные плоскости.

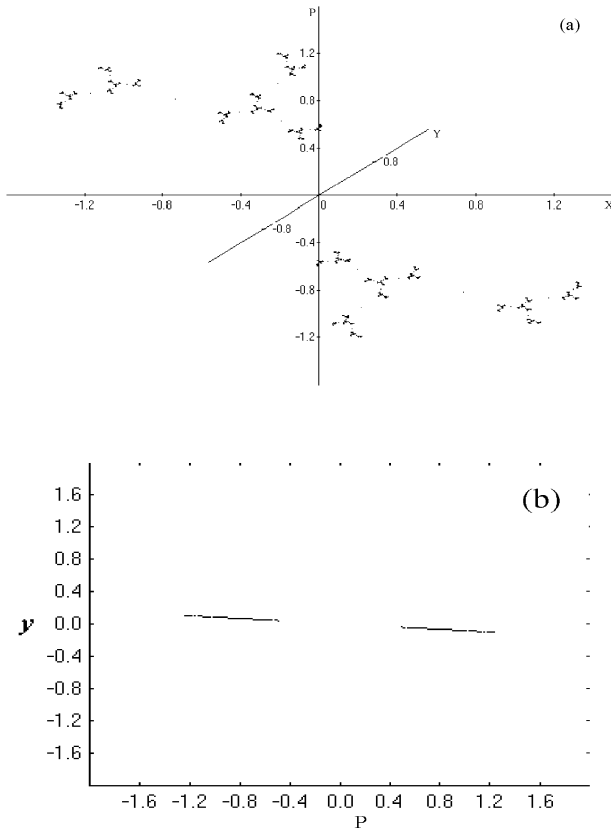


Рис. 9.3. Часть множества  $J3D(0.2,-0.1,1.2)$  и его проекция на плоскость  $(y,p)$ .

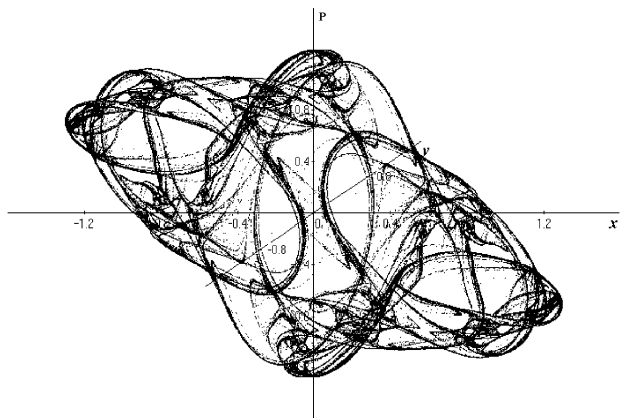


Рис. 9.4. Множество  $J3D(0.2, -0.1, 1.2)$ .

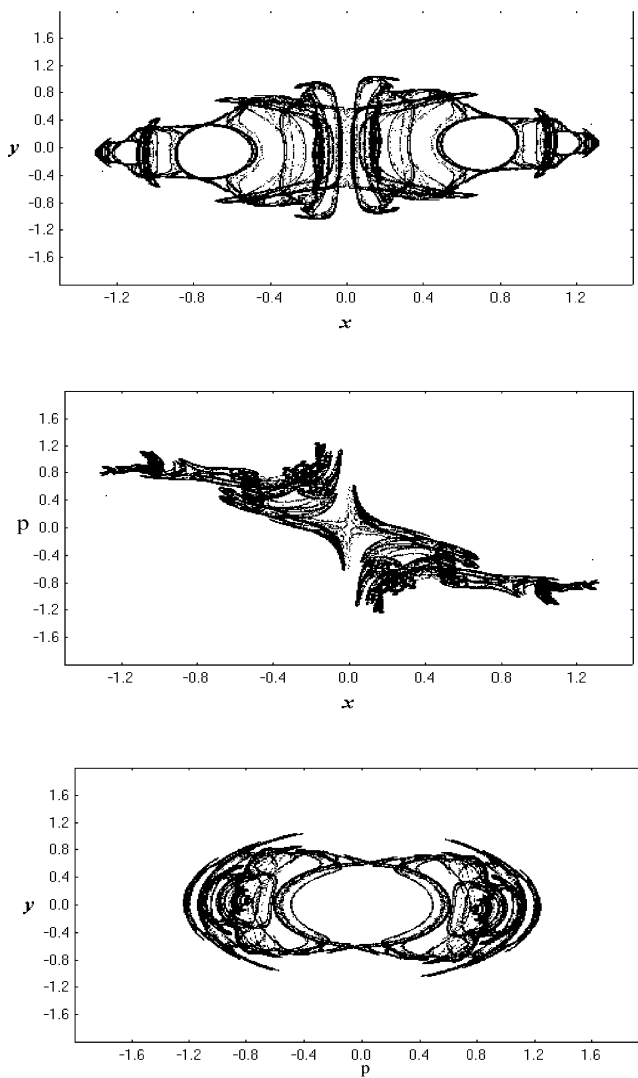


Рис. 9.5. Проекция множества  $J3D(0.2, -0.1, 1.2)$ .

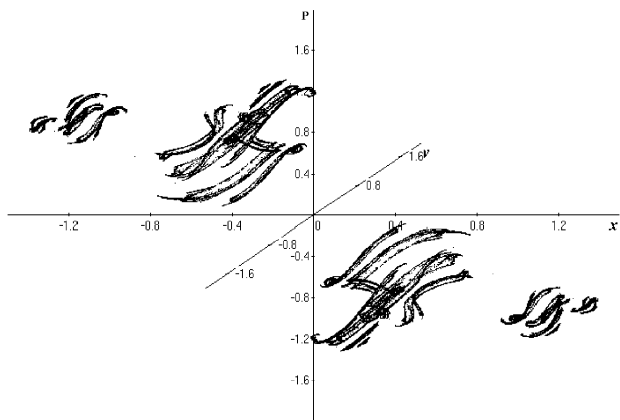


Рис. 9.6. Множество  $J3D(0.2, -0.1, 1.4)$ .

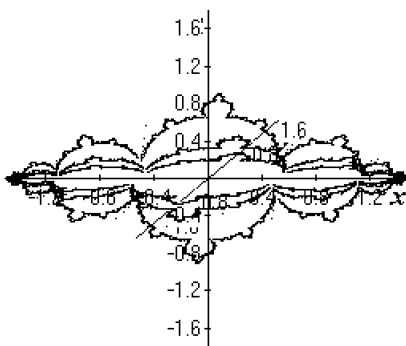


Рис. 9.7. Часть множества  $J3D(-0.75, 0, 0)$ .

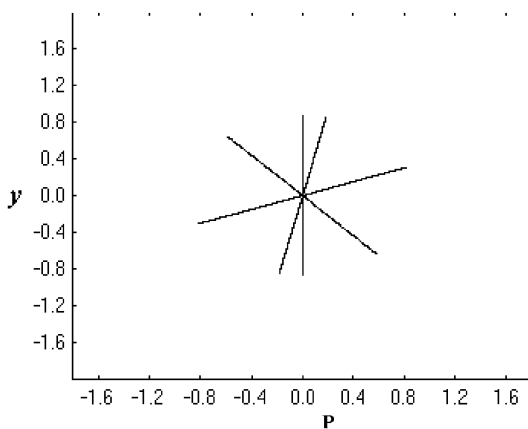


Рис. 9.8. Проекция части множества  $J3D(-0.75,0,0)$ , представленного на рис. 9.7, на плоскость  $(y,p)$ .

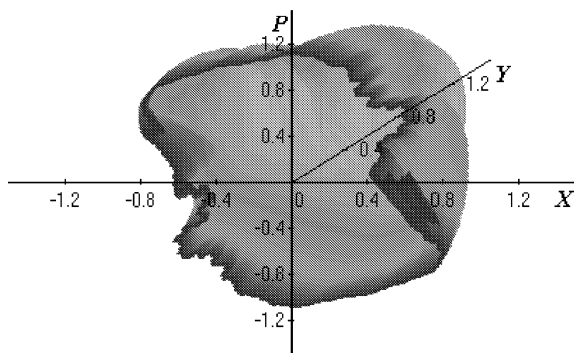


Рис. 9.9. Часть фрактальной поверхности для  $y \geq 0$  и  $a = 0.1$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 0.2$ .

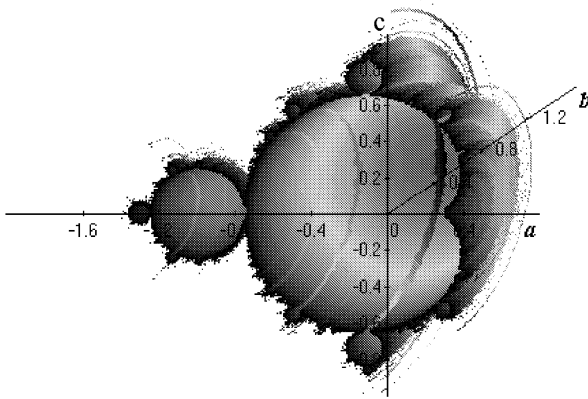


Рис. 9. 10.

Множество  $J3D(a, b, c)$  строилось также и другим методом, обобщающим на трехмерное пространство известный метод построения фракталов Жюлиа  $J2D(a, b)$ . Соответствующий результат приведен на рис. 9.9, где показана половина «фрактальной поверхности». Эта «поверхность» имеет сложную форму. В каждом сечении, перпендикулярном удаленной оси  $Y$ , имеем фрактальную кривую. При этом форма кривой существенно изменяется при смещении вдоль оси  $Y$ . При реализации этого алгоритма построения множества  $J3D(a, b, c)$  можно параллельно вычислять фрактальную размерность  $d_{J3d} = \lim \frac{\ln N(\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}$ . Здесь  $N(\varepsilon)$  – минимальное число кубов со стороной  $\varepsilon$ , покрывающих  $J3D(f)$ . Однако этот метод связан с пикселями и дает лишь грубое приближение  $d_{J3D}$ . Теоретически более точный результат можно получить, используя (9.11), т.е. используя вещественные координаты точек аттрактора-фрактала. Однако в этом случае очень большое время вычисления  $d_{J3D}$ .

На рис. 9.10 приведен трехмерный аналог множества Мандельброта.



### 9.3. Группы симметрий и мозаики в 3-х мерном гиперпространстве

В этой части мы построим динамические системы, орбиты которых содержат симметрию группы Пикарда  $\Gamma$  и обсудим автоматическое построение соответствующих цветных мозаик, следуя [23].

Пусть  $\Gamma$  – группа дробно-линейных преобразований в  $H^3$ , определяемых как

$$w = \gamma z = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{9.12}$$

где  $w, z \in H$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $a, b, c, d \in Z + Zi = Z^2$  и  $ad - bc = 1$  (здесь через  $Z$  обозначено пространство целых чисел). В (9.12)  $a, b, c, d$  – комплексные числа, у которых как действительные, так и мнимые части – целые числа.  $\Gamma$  называется группой Пикарда. Она содержит хорошо известную модулярную группу  $\Gamma_1$  как собственную подгруппу.

Мы ограничим наше обсуждение отображением

$$z_{k+1} = F(z_k), \quad z_k \in H^3, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{9.13}$$

где  $H^3 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = (x, y, p), p > 0\}$  или в терминах кватернионов  $H^3 = \{z \in \mathbb{H}^4 : z = x + yi + pj, p > 0\}$ . Орбита отображения  $F$  определяется как счетная последовательность точек  $z_0, z_1, z_2, \dots$ . Необходимые и достаточные условия того, чтобы орбита отображения  $F$  обладала симметрией группы  $\Gamma$ , заключаются в том, что  $F$  коммутирует с  $\Gamma$  (или  $\Gamma$ -эквивариантно), то есть

$$F \circ \gamma = \gamma \circ F \tag{9.13}$$

для всех  $\gamma \in \Gamma$ . Поэтому достаточно только проверить, удовлетворяют ли образующие группы  $\Gamma$  условию (9.13). В общем,  $F(z)$  может не лежать в  $H$ .

### 9.3.1. Конструирование $\Gamma$ -эквиариантных функций.

Для создания мозаик (паттернов) с симметрией группы  $\Gamma$  мы выберем  $F$  из условия (9.13), следуя [23]:

$$F(z) = z + f(x, y), \quad z = x + yi + \sqrt{1 - x^2 - y^2}j, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2},$$

где  $f(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)i + f_3(x, y)j$ ,

$$f_1(x, y) = g_1(x)h_1(x, y), \quad f_2(x, y) = g_2(x)h_2(x, y),$$

$g_n(0) = g_n(1/2) = 0$ ,  $h_n$  ( $n = 1, 2$ ) – произвольные функции.

$$F(z) = z + g_1(x)h_1 + g_2(x)h_2i + \\ (\sqrt{1 - (x + g_1(x)h_1)^2 - (y + g_2(y)h_2)^2} - g_1(x)g_2(y)h_3 - \sqrt{1 - x^2 - y^2})j$$

В [23] доказано, что если выбрать  $F(z)$  в виде:

$$F(z) = \begin{cases} F(\text{Pr}(z)) + M(z), & z \in U_1 \\ \gamma^{-1}F(\gamma z), & z \notin U_1, \gamma z \in U \end{cases},$$

где  $\text{Pr}(z) = x + yi + \sqrt{1 - x^2 - y^2}j$ ,  $M(z) = I(|z|)[m(z) + \eta m(\gamma z)]$ ,

$I(z) = 1 - \frac{1}{|z|^2}$ , то  $F(z)$  будет эквиариантным отображением в  $H^3$ . Здесь

$m(z)$  – произвольная периодическая по  $x$  и  $y$  функция с периодом 1.

В качестве примера определим отображение  $F(z)$ , выбрав функции

$$g_n(x) = 0.2 \sin(2\pi x) \quad h_n(x, y) = 0.2 \sin(2\pi(x + y)), \quad n=1, 2$$

$$h_3(x, y) = 0.5 \sin(2\pi(x + y)) = 0.2 \cos(2\pi y),$$

$$m(z) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + \sin(2\pi x)i + \sin(2\pi y)j.$$

### 9.3.2. Определение цвета

Введем гиперболическое расстояние между точками орбиты  $\{z_k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $z_k \in H^3$ . Пусть  $z = x + yj + pj$  и  $z' = x' + y'i + p'j$ .

В качестве расстояния между этими точками примем величину

$$\rho(z, z') = \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + p^2 + p'^2}{2pp'}.$$

Для орбиты определим значение

$$\rho^k = \rho(F^{(k-1)}(z_0), F^{(k)}(z_0)).$$

Для заданных  $k \in Z^+$  и  $c \in R^+$  вычислим  $\rho_c^k = [c\rho^k(z_0)]$ . Это значение используется для определения цвета точки  $z_0$ .

Используя определенное выше отображение  $F(z)$  и полагая  $k = 7$  и  $c = 100$  в [23] были получены мозаики, представленные на рис. 9.12–9.15<sup>1</sup>.

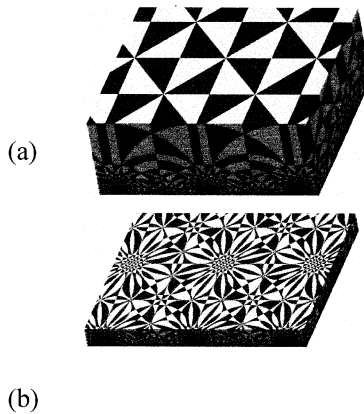


Рис. 9.12. Область  $|x| \leq 0.92$ ,  $|y| \leq 1$ , (a)  $0 < r < 1$ ; (b)  $0 < r \leq 0.25$

<sup>1</sup> Эти рисунки были построены К.Н. Крамковым с помощью программы, представленной в [23].

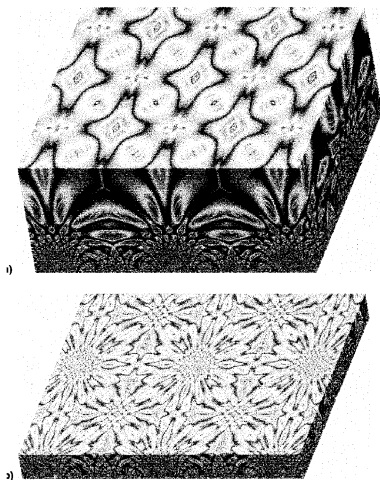


Рис. 9.13. Область  
 $|x| \leq 0.92, |y| \leq 1.2, (a) 0 < r < 1; (b) 0 < r \leq 0.25$ .

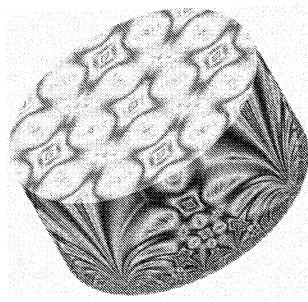
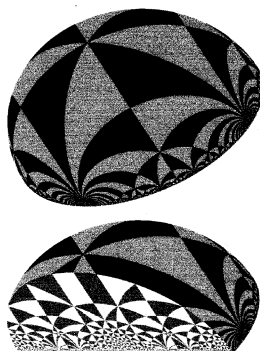


Рис.9.14. Область  
 $x^2 + y^2 \leq 1, 0 < r \leq 0.95$

Рис. 9.15. Область  $x^2 + y^2 + r^2 \leq 1, r > 0;$   
 (b)  $x \geq -0.2$



## Приложение

### Глава 10. Краткие сведения из теории множеств

Следуя, например, [5], рассмотрим некоторое множество (совокупность) элементов какой-либо природы. Обозначим его через  $A$ , а его элементы через  $a$ :  $A = \{a\}$ .

Запись  $a \in A$  означает, что  $a$  является элементом множества  $A$ ,  $a \notin A$  означает, что  $a$  не является элементом множества  $A$ .

**Определение 10.1:** Пусть  $A, B$  – два множества. Если каждый элемент  $B$  входит также в  $A$ , то говорят, что  $B$  – подмножество  $A$  и обозначают:  $B \in A$ .

Например,  $A = \mathbb{N}$  (множество натуральных чисел),  $B = \{2n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Определение 10.2:** Равными называют одинаковые множества:  $A = B$  (все элементы  $A$  совпадают с элементами  $B$ ).

**Пример множества:** множество вещественных корней алгебраического уравнения. Однако такие уравнения могут не иметь вещественных корней, поэтому вводят понятие пустого множества:  $A = \emptyset$ . Пустое множество является подмножеством любого множества.

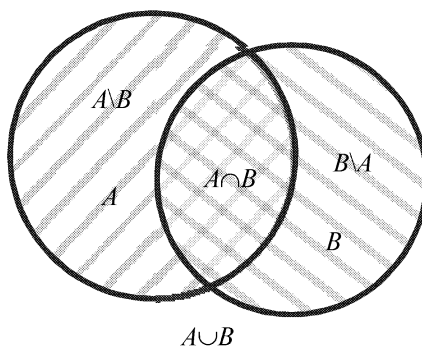


Рис. 10.1

**Определение 10.3:** Суммой двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B$ , которое состоит из всех элементов, входящих, по крайней мере, в одно из множеств  $A$  или  $B$ .

Определение обобщается для произвольного числа множеств:  

$$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}.$$

**Определение 10.4:** Разностью (дополнением к множеству  $B$ )  $A \setminus B$  называется подмножество множества  $A$ , не входящее в  $B$ .

**Определение 10.5:** Пересечением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество (обозначаемое  $A \cap B$ ), состоящее из всех элементов, которые входят и в  $A$ , и в  $B$ .

Очевидно:  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ .

Если  $B \in A$ , то  $(A \setminus B) \cup B = A$ .

Дистрибутивность:  $\left( \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} \cap B)$ .

### 10.0.1. Мощность множества

Конечные множества можно легко сравнить между собой, например, с помощью подсчета. Пример: сравнить число студентов, пришедших в аудиторию, с числом стульев.

**Определение 10.6:** Пусть даны два множества  $A$  и  $B$ . Говорят, что между их элементами установлено взаимно однозначное соответствие, если указано правило, по которому каждому элементу  $a \in A$  соответствует один элемент  $b \in B$ , называемый образом элемента « $a$ », причем выполнены следующие два условия:

- a) любые два элемента из  $A$  имеют различные образы;
- b) любой элемент из  $B$  является образом некоторого элемента из  $A$ .

**Определение 10.7:** Два множества  $A$  и  $B$  называются эквивалентными или имеющими одинаковую мощность (обозначается  $A \sim B$ ), если между их элементами может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одного числа элементов.

### 10.0.2. Примеры эквивалентных множеств

1. Множество  $N$  всех натуральных чисел и множество  $N_1$  всех целых отрицательных чисел ( $n \rightarrow -n$ ).
2. Множество  $N$  и множество  $P$  всех положительных четных целых чисел:  $\forall n \in N \rightarrow 2n \in P \rightarrow N \sim P, P \in N, P \neq N$ .
3. Множество  $E$  всех вещественных чисел и множество  $I$  всех вещественных чисел из интервала  $(-\pi/2, \pi/2)$  ( $y = \operatorname{tg} x, x \in I, y \in E$ ).
4. Пусть  $\triangle KLM$  – треугольник произвольной формы, а  $A$  и  $B$  – множества всех точек на сторонах  $KL$  и  $KM$  соответственно.

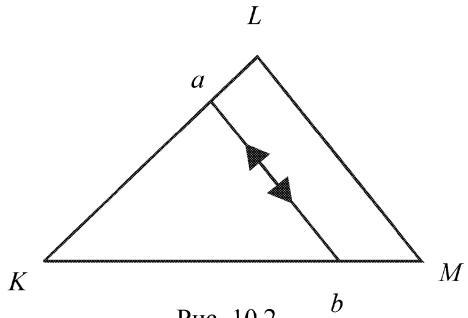


Рис. 10.2

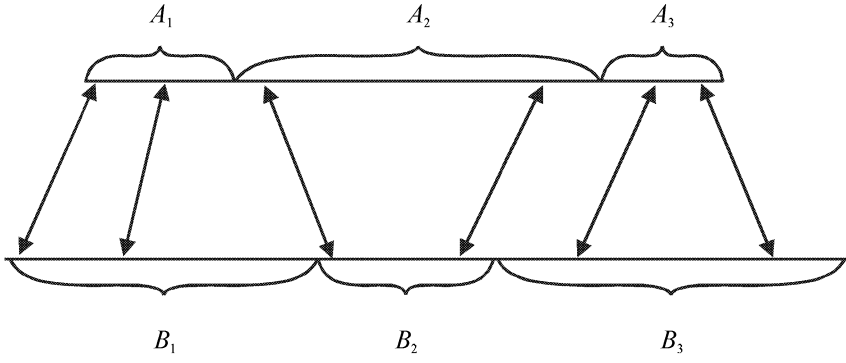


Рис. 10.3

Справедливы свойства:

1. Если  $A \sim B, B \sim C$ , то  $A \sim C$ .

2. Если множество  $A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ , причем слагаемые  $A_{\alpha}$  попарно не имеют общих элементов, а множество  $B = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$  и слагаемые  $B_{\alpha}$  также попарно не имеют общих элементов, и если  $A_{\alpha} \sim B_{\alpha}$  при каждом  $\alpha$ , то  $A \sim B$ .

## 10.1. Счетные множества

**Определение 10.8:** Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел.

То есть, если  $A \sim \mathbb{N}$ , то  $A$  – счетно. Согласно [5], справедливы следующие теоремы:

**Теорема 10.1:** Сумма счетного множества счетных множеств – тоже счетное множество.

**Теорема 10.2:** Множество всех рациональных чисел счетно.

**Теорема 10.3:** Множество  $P$  всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами счетно.

## 10.2. Множества мощности континуума

**Теорема 10.4:** Множество всех вещественных чисел, содержащихся в отрезке  $[0,1]$ , несчетно.

**Определение 10.9:** Говорят, что множество  $A$  имеет мощность континуума (обозначение: «с»), если оно эквивалентно множеству всех чисел из отрезка  $[0;1]$ .

**Замечание 10.1:** Любой промежуток  $[a, b]$  имеет мощность «с» ( $y = a + (b - a)x : [0, 1] \leftrightarrow [a, b]$ ).

**Следствие 10.1:** Множество всех вещественных чисел имеет мощность «с».

**Теорема 10.5:** Множество всех иррациональных чисел имеет мощность «с».



Можно рассмотреть вопрос о сравнении мощностей (подробности см., например, в [5]).

**Континуум гипотеза 10.1:** *Не существует множества промежуточной мощности между мощностью счетного множества и мощностью «с», но существует множество мощности большей «с».*

### 10.3. Кольца и алгебры множеств

**Определение 10.10:** Пусть  $M$  – произвольное множество. Непустая совокупность  $U$  некоторых его подмножеств называется кольцом, если для любых  $A, B \in U$ :

$$A \cup B \in U,$$

$$A \setminus B \in U.$$

**Определение 10.11:** Непустая совокупность  $U$  подмножеств множества  $M$  называется алгеброй, если она удовлетворяет следующим условиям:

если  $A, B \in U$ , то  $A \cup B \in U$ ;

если  $A \in U$ , то и его дополнение  $C = M \setminus A \in U$

**Теорема 10.6:** Для того чтобы совокупность  $U$  подмножеств множества  $M$  была алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была кольцом и чтобы  $M \in U$ .

**Определение 10.12:** Непустая совокупность  $U$  подмножеств множества  $M$  называется  $\sigma$ -кольцом, если она – кольцо, замкнутое по отношению к операции сложения не только конечного, но и счетного семейства множеств, т. е.:

1. из условия  $A_i \in U$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) следует, что  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$ ;

2. из условия  $A, B \in U$  следует, что  $A \setminus B \in U$ .

**Определение 10.13:** *Непустая совокупность  $U$  подмножеств множества  $M$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если она удовлетворяет условию 1 из определения  $\sigma$  – кольца и условию 2 из определения алгебры.*

**Утверждение 10.1:** *Для того, чтобы совокупность  $U$  была  $\sigma$ -алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была  $\sigma$ -кольцом и чтобы  $M \in U$ .*

## 10.4. Точечные множества в евклидовом пространстве

Рассмотрим  $n$ -мерное пространство, образованное множеством всех точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Расстояние между точками  $x$  и  $y$  введем по формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (10.1)$$

Существуют и другие способы введения расстояния,  $\rho(x, y) = \sup |x_i - y_i|$ .

**Определение 10.14:**  *$n$ -мерное точечное пространство, в котором расстояние между точками определено по формуле (10.1), называется  $n$ -мерным евклидовым пространством и обозначается  $R^n$ .*

**Утверждение 10.2:** *Для любых  $x, y, z \in R^n$  справедливо неравенство треугольника:*

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad (10.2)$$

## 10.5. Предельные точки

**Определение 10.15:** *Точка  $x \in R^n$  называется пределом последовательности точек  $x^{(m)} \in R^n$  ( $x^{(m)} \rightarrow x$  или  $x = \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}$ ), если  $\rho(x^{(m)}, x) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .*

Из формулы  $\rho(x^{(m)}, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - x_i)^2}$  ясно, что соотношение  $x^{(m)} \rightarrow x$  равносильно одновременному выполнению соотношения  $x_i^{(m)} \rightarrow x_i$  при всех  $i = 1, 2, \dots$

Т. е. сходимость последовательности точек из  $R^n$  означает сходимость по координатам.

**Определение 10.16:** Открытым шаром  $S(x^{(0)}, \varepsilon)$  с центром в точке  $x^{(0)} \in R^n$  и радиусом  $\varepsilon > 0$  называется совокупность всех точек  $x \in R^n$ , для которых  $\rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon$ . Всякий открытый шар с центром  $x^{(0)}$  называется окрестностью точки  $x^{(0)}$  (или  $\varepsilon$ -окрестностью).

Пусть  $A \in R^n$  (произвольное множество из  $R^n$ ).

**Определение 10.17:** Точка  $x \in R^n$  называется предельной точкой или точкой сгущения множества  $A$ , если существует такая последовательность точек  $x^{(m)} \in A$ , ( $x^{(m)} \neq x$ ), что  $x^{(m)} \rightarrow x$ .

**Определение 10.18:** Если  $x \in A$  ( $A \in R^n$ ) и не является его предельной точкой, то  $x$  называется изолированной точкой множества  $A$ .

**Теорема 10.7:** Для того чтобы точка  $x \in R^n$  была предельной точкой множества  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность точки  $x$  содержала, по крайней мере, одну точку  $u \in A$ , отличную от  $x$ .

**Определение 10.19:** Множество  $A \in R^n$  называется ограниченным, если координаты всех точек  $x \in A$  ограничены в совокупности. (Это равносильно требованию, чтобы  $A$  содержалось в некотором шаре.)

**Теорема 10.8:** Всякое бесконечное ограниченное множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку (которая может и не принадлежать  $A$ ).

## 10.6. Замкнутые и открытые множества

**Определение 10.20:** Множество  $F \in R^n$  называется замкнутым, если, какова бы ни была сходящаяся к пределу последовательность точек  $x^{(m)} \in F$ , ее предел входит в  $F$ .

Замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

**Определение 10.21:** Пусть  $A$  – произвольное множество точек из  $R^n$ . Точка  $x \in A$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если при некотором  $\varepsilon > 0$  окрестность  $S(x, \varepsilon) \in A$ .

**Определение 10.22:** Множество  $G \in \mathbb{R}^n$  называется открытым, если все его точки внутренние.

Все пространство  $\mathbb{R}^n$  – открытое множество; пустое множество  $\emptyset$  также причисляется к открытым.

**Теорема 10.9:** Для того, чтобы множество  $G \in \mathbb{R}^n$  было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение  $F = \mathbb{R}^n \setminus G$  было замкнутым.

**Определение 10.23:** Пусть  $A \in \mathbb{R}^n$ . Совокупность  $B$  открытых множеств  $G_\alpha \in \mathbb{R}^n$  называется покрытием множества  $A$ , если любая точка  $x \in A$  входит, по крайней мере, в одно из  $G_\alpha \in B$ .

**Теорема 10.10 (Бореля–Лебега):** Из всякого покрытия  $B$  ограниченного замкнутого множества  $F \in \mathbb{R}^n$  можно выделить конечное покрытие, т.е. конечное число множеств  $G_\alpha \in B$ , также образующих покрытие множества  $F$ .

**Определение 10.24:** Множество  $A \in \mathbb{R}^n$  называется борелевым, если оно принадлежит  $\sigma$ -алгебре, порожденной совокупностью всех замкнутых множеств из  $\mathbb{R}^n$ .

Совокупность всех борелевых множеств из  $\mathbb{R}^n$  обозначим через  $B$ . Тогда любое замкнутое множество  $F \in B$  по определению; каждое открытое множество  $G \in B$ .

## Глава 11. Что такое линия?

Здесь мы дадим ответ на этот вопрос, следуя [6].

### 11.1. Первые определения линии. Жордановы кривые. Кривая Пеано

**Определение 11.1:** *Линия – это множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$F(x, y) = 0. \quad (11.1)$$

Здесь обычно предполагают непрерывность функции  $F(x, y)$  в соответствующей области изменения аргументов.

Это – неудачное определение, ибо ему удовлетворяет всякое замкнутое подмножество плоскости.

**Определение 11.2 (параметризация):** *Линия – это множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (11.2)$$

где  $\varphi, \psi$  – непрерывные и дифференцируемые на отрезке  $a \leq t \leq b$  функции.

Это не топологическое определение.

Одну из попыток топологического определения линии предпринял Жорданов в 1882 г.

**Определение 11.3:** *Линия – это непрерывный образ отрезка.*

В случае плоскости это определение совпадает с (11.2), но при этом  $\varphi, \psi$  – произвольные непрерывные функции. Это определение переносится на любое топологическое пространство.

**Определение 11.4 (топологического пространства):** Пусть во множестве  $X$  произвольной природы указана совокупность  $\tau = \{U_j\}$  подмножеств, обладающая следующими свойствами:

- 1)  $\emptyset, X \subset \tau$ ;
- 2) объединение любой совокупности множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
- 3) пересечение любого конечного числа множеств из  $\tau$  принадлежит  $\tau$ .

Совокупность подмножеств  $\tau$  называется топологией в  $X$ , а множество  $X$  в этом случае называется топологическим пространством.

Пример:  $X$  – числовая прямая  $R^1$ .

Топология задается следующим набором множеств:  $\emptyset$ , всевозможные интервалы и их объединения  $U = \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha})$ .

**Определение 11.5:** Множество точек топологического пространства, являющееся непрерывным образом отрезка, называется жордановой кривой.

Удар по этому определению был нанесен в 1890 г. итальянским математиком Пеано, который построил непрерывное отображение отрезка на квадрат – так называемую кривую Пеано.

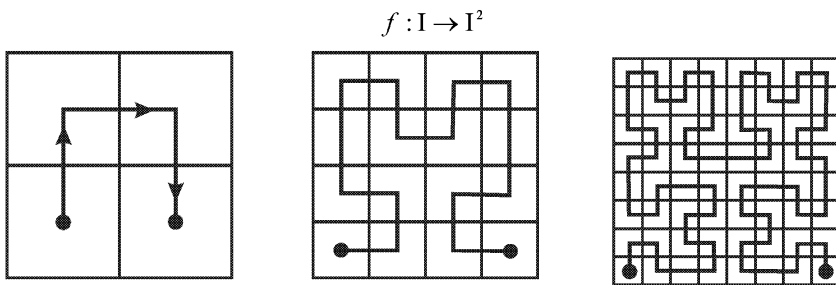


Рис. 11.1. Последовательные приближения кривой Пеано

В настоящее время жордановы кривые, то есть непрерывные образы отрезка, называются *пеановскими континуумами*.

Из существования кривой Пеано вытекает возможность отобразить отрезок на куб конечного числа измерений.

**Теорема 11.1 (Хана-Мазуркевича):** *Пеановские континуумы – это в точности локально связные континуумы.*

### 11.2. Канторовы кривые. Ковер Серпинского

Жорданово определение линии оказалось неудачным не только потому, что под него попадали объекты совсем непохожие на линии, но и потому что существуют континуумы, которые естественно рассматривать как линии, но которые, будучи локально связными, не являются непрерывным образом отрезка. Таков, например, континуум, определяемый графиком функции  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,  $0 < x \leq 1$ , с предельным отрезком  $x = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ .

Общее определение линии на плоскости было дано Кантором в 70-е годы XIX века.

**Определение 11.6:** *Плоский континуум, не содержащий внутренних точек, то есть континуум, в любой окрестности каждой точки которого имеются не принадлежащие ему точки плоскости, называется канторовой кривой.*

Важным примером канторовой кривой является ковер Серпинского. На  $n$ -м шаге получаем  $8^n$  квадратов со стороной  $(1/3)^n$ . Пересечение полученных таким образом множеств называется ковром Серпинского  $S$ .

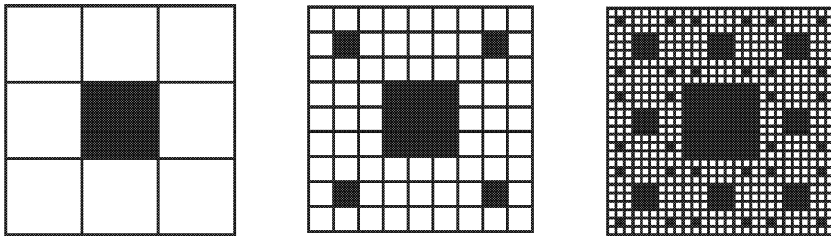


Рис. 11.2. Последовательные приближения ковра Серпинского

Ковер Серпинского является локально связным континуумом и, следовательно, по теореме Хана-Мазуркевича, может быть представлен в виде непрерывного образа отрезка. Он является универсальным для канторовых кривых, то есть, какова бы ни была канторова кривая  $L$ , она может быть топологически вложена в ковер Серпинского  $S$ , то есть в  $S$  содержится континуум  $L'$ , гомеоморфный  $L$ .

Стандартный ковер Серпинского  $S$  получен из единичного квадрата плоскости выбрасыванием открытого множества полной меры, то есть мера  $S$  равна нулю (мера множества, остающегося после  $n$  шагов равна  $(8/9)^n$ ).

### 11.3. Урысоновское определение линии

В 1921 г. П. С. Урысон дал наиболее общее топологически инвариантное определение линии.

**Определение 11.7:** *Линией называется одномерный континуум, то есть связное компактное метризуемое пространство, каждая точка которого обладает сколь угодно малой окрестностью с нульмерной границей.*

Ковер Серпинского удовлетворяет урысоновскому определению линии.



## Глава 12. Хаусдорфова мера и размерность

Следуя [2], дадим краткую информацию по хаусдорфовой мере и размерности и далее, следуя [4], по другим размерностям, в частности, по фрактальной размерности.

Среди широкого разнообразия «фрактальных размерностей», которые используются в настоящее время, определение Хаусдорфа, основанное на конструкции Каратеодори, является самым старым и, возможно, наиболее важным. Преимущество размерности Хаусдорфа в том, что она определена для любого множества и математически удобна, так как она основана на мерах, которыми относительно легко манипулировать. Главный недостаток в том, что во многих случаях она тяжела в вычислении или оценке численными методами. Однако для понимания математики фракталов близость хаусдорфовой меры и размерности существенна.

### 12.1. Хаусдорфова мера

Вспомним, что если  $U$  – любое непустое подмножество  $n$ -мерного евклидова пространства  $R^n$ , то диаметр  $U$  определяется как  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ , т.е. наибольшее расстояние между любой парой точек в  $U$ . Если  $\{U_i\}$  счетный (или конечный) набор открытых множеств диаметра, не большего  $\delta$ , который покрывает  $F$ , т.е.  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$  с  $0 < |U_i| \leq \delta$  для каждого  $i$ , мы говорим, что  $\{U_i\}$  является  $\delta$ -покрытием  $F$ .

Предположим, что  $F$  – подмножество  $R^n$  и  $s$  – неотрицательное число. Для любого  $\delta > 0$  мы определяем

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ — } \delta\text{-покрытие } F \right\}. \quad (12.1)$$

Таким образом, мы смотрим все покрытия  $F$  множествами наибольшего диаметра  $\delta$  и отыскиваем минимальную сумму  $s$ -х степеней диаметров. Когда  $\delta$  уменьшается, класс допустимых покрытий  $F$  в (12.1) уменьшается. Поэтому  $\inf H_\delta^s(F)$  возрастает и таким образом достигает предела, когда  $\delta \rightarrow 0$ . Запишем

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F). \quad (12.2)$$

Этот предел существует для любого подмножества  $F$  из  $R^n$ , хотя предельное значение может быть (и обычно есть) 0 или  $\infty$ . Назовем  $H^s(F)$   $s$ -мерной хаусдорфовой мерой  $F$ .

Можно доказать, хотя и с определенными трудностями, что  $H^s$  действительно является мерой. В частности,  $H^s(0) = 0$ . Если  $E$  содержится в  $F$ , тогда  $H^s(E) \leq H^s(F)$ , а если  $\{F_i\}$  – любой счетный набор непересекающихся борелевых множеств, тогда

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i). \quad (12.3)$$

Хаусдорфовы меры обобщают близкие идеи длины, площади, объема и т.д. Можно показать, что для подмножеств  $R^n$ ,  $n$ -мерная хаусдорфова мера является, с точностью до постоянной составляющей, просто  $n$ -мерной мерой Лебега, т.е. обычным  $n$ -мерным объемом. Более точно, если  $F$  является борелевым подмножеством  $R^n$ , тогда

$$H^n(F) = c_n \text{vol}^n(F), \quad (12.4)$$

где постоянная  $c_n$  является объемом  $n$ -мерного шара диаметра 1. Индекс  $n$  означает  $n$ -мерный объем:  $\text{vol}^n$ . Аналогично, для «хороших» маломерных подмножеств из  $R^n$  мы имеем, что  $H^0(F)$  – число точек в  $F$ ;  $H^1(F)$  дает длину гладкой кривой  $F$ ;  $H^2(F) = (4/\pi) \times \text{area}(F)$ , если  $F$  – гладкая поверхность;  $H^3(F) = (6/\pi) \times \text{vol}(F)$ ; и  $H^m(F) = c_m \times \text{vol}^m(F)$ , если  $F$  –

гладкое  $m$ -мерное подмногообразие  $R^n$  (то есть  $m$ -мерная поверхность в классическом смысле).

Масштабные свойства длины, площади и объема хорошо известны. При растяжении в  $\lambda$  раз длина кривой умножается на  $\lambda$ , площадь плоской области умножается на  $\lambda^2$ , а объем 3-мерного объекта умножается на  $\lambda^3$ . Как можно было бы предвидеть,  $s$ -мерная хаусдорфова мера изменяет масштаб с коэффициентом  $\lambda^s$ . Такие масштабные свойства являются фундаментальными для теории фракталов.

**Масштабное свойство:** Если  $F \subset R^n$  и  $\lambda > 0$ , тогда

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F), \quad (12.5)$$

где  $\lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$ , т.е. множество  $F$  масштабируется с коэффициентом  $\lambda$ .

**Доказательство.** Если  $\{U_i\}$  является  $\delta$ -покрытием  $F$ , тогда  $\{\lambda U_i\}$  является  $\lambda\delta$ -покрытием  $\lambda F$ . Следовательно,  $H_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s \leq \lambda^s H_\delta^s(F)$ , так как это справедливо для любого  $\delta$ -покрытия  $\{U_i\}$ . Переход  $\delta \rightarrow 0$  дает  $H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$ . Замена  $\lambda$  на 1 и  $F$  на  $\lambda F$  дает неравенство, противоположное требуемому.

Подобный факт дает следующую основную оценку на хаусдорфовы меры множеств при действии более общих преобразований.

**Утверждение 12.1.** Пусть  $F \subset R^n$  и отображение  $f : F \rightarrow R^m$  такое, что

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F) \quad (12.6)$$

для постоянных  $c > 0$  и  $\alpha > 0$ . Тогда для каждого  $s$

$$H^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H^s(F). \quad (12.7)$$

**Доказательство.** Если  $\{U_i\}$   $\delta$ -покрытие  $F$ , тогда, так как  $|f(F \cap U_i)| \leq c|U_i|^\alpha$ , то  $\{f(F \cap U_i)\}$  является  $\varepsilon$ -покрытием  $f(F)$ , где  $\varepsilon = c\delta^\alpha$ . Таким образом,  $\sum_i |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s$ , так что  $H_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H_\delta^s(F)$ . Когда  $\delta \rightarrow 0$ , то  $\varepsilon \rightarrow 0$ , давая (12.7).

Условие (12.6) известно как *условие Гельдера с показателем  $\alpha$* , такое условие предполагает, что  $f$  непрерывна. Особенно важным является случай  $\alpha = 1$ , т.е.

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \quad (x, y \in F). \quad (12.8)$$

Тогда  $f$  называется *отображением Липшица* и

$$H^s(f(E)) \leq c^s H^s(E). \quad (12.9)$$

Любая дифференцируемая функция с ограниченной производной обязательно является липшицевой по теореме о среднем значении. Если  $f$  является изометрией, то есть  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ , тогда  $H^s(f(F)) = H^s(F)$ . В частности, хаусдорфовы меры инвариантны относительно переноса (то есть  $H^s(F + z) = H^s(F)$ , где  $F + z = \{x + z : x \in F\}$ ), и инвариантны относительно вращения, как конечно можно было бы ожидать.

## 12.2. Хаусдорфова размерность

Возвращаясь к формуле (12.1), становится понятно, что для любого данного множества  $F$  и  $\delta < 1$   $H_\delta^s(F)$  является невозрастающей с  $s$ , так что, согласно (12.2),  $H^s(F)$  также невозрастающая. Фактически верно следующее: если  $t > s$  и  $\{U_i\}$  —  $\delta$ -покрытие  $F$ , имеем:

$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s; \quad (12.10)$$

так что, переходя к точным верхним граням, получаем  $H_\delta^t \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$ . Когда  $\delta \rightarrow 0$ , то если  $H^s(F) < \infty$ , тогда  $H^t(F) = 0$  для  $t > s$ . Таким обра-

зом, график  $H^s(F)$  от  $s$  (рис. 12.1) показывает, что существует критическое значение  $s$ , при котором  $H^s(F)$  «прыгает» от  $\infty$  до 0. Это критическое значение называется *хаусдорфовой размерностью*  $F$  и записывается  $\dim_H F$ . (Заметим, что некоторые авторы ссылаются на хаусдорфову размерность как на *размерность Хаусдорфа-Безиковича*). Формально

$$\dim_H F = \inf\{s : H^s(F) = 0\} = \sup\{s : H^s(F) = \infty\}, \quad (12.11)$$

так что

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{если } s < \dim_H F \\ 0, & \text{если } s > \dim_H F. \end{cases} \quad (12.12)$$

Если  $s = \dim_H F$ , тогда  $H^s(F)$  может быть нуль или бесконечность, или может удовлетворять неравенству  $0 < H^s(F) < \infty$ .

Борелевское множество, удовлетворяющее последнему условию, называется *s-множеством*. Математически *s-множества* являются наиболее удобными множествами для изучения, и, к счастью, они встречаются удивительно часто.

Рассмотрим простой пример. Пусть  $F$  – плоский диск единичного радиуса в  $R^3$ . Из сходных свойств длины, площади и объема следует:  $H^1(F) = \text{length}(F) = \infty$ ,  $0 < H^2(F) = (4/\pi) \times \text{area}(F) < \infty$  и  $H^3(F) = (6/\pi) \times \text{vol}(F) = 0$ . Таким образом,  $\dim_H F = 2$  с  $H^s(F) = \infty$ , если  $s < 2$ , и  $H^s(F) = 0$ , если  $s > 2$ .

Хаусдорфова размерность удовлетворяет следующим свойствам (которые, как можно было бы ожидать, будут справедливы для любого подходящего определения размерности).

### 12.2.1. Открытые множества

Если  $F \subset R^n$  открытое, тогда  $\dim_H F = n$ , так как  $F$  содержит шар положительного  $n$ -мерного объема.

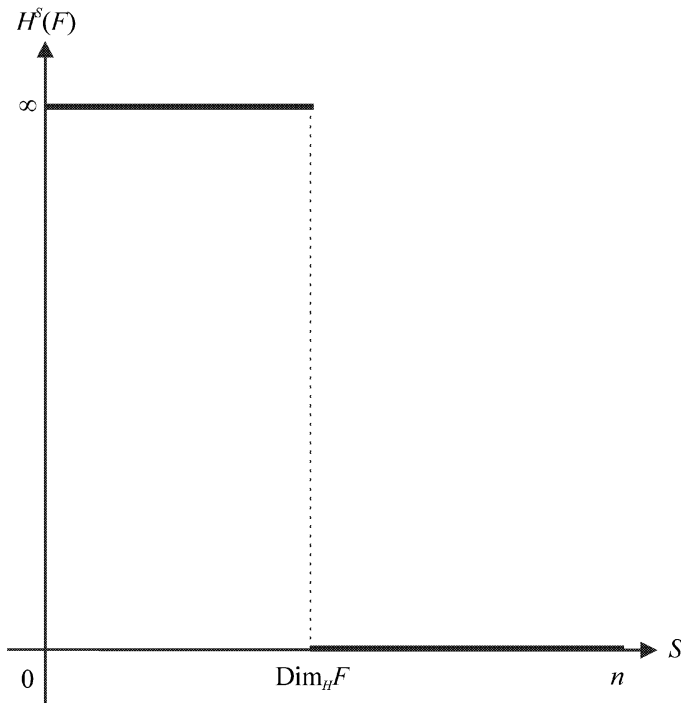


Рис. 12.1

### 12.2.2. Гладкие множества

Если  $F$  гладкое (т.е. непрерывно дифференцируемое)  $m$ -мерное подмногообразие (т.е.  $m$ -мерная поверхность) из  $R^n$ , тогда  $\dim_H F = m$ . В частности, гладкие кривые имеют размерность 1, а гладкие поверхности имеют размерность 2. Существенно, что это может быть выведено из соотношения между хаусдорфовой и лебеговой мерами.

### 12.2.3. Монотонность

Если  $E \subset F$ , тогда  $\dim_H E \leq \dim_H F$ . Это непосредственно следует из свойства меры, ибо  $H^s(E) \leq H^s(F)$  для каждого  $s$ .

### 12.2.4. Счетная устойчивость

Если  $F_1, F_2, \dots$  – (счетная) последовательность множеств, тогда  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$ . Конечно,  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_H F_i$  для каждого  $i$  из свойства монотонности. С другой стороны, если  $s > \dim_H F_i$  для всех  $i$ , тогда  $H^s(F_i) = 0$ , так что  $H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0$ . Это дает противоположное неравенство.

### 12.2.5. Счетные множества

Если  $F$  счетное множество, тогда  $\dim_H F = 0$ . Если  $F_i$  единственная точка,  $H^0(F_i) = 1$  и  $\dim_H F_i = 0$ , так что по счетной устойчивости  $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$ .

Свойства преобразования хаусдорфовой размерности следуют непосредственно из соответствующих свойств хаусдорфовых мер, данных в утверждении 12.1.

**Утверждение 12.2.** Пусть  $F \subset R^n$  и допустим, что  $f: F \rightarrow R^m$  удовлетворяет условию Гельдера:  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$  ( $x, y \in F$ ). Тогда  $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha)\dim_H F$ .

*Доказательство.* Если  $s > \dim_H F$ , тогда, по утверждению 12.1,  $H^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H^s(F) = 0$ . Это означает, что  $\dim_H f(F) \leq (s/\alpha)$  для всех  $s > \dim_H F$ .

### Следствие 12.1.

(а) Если  $f: F \rightarrow R^m$  – липшицево преобразование (см. (12.8)), тогда  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ .

(b) Если  $f : F \rightarrow R^m$  би-липшицево преобразование, т.е.:

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y| \quad (x, y \in F), \quad (12.13)$$

где  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ , тогда  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ .

**Доказательство.** Пункт (a) следует из утверждения 12.2, если взять  $\alpha = 1$ . Применение этого пункта к обратному преобразованию  $f^{-1} : f(F) \rightarrow F$  дает другое неравенство. Это доказывает пункт (b).

Следствие 12.1 обнаруживает фундаментальное свойство хаусдорфовой размерности: *Хаусдорфова размерность инвариантна относительно би-липшицевого преобразования.* Таким образом, если два множества имеют разные размерности, то не может быть би-липшицева отображения из одного множества в другое. Это напоминает ситуацию в топологии, где различные «инварианты» (такие как группы гомологии или гомотопии) используются для различия множеств, которые не являются гомеоморфными: если топологические инварианты двух множеств различны, тогда не может быть гомеоморфизма (непрерывного взаимнооднозначного отображения с непрерывным обратным) между этими множествами.

В топологии два множества рассматриваются как «одинаковые», если существует гомеоморфизм между ними. *Один из подходов к фрактальной геометрии – рассматривать два множества как «одинаковые», если существует би-липшицево отображение между ними.* Топологические инварианты используются лишь для различения между негемеоморфными множествами. Однако мы можем найти другие параметры, включая хаусдорфову размерность, чтобы провести различия между множествами, которые не являются би-липшицево эквивалентными. Так как би-липшицевы преобразования (12.13) обязательно непрерывны, то топологические инварианты могут использоваться в этом направлении, а хаусдорфова размерность (и другие определения размерности) дает более тонкие инварианты для различения фракталов.

Вообще сама по себе размерность множества мало говорит нам о его топологических свойствах. Однако любое множество размерности



меньше 1 обязательно является вполне несвязным; т.е. никакие две его точки не лежат в одной и той же связной компоненте.

**Утверждение 12.3.** *Множество  $F \subset \mathbb{R}^1$  с  $\dim_H F < 1$  полностью несвязно.*

*Доказательство.* Пусть  $x$  и  $y$  различные точки из  $F$ . Определим отображение  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, \infty)$  как  $f(z) = |z - x|$ . Так как  $f$  не увеличивает расстояния, т.е.  $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$ , мы имеем из следствия 1(a), что  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$ . Таким образом,  $f(F)$  – подмножество из  $\mathbb{R}$  меры  $\mathbb{H}^1$  или длины нуль и, таким образом, имеет плотное дополнение. Выбирая  $r$  такое, что  $r \notin f(F)$  и  $0 < r < f(y)$ , получаем  $F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}$ . Таким образом,  $F$  содержится в двух разъединенных открытых множествах с  $x$  в одном множестве и  $y$  в другом, так что  $x$  и  $y$  лежат в различных связных компонентах  $F$ .

## 12.3. Вычисление хаусдорфовой размерности – простые примеры

В этом разделе показывается, как вычислить хаусдорфову размерность некоторых простых фракталов.

### Пример 12.1

Пусть  $F$  – пыль Кантора, полученная из единичного квадрата, как на рис. 12.2 (на каждой стадии конструирования квадраты делятся на 16 квадратов с длиной стороны  $1/4$ , из которых остается одинаковый образец из четырех квадратов). Тогда  $1 \leq H^1(F) \leq \sqrt{2}$ , так что  $\dim_H F = 1$ .

*Вычисление.* Возьмем очевидное покрытие  $F$   $4^k$  квадратами со стороной  $4^{-k}$  (т.е. диаметра  $\delta = 4^{-k} \sqrt{2}$ ) на  $E_k$ ,  $k$ -й стадии конструирования. Получаем оценку  $H_\delta^1(F) \leq 4^k 4^{-k} \sqrt{2}$  для точной нижней грани в (12.1). Когда  $k \rightarrow \infty$ , то  $\delta \rightarrow 0$ , давая  $H^1(F) \leq \sqrt{2}$ .

Для оценки снизу обозначим через  $proj$  ортогональную проекцию на ось  $x$ . Ортогональная проекция не увеличивает расстояний, т.е.  $|proj x - proj y| \leq |x - y|$ . Следовательно, если  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , то  $proj$  является отображением Липшица. Благодаря конструкции  $F$ , проекция «тени»  $F$  на ось  $x$ ,  $proj F$ , это единичный отрезок  $[0, 1]$ . Используя (12.9), получаем  $1 = length[0,1] = H^1([0,1]) = H^1(proj F) \leq H^1(F)$ . Заметим, что такие же доводы и результат справедливы для множества, полученного повторяющимся делением квадратов на  $m^2$  квадратов со стороной длины  $1/m$ , из которых в каждом столбце остается один квадрат.

Этот трюк с использованием ортогональной проекции для получения оценки снизу хаусдорфовой меры работает только в особых обстоятельствах и не является основой более общего метода. Обычно дело обстоит сложнее.

### Пример 12.2

Пусть  $F$  – фрактал Кантора ( $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ , см. рис. 12.3). Если  $s = \lg 2 / \lg 3 \approx 0.6309 \dots$ , тогда  $\dim_H F = s$  и  $1/2 \leq H^s(F) \leq 1$ .

*Эвристическое вычисление.* Множество Кантора  $F$  делится на левую  $F_L = F \cap [0, 1/3]$  и правую  $F_R = F \cap [2/3, 1]$  части. Ясно, что обе части геометрически похожи на  $F$ , но масштабированы на  $1/3$ , и  $F = F \cup F_R$  с этим разрывом в объединении. Таким образом, для любого  $s$

$$H^s(F) = H^s(F_L) + H^s(F_R) = (1/3)^s H^s(F) + (1/3)^s H^s(F)$$

по масштабному свойству хаусдорфовых мер. Предполагая, что при критическом значении  $s = \dim_H F$ , мы имеем  $0 < H^s(F) < \infty$  (сильное допущение, но оно может быть оправдано), следовательно, можем поделить на  $H^s(F)$ , чтобы получить  $1 = 2(1/3)^s$  или  $s = \lg 2 / \lg 3$ .

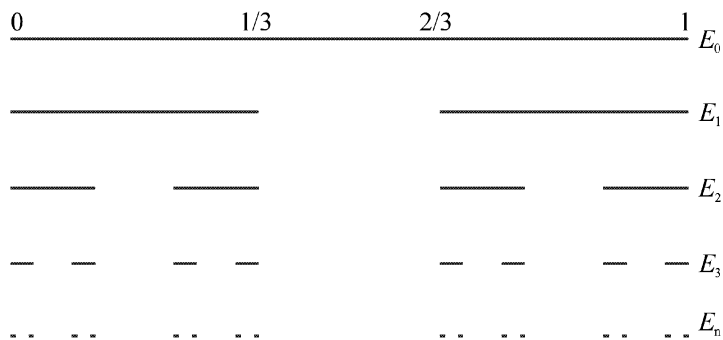
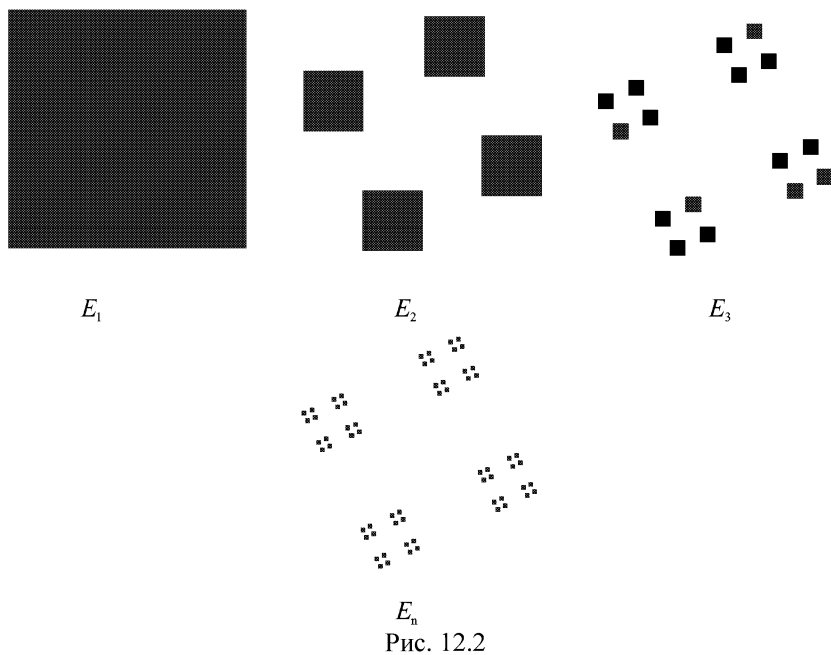


Рис. 12.3. Конструкция фрактала Кантора

*Строгое вычисление.* Назовем интервалы длины  $3^{-k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), которые дают множества  $E_k$  при конструировании  $F$ , *основными интервалами*. Покрытие  $\{U_i\}$   $F$ , состоящее из  $2^k$  интервалов  $E_k$  длины  $3^{-k}$  дает, что  $H_{3^{-k}}^s(F) \leq \sum |U_i|^s = 2^k 3^{-ks} = 1$ , если  $s = \lg 2 / \lg 3$ . Полагая  $k \rightarrow \infty$ , получаем  $H^s(F) \leq 1/2$ .

Чтобы доказать, что  $H^s(F) \geq 1/2$ , мы покажем, что

$$\sum |U_i|^s \geq 1/2 = 3^{-s} \quad (12.14)$$

для любого покрытия  $\{U_i\}$   $F$ . Ясно, что если  $\{U_i\}$  конечный набор замкнутых подынтервалов из  $[0, 1]$ , то, используя компактность  $F$ , нам нужно только проверить (12.14). Для каждого  $U_i$  пусть  $k$  – целое, такое, что

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}. \quad (12.15)$$

Тогда  $U_i$  может пересечь самое большее один из основных интервалов  $E_k$ , так как расстояние между этими основными интервалами, по крайней мере,  $3^{-k}$ . Если  $j \geq k$ , тогда, по построению,  $U_i$  пересекает самое большее  $2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$  основных интервалов  $E_j$ . Если мы выбираем  $j$  достаточно большим, так что  $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$  для всех  $U_i$ , то, поскольку  $\{U_i\}$  пересекает все  $2^j$  основных интервалов длины  $3^{-j}$ , подсчет интервалов дает  $2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$ . Это доказывает (12.14).

С достаточной долей усилий можно показать, что  $H^s(F) = 1$ .

«Эвристический» метод вычисления, использованный в примере 12.2, дает правильный ответ относительно размерности многих самоподобных множеств. Например, кривая Коха, делается из четырех копий самой себя с масштабом  $1/3$  и, следовательно, ее размерность  $\lg 4 / \lg 3$ . Вообще, если  $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ , где каждое  $F_i$  геометрически подобно  $F$ , но масштабировано с коэффициентом  $c_i$ , то при условии, что  $F_i$  не перекрываются

«слишком сильно», эвристический метод дает  $\dim_H F$  как число  $s$ , удовлетворяющее  $\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$ .

## 12.4. О других размерностях

### 12.4.1. Предельная емкость. Фрактальная размерность

Заменим в определении хаусдорфовой размерности класс покрытий. А именно, будем покрывать множество  $A$  не произвольными открытыми множествами диаметра, меньшего или равного  $\delta$ , а шарами одного и того же диаметра  $\delta$ . То есть,  $d$ -мерный объем множества  $A$  будем приближать выражением:  $m(A, \alpha, \delta) = \inf \left\{ \sum_{u_i \in \Gamma} |u_i|^\alpha; \bigcup_i u_i \supset A, \text{diam } u_i = \delta \right\}$ , где  $u_i$  – шар в  $R^n$  с центром в некоторой точке  $x$ , то есть множество точек  $y$  таких, что  $\text{dist}(x, y) \leq \delta/2$ , а  $\Gamma$  – покрытие множества  $A$ . Перепишем выражение в фигурных скобках следующим образом:  $\sum_{u_i \in \Gamma} |u_i|^\alpha = N(A, \delta) \delta^\alpha$ ; где  $N(A, \delta)$  – число элементов в покрытии  $\Gamma$ .

В отличие от хаусдорфовой размерности, величина  $m(A, \alpha, \delta)$  может не иметь предела при  $\delta \rightarrow 0$ , поэтому рассматриваются ее верхний и нижний пределы. Пусть

$$\bar{m}_c(A, \alpha) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} m(A, \alpha, \delta), \quad \underline{m}_c(A, \alpha) = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} m(A, \alpha, \delta).$$

Функции  $\bar{m}_c(A, \alpha)$ ,  $\underline{m}_c(A, \alpha)$  обладают следующими свойствами: существует  $\bar{\alpha}_c$  (соответственно  $\underline{\alpha}_c$ ), что  $\bar{m}_c(A, \alpha) = \infty$  при  $\alpha < \bar{\alpha}_c$  и  $\bar{m}_c(A, \alpha) = 0$  при  $\alpha > \bar{\alpha}_c$  (соответственно  $\underline{m}_c(A, \alpha) = \infty$  при  $\alpha < \underline{\alpha}_c$  и  $\underline{m}_c(A, \alpha) = 0$  при  $\alpha > \underline{\alpha}_c$ ).

Верхней и нижней емкостью множества  $A$  называются числа

$$\bar{c}(A) = \bar{\alpha}_c = \inf \left\{ \alpha : \bar{m}_c(A, \alpha) = 0 \right\},$$

$$\underline{c}(A) = \underline{\alpha}_c = \inf \left\{ \alpha : \underline{m}_c(A, \alpha) = 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\bar{c}(A) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \delta)}{|\ln \delta|}, \quad \underline{c}(A) = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(A, \delta)}{|\ln \delta|},$$

где  $N(A, \delta)$  – наименьшее число шаров диаметра  $\delta$ , покрывающих множество  $A$ .

Непосредственно из определения вытекает, что  $\dim_H(A) \leq \underline{c}(A) \leq \bar{c}(A)$ .

Из определения емкости нетрудно также установить, что если множество  $B$  плотно в  $A$ , то  $\bar{c}(B) = \bar{c}(A)$  и  $\underline{c}(B) = \underline{c}(A)$ . Например, множество всех рациональных чисел на отрезке  $[0, 1]$  имеет емкость равную единице и нулевую хаусдорфову размерность, поскольку оно счетно.

*Верхнюю емкость называют **фрактальной размерностью**.*

#### 12.4.2. Инвариантная мера

Мера  $\rho$  называется инвариантной, если для любого измеримого подмножества  $B \subset M$  и  $t > 0$  имеем  $\rho(f^{-t}B) = \rho(B)$ , где  $f^t$  – отображение сдвига на время  $t$  динамической системы с фазовым пространством  $M$ . В данном учебном пособии рассматриваются только дискретные двумерные динамические системы (главы 6–8).

Мера  $\rho$  (ниже используется  $\mu$ ): 1) сосредоточена на множестве  $A$  (например, на аттракторе – притягивающем множестве), если мера любого подмножества, которое не содержит точек множества  $A$ , равна нулю; 2) вероятностная, если  $\rho(A) = 1$ ; 3) эргодическая, если в  $A$  не существует инвариантных (т.е. состоящих из целых траекторий) подмножеств промежуточной (между нулем и единицей) меры. Инвариантные вероятностные и эргодические меры всегда существуют (теорема Боголюбова-Крылова устанавливает факт существования таких мер и дает рецепт их построения).

Отвечающая установившемуся (в неконсервативном случае) движению системы траектория, с которой имеет дело исследователь, по своему определению «типична» относительно некоторой меры.

### 12.4.3. Поточечная размерность

Основной характеристикой, используемой при обработке результатов численного или натурального эксперимента, является поточечная размерность.

Пусть  $A \subset M$  – аттрактор динамической системы  $(f', M)$  и  $\mu$  – инвариантная (относительно  $f'$ ) мера, сосредоточенная на аттракторе  $A$ . Пусть  $x \in A$  – точка на аттракторе,  $B(x, \delta)$  – шар радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x$ . Положим

$$\bar{d}_\mu(x) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B(x, \delta))}{\ln \delta}, \quad \underline{d}_\mu(x) = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu(B(x, \delta))}{\ln \delta}.$$

Величины  $\bar{d}_\mu(x)$ ,  $\underline{d}_\mu(x)$  называются верхней и нижней поточечной размерностями по мере  $\mu$ .

Если аттрактор в определенном смысле «однороден» – его нижняя и верхняя поточечные размерности  $\mu$  почти всюду равны одному и тому же числу  $d$ , то этому же числу равны хаусдорфова размерность и верхняя и нижняя емкости «наименьшего» множества полной меры в  $A$ .

## Список литературы

1. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. – New York: Freeman, 1982. (Перевод на русский: *Б. Мандельброт* Фрактальная геометрия природы.- Изд-во РХД, Ижевск, 2002).
2. *Falconer K. J.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – New York: John Wiley, 1990.
3. *Lauwerier H. A.* Fractals - images of chaos. – Princeton Univ. Press, 1991.
4. *Морозов А. Д., Драгунов Т. Н., Бойкова С. А., Малышева О. В.* Инвариантные множества динамических систем в Windows. – М.: Эдиториал УРСС, 1998.
5. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1965.
6. *Федорчук В. В.* Основы теории размерности // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. – 1986.-Т. 17. – С. 111 – 224.
7. *Wegner T., Peterson M., Tyler B., Branderhorst P.* Fractals for Windows. – Weit Group Press, 1992.
8. *Julia G.* Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles. – J. de Mathematiques pures et appliquees, 1918. – 8 ser., V. 1. – P. 47 – 245.
9. *Fatou.* Sur les equations fonctionnelles // Bulletin de la Soc. Math. de France. – 1919. – V. XLVII. – P. 161 - 271.
10. *Fatou.* Sur les equations fonctionnelles // Bulletin de la Soc. Math. de France. – 1920. – V. XLVIII. P. 33-94, 208 – 314.
11. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. – М.-Л.: НТИ, 1936.
12. *Sullivan D.* Iteration des fonctions analytiques complexes // C. r. Acad. sci. ser. 1. 294. № 9. P. 301-303. Paris. 1982.



13. *Якобсон М. В.* Эргодическая теория одномерных отображений // Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики. – 1986.-Т. 2. – С. 204 – 226.
14. *Любич М. Ю.* Исследование устойчивости динамики рациональных отображений // Теория функций, функ. анализ и их приложения. – Харьков, 1984. – Вып. 42. – С. 72 – 91.
15. *Peitgen H.-O. and Richter P.H.* The Beauty of Fractals.-Springer, Berlin,1986 (Рус. перевод: *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов.-М.:Мир, 1993).
16. *Russ J.C.* Fractal Surface.-Plenum Press, New York and London, 1994
17. *Barnsley M.* Fractals Everywhere.-Academic Press, Boston, 1988.
18. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах.- М.:Постмаркет, 2000, 352 с.
19. *Божожкин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы.-Москва-Ижевск, РХД, 2001.
20. *Devaney R. L.* An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.-Sec. Ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1989.
21. *Banks J., Brooks G., Gairns G., Davis G. & Stacey P.* On Devaney's Definition of Chaos.- American Mathematical Monthly, vol. 99, No 4, 1992, pp. 332-334.
22. *Morozov A.D.* On hypercomplex dynamics.- RCD. (В печати)
23. *Chung K.W., Chan H.S.Y., Wang B.N.* Tessellations in three-dimensional hyperbolic space from dynamics and the quaternions.- Chaos, Solitons & Fractals, vol. , 2001, pp. 1181-1197.
24. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа.- М.: Наука, 1973.

Морозов Альберт Дмитриевич

## **Введение в теорию фракталов**

Подписано в печать 29.06.02. Формат 60 x 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Усл. печ. л. 9,89. Уч. изд. л. 9,76.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.

Печать офсетная.. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

<http://rcd.ru> E-mail: [borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)