Необходимые теоретические сведения по механике твердого тела

Всякое тело под действием приложенных к телу сил в большей или меньшей степени деформируется, т.е. изменяет свои размеры и форму.

В механике под твердым телом (абсолютно твёрдым телом) подразумевают тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Часто говорят, что твердое тело - неизменяемая конфигурация материальных точек.

1.1 Основы кинематики твёрдого тела.

Всякое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух основных видов движения – поступательного и вращательного.

1.1.1 **<u>Поступательным</u>** называется такое движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с телом, остается при его движении параллельной самой себе (рис.1). При этом все точки тела совершают одинаковые перемещения.

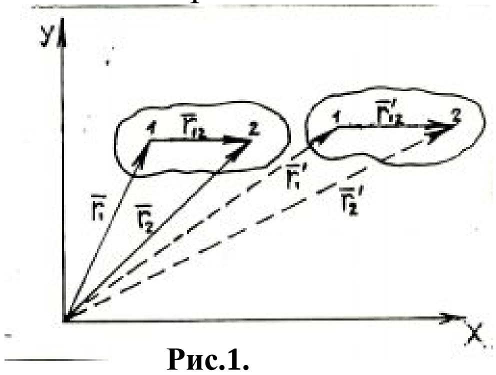


Рис.1.

Обозначим цифрами 1 и 2 две произвольные точки тела. При поступательном движении тела вектор $\vec{r}_{12}$, проведенный из точки 1 тела в точку 2 этого же тела, остаётся неизменным. Он связан с радиус-векторами точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соотношением $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$.

Продифференцировав это соотношение по времени, получим:

$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$, т.е. $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_1$. Аналогично $\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt}$, т.е. $\vec{a}_2 = \vec{a}_1$. Т.о., скорость и ускорение точек 1 и 2 одинаковы. То же самое получится для любой другой пары произвольно взятых точек. Отсюда следует, что при поступательном движении все точки твердого тела имеют в любой момент времени одинаковые скорости и ускорения. Из этого следует, что для описания поступательного движения твердого тела достаточно знать, как движется его центр масс. Все остальные точки движутся таким же образом. При поступательном движении твёрдое тело можно считать материальной точкой.

1.1.2. **Вращательным движением** твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **<u>осью вращения</u>.** Ось вращения может находиться как внутри тела, так и вне его.

1.1.3. Быстроту вращения естественно характеризовать углом, на который поворачивается тело в единицу времени. Если за равные, сколь угодно малые промежутки времени Δt, тело поворачивается на одинаковые углы $\Delta\varphi$, вращение называется **равномерным.** Величина $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ определяет угол поворота тела в единицу времени. Эту величину называют **угловой скоростью** тела (точнее, это есть модуль угловой скорости). При неравномерном вращении $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}$ (рад/с) т.е. угловая скорость тела есть производная от угла поворота по времени.

Изменение угловой скорости со временем, характеризуется векторной величиной: $\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ которая называется **угловым ускорением.** Если величина углового ускорения постоянна, то вращение является равноускоренным.

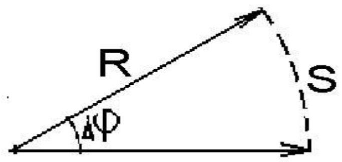


Рис.2

1.1.4. Если взять произвольную точку вращающегося тела (см. рис. 2) , то траектория ее движения является окружностью и путь S, проходимый точкой вдоль траектории будет равен произведению радиуса траектории на угол поворота $\Delta\varphi$: S=R$\Delta\varphi$, где угол $\Delta\varphi$ измерен в радианах.

Линейная скорость движения точки по окружности $\upsilon = \frac{dS}{dt}$ связана с модулем угловой скорости ω соотношением : $\upsilon = \omega$ R.

Тангенциальное ускорение, с которым движется точка по окружности, $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ связано с угловым ускорением ε соотношением: $a_\tau =$ εR.

Величины, измеряемые вдоль траектории (по линии)	Угловые величины	Связь между величинами
Путь S, м	Угол поворота φ , рад	S=φ R
Линейная скорость, $\upsilon = \frac{dS}{dt}$; $\frac{м}{с}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; c^{-1}	υ=ωR
Ускорение (тангенциальное) $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$; $\frac{м}{c^2}$	Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$; c^{-2}	$a_\tau =$ εR.

1.2 Основы динамики вращательного движения твердого тела.

1.2.1. Для того, чтобы сформулировать законы динамики материальной точки вводят понятие силы и массы. В инерциальной системе отсчета изменения движения и формы тела происходят только под действием других тел (см. первый закон динамики).

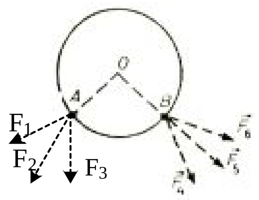
Силой называется векторная величина, характеризующая воздействие на данное тело со стороны другого тела. Направление силы совпадает с направлением ускорения, сообщаемого телу данным воздействием. **Масса** есть мера инертности тела. Под инертностью понимают свойство тел сохранять свою скорость неизменной до тех пор, пока на него не подействуют другие тела. При действии на тело других тел, изменение скорости тела обратно пропорционально массе тела, т.е. чем больше масса тела, тем труднее изменить его скорость.

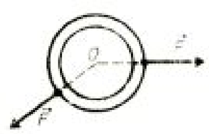
Выясним, при каких условиях тела движутся поступательно. Рассмотрим следующий опыт. На гладкой горизонтальной поверхности лежит тело, имеющее форму диска(рис.). В точках A и B этого тела будем поочередно прикладывать одинаковые по модулю, но различные по направлению силы. Опыт показывает, что силы $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_3}$, $\mathbf{F_4}$ и $\mathbf{F_6}$ вызывают поворот тела, а силы $\mathbf{F_2}$, и $\mathbf{F_5}$ вызывают поступательное движение тела. Следовательно, *через каждую точку тела можно провести лишь одну такую прямую, действуя вдоль которой сила вызывает поступательное движение тела*. Наблюдения показывают, что все эти прямые пересекаются в одной точке.

Точку пересечения линий действия сил, вызывающих поступательное движение тела, называют *центром масс* этого тела. Такое название не случайно. Центр масс является точкой, характеризующей распределение масс в данном теле (или в механической системе). Положение центра масс зависит от того, как распределяется по объему тела его масса. Центр масс не обязательно должен находиться в самом теле. Например, центр масс однородного кольца находится вне этого кольца в его геометрическом центре О(рис.).

Если направление прямой, вдоль которой действует сила, не проходит через центр масс тела, эта сила вызывает поворот тела.

Если тело движется поступательно под действием нескольких сил, значит точка приложения *равнодействующей* этих сил находится в центре масс этого тела. При поступательном движении тела все его точки движутся с таким же ускорением, которое получает центр масс этого тела под действием равнодействующей внешних сил. Следовательно, для того чтобы описать поступательное движение тела, необходимо описать движение центра масс этого тела под действием равнодействующей внешних сил.





При движении тела (механической системы) его центр масс движется так же, как двигалось бы под действием равнодействующей внешних сил материальная точка, имеющая массу, равную массе тела (системы). Поэтому, когда мы считаем тело материальной точкой, то имеем в виду центр масс данного тела.

Центром тяжести твердого тела, находящегося в поле тяготения Земли, называют точку приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих на каждую частицу этого тела. При свободном падении тела без вращения тело движется поступательно под действием силы тяжести.

Как отмечалось выше, сила, вызывающая поступательное движение тела, приложена в центре масс этого тела. Следовательно, *центр тяжести твердого тела совпадает с его центром масс*. Поэтому часто центр масс называют центром тяжести.

Однако между понятиями центра масс и центра тяжести есть отличие. Понятие центра тяжести справедливо только для твердого тела, находящегося в поле сил тяжести, а понятие центра масс не связано ни с каким силовым полем и справедливо для любого тела(механической системы).

Основной закон динамики поступательного движения – второй закон Ньютона – записывается и формулируется так: в инерциальной системе отсчета изменение скорости движения тела пропорционально приложенной силе $\vec{F}$ и происходит в том направлении, в котором действует сила:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

1.2.2. При вращательном движении тела изменение его кинематических величин зависит не только от величины силы, но и от точки ее приложения, поэтому вместо силы мы введем понятие вращающего момента.

Вращающим моментом силы (моментом силы) относительно точки О называется векторная величина $\vec{M}$, равная векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$, на вектор силы $\vec{F}$: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, причем радиус-вектор $\vec{r}$ проводится из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$ (см. рис. 3).

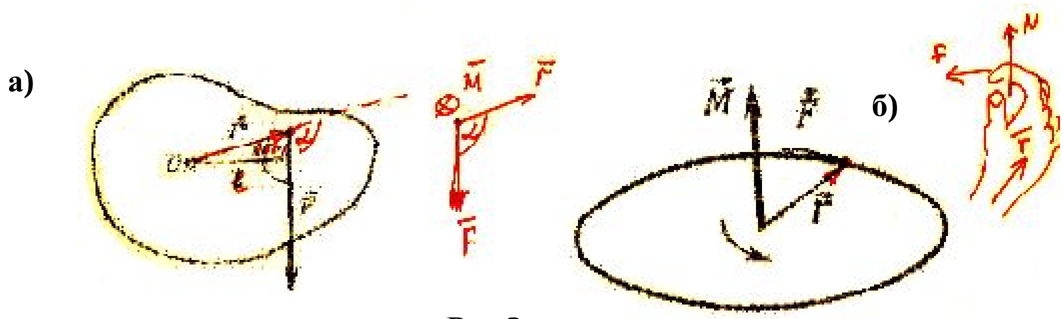


Рис.3.

В соответствии с определением векторного произведения вектор $\vec{M}$ перпендикулярен к плоскости, образованной векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Направление вектора $\vec{M}$ определяется правилом правого винта, т.е. если смотреть из конца вектора $\vec{M}$, то вращение тела по кратчайшему расстоянию от $\vec{r}$ к $\vec{F}$, происходит против часовой стрелки. На рис. 3а вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас.

Модуль векторного произведения равен произведению модулей силы и радиус – вектора на sin угла между ними:

$$M=|\vec{r}\,||\vec{F}\,|\sin(\vec{r},\vec{F}\,) = F\, r \sin\alpha \quad \text{(см.рис.3а).}$$

Практически важным является т.н. <u>плоское</u> движение твердого тела, т.е. такое движение, при котором траектория любой точки тела лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. В этом случае момент сил относительно оси определяют как произведение силы на ее плечо. <u>**Плечо силы**</u> ℓ – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила. На рис.3 $\ell = r\sin\alpha$

1.2.3. Инертность тела во вращательном движении также определяется не только массой, но и ее распределением в пространстве, то есть формой тела. Поэтому вместо массы вводится понятие момента инерции тела.

<u>**Моментом инерции I материальной точки** относительно</u> какой-либо <u>оси</u> называется произведение массы m этой точки на квадрат ее расстояния r до оси: $I=mr^2$ (рис.4).

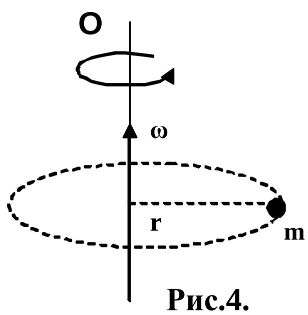


Рис.4.

<u>**Момент инерции системы материальных- точек**</u> относительно какой-либо оси равен сумме моментов инерции всех материальных точек системы относительно этой оси:

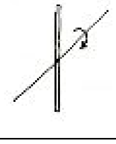
$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ .$$

Чтобы найти момент инерции сплошного тела относительно какой – либо оси, надо разбить его на элементы dm_i , определить расстояние r_i каждого элемента до оси вращения и просуммировать произведения $dm_i \cdot r_i^2$ по всем элементам тела. Это означает вычисление интеграла

$$I=\int r^2 dm, \quad (1)$$

Момент инерции является физической величиной, характеризующей инертность тела при вращательном движении. Любое тело имеет различные моменты инерции относительно различных осей. Математически рассчитать момент инерции тела относительно произвольной оси вращения можно только в относительно простых случаях.

Момент инерции некоторых тел, вычисленный относительно оси, проходящей через центр масс приведены в таблице:

Твердое тело	Ось	J
Тонкое кольцо	Совпадает с осью симметрии	mr^2
Полый тонкостенный цилиндр	Совпадает с осью симметрии	mr^2
Сплошной цилиндр(диск) радиуса R	Совпадает с осью цилиндра(диска)	$\frac{mR^2}{2}$
Шар	Проходит через центр шара	$2mR^2/5$
Тонкий стержень	Перпендикулярно стержню, через центр стержня 	$ml^2/12$

Момент инерции тел, вычисленный относительно оси, проходящий через центр имеет минимальное значение.

Момент инерции тела неправильной формы можно определить экспериментально.

Так как при изменении оси вращения тела, момент инерции тела также изменяется, то широкое применение имеет **теорема Штейнера**:

Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту инерции тела I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния *a* между осями

$$I=I_0+ma^2 \qquad (2)$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела имеет вид: $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$.

Этот закон динамики может быть записан и в другом виде. Для этого введем понятие момента импульса.

1.2.4 Для материальной точки вводится понятие **импульса точки** $\vec{p}$ (количества движения): $\vec{p}=m\vec{\upsilon}$, где m – масса тела, $\vec{\upsilon}$ - его скорость. Вектор $\vec{p}$ направлен так же, как и скорость тела, а его модуль $|\vec{p}|=p=m\upsilon$.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки О определяется векторным произведением радиус – вектора $\vec{r}$ материальной

точки, проведенного из точки О, на импульс $\vec{p}$ материальной точки

$$\vec{L}=[\vec{r},\vec{p}]=[\vec{r},m\vec{\upsilon}], \qquad \text{т.к.} \quad \vec{p}=m\vec{\upsilon}$$

Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с направлением поступательного движения правого винта (буравчика) при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$(Рис5.).

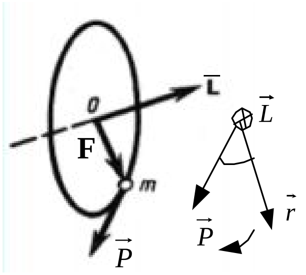


Рис.5.

Модуль $\vec{L} = |\vec{L}| = L = rp\sin(\vec{r},\vec{p}) = p\ell$, где $\ell = r\sin(\vec{r},\vec{p})$ называют **плечом момента импульса** материальной **точки относительно**

точки относительно точки О.

Моментом импульса системы относительно точки О называется векторная сумма моментов импульсов частиц, входящих в систему, относительно той же точки: $\vec{L}=\sum\limits_i \vec{L}_i = \sum\limits_i [\vec{r},\vec{p}]$.

При вращательном движении твердого тела практически важным является понятие момента импульса относительно оси. Пусть точка О принадлежит оси OZ. Спроектируем вектор $\vec{L}$момента импульса материальной точки относительно точки О на ось OZ. Полученная скалярная величина L_z называется **моментом импульса частицы относительно оси z.** Величина L_z не зависит от выбора точки О на оси z.

Аналогично, моментом импульса системы частица относительно оси называется величина L_z равная сумме проекций моментов импульсов всех частиц на ось Z: $L_z = \sum \left[\bar{r}_i \bar{p}_i\right]_z$

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z каждая точка тела движется по окружности постоянного радиуса R_i с некоторой скоростью υ_i. В этом случае радиус R_i является плечом вектора $m_i\vec{\upsilon}_i$, т.к. и скорость $\vec{\upsilon}_i$ и импульс $\vec{p}_i$ перпендикулярны радиусу. Момент импульса отдельной частицы тела относительно оси вращения $L_{iz} = m_i\upsilon_i R_i$ и направлен по оси вращения.

Момент импульса всего тела относительно этой же оси z L_z равен сумме моментов импульса отдельных его частиц относительно этой же оси:

$$L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i \upsilon_i R_i = \omega \sum m_i R_i^2 = \omega \cdot I_z$$

т.к. при вращательном движении абсолютно твердого тела $\upsilon_i = \omega R_i$, где ω - угловая скорость вращения тела, I_z - момент инерции тела относительно оси z.

Основной закон динамики вращательного движения тела $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$, можно записать в другой форме, используя момент импульса тела: $\vec{M}_Z = I_Z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I_Z\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}_Z}{dt}$,т.е. производная по времени момента импульса тела относительно оси равна моменту сил, действующих на тело, относительно той же оси. Если ось OZ не связывать с направлением оси вращения, то вместо $M_z = \frac{dL_z}{dt}$ мы получим $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Выражение $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ называют **правилом моментов.**

Если момент внешних сил $\vec{M} = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, т.е. момент импульса тела не изменяется (**закон сохранения момента импульса**)

2. Энергия. Закон сохранения энергии.

2.1 **Энергия** (от греческого enerqeia – действие, деятельность), общая качественная мера движения и взаимодействия всех видов материи. Понятие энергии связывает воедино все явления природы.

В соответствии с различными формами движения материи рассматривают различные формы энергии: механическая, внутренняя, энергия электромагнитных, внутриядерных взаимодействий и др.

2.2 **Механической энергией тела Е** называется энергия механического движения и взаимодействия частиц тела. Она складывается из кинетической и потенциальной энергий: $E = E_К + E_П$.

2.3 **Кинетической энергией** обладает любое движущее тело.

Кинетическая энергия материальной точки или тела, движущегося поступательно со скоростью υ определяется формулой $E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$, где m – масса тела, а υ - его линейная скорость.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела: $E_K = \frac{I\omega^2}{2}$,

где I – момент инерции тела относительно оси вращения;

ω - угловая скорость вращения тела.

Следует помнить, что кинетическая энергия

- всегда положительна;
- зависит от выбора инерциальной системы отсчетов.

2.4 **Потенциальной энергией** называется часть механической энергии, зависящая от конфигурации системы, т.е. от взаимного расположения ее частей и их положения во внешнем силовом поле. Потенциальная энергия зависит от относительного расположения взаимодействующих тел (или их частей) и относится ко всей совокупности взаимодействующих объектов. Поэтому ее называют взаимной потенциальной энергией или энергией какого – либо взаимодействия (например, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия, потенциальная энергия упругого взаимодействия и т.д.). Когда говорят о потенциальной энергии одного тела, всегда имеют в виду другие тела, с которыми оно находится во взаимодействии.

2.4.1 **Потенциальной энергия тела, поднятого над поверхностью Земли.** Если высота тела над Землей h мала ($h \ll R_{ЗЕМЛИ}$, где $R_З$= 6370 км.), то энергию взаимодействия тела с Землей можно определить по формуле: $E_П = mgh$, где m – масса тела, а g – ускорение свободного падения. Величина h зависит от того, какой уровень поверхности был выбран за нулевой. Например, если тело лежит на столе, то его потенциальную энергию можно считать от поверхности стола, от поверхности пола, от поверхности Земли, и т.д. При решении задач за нулевой уровень обычно принимают уровень наинизшего положения тела.

2.4.2 **Потенциальная энергия упруго деформированного тела** пропорциональна квадрату деформации. Различают несколько видов деформации:

а) при растяжении (сжатии) пружины: $П = \frac{1}{2}kx^2$,

где $x = \ell - \ell_0$ - удлинение пружины;

k – коэффициент пропорциональности.

б) при кручении стержня $П = \frac{1}{2}Д\varphi^2$,

где φ - угол поворота стержня вокруг оси кручения;

Д – коэффициент (модуль кручения), характеризующий упругие свойства стержня.

2.5 **Закон сохранения энергии** утверждает, что энергия не может исчезнуть или появиться ниоткуда. Энергия может переходит из одной формы в другую, но общее её количество сохраняется. Механическая энергия сохраняется только в том случае, если в процессе отсутствуют (или их можно не учитывать) так называемые диссипативные силы (силы трения, сопротивления и т.д.).

Литература:

1. СавельевИ.В, Курс общей физики. Т.1 Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1986г.
2. А.С. Шубин “Курс общей физики”,
3. Р.И. Грабовский “Курс общей физики
4. Б.М.Яворский, А.А.Детлаф “Справочник по физике”, 1977
5. Е.И.Бутиков, А.А.Быков, А.С.Кондратьев “Физика”, 1982
6. А.В.Кортнев “Практикум по физике”,
7. Зисман Г.А. Тодес О.М. Курс общей физики, т.1. М.: 1969г.

Лабораторная работа

Изучение законов вращательного движения твёрдого тела.

Описание целей работы.

Конкретная цель	Критерий достижения цели
Изучение теоретических вопросов	
1.Основные сведения по кинематике вращательного движения.	Студент должен владеть (т.е. сформулировать определение и привести пример.) понятиями: твердое тело, поступательное движение, вращательное движение, угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение и указать связь между линейными и угловыми величинами.
2. Основные сведения по динамике вращательного движения.	Студент должен: - владеть понятиями момент силы, момент инерции тела; - знать формулировку основного закона динамики вращательного движения твердого тела.
3. Теория метода измерений.	Студент должен знать и уметь объяснить по своему конспекту теорию метода.
Практические навыки.	
Студент должен научиться: а) правильно измерять время t, расстояние h, радиус шкива R и их абсолютные погрешности; б) рассчитывать погрешность измерения.	

Оборудование: маятник Обербека, секундомер, набор грузов, линейка.

штангенциркуль.

<u>Основной закон динамики вращательного движения твердого тела</u> имеет вид $\vec{M}=I\times\vec{\varepsilon}$ или $\vec{\varepsilon}=\dfrac{\vec{M}}{\vec{I}}$ (1)

где $\overrightarrow{M}$ – вращающий момент, действующий на тело;

I – момент инерции тела;

$\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, полученное телом под действием момента $\vec{M}$.

Целью данной работы является экспериментальная проверка уравнения (1)

1.3. **Описание установки и теория измерений**.

1.3.1. Законы вращательного движения можно изучать при помощи прибора (маятник Обербека), изображенного на рис.1.
Он состоит из двух шкивов различного радиуса и четырех одинаковых стержней, укрепленных на одном валу. Стержни укреплены под углом 90 ^{0} друг к другу. На каждом стержне находятся одинаковые цилиндры, которые могут перемещаться вдоль стержня. При выполнении работы цилиндры нужно закрепить на одинаковых расстояниях от оси вращения. При этом их общий центр тяжести совпадает с осью вращения.
1.3.2. При выполнении работы на один из шкивов маятника наматывают нить, к концу которой подвязывают груз с известной массой m. Под действием груза маятник приводится во вращение. Силой, приводящей во вращение маятник, является сила натяжения нити T (см. рис.2), а её момент, вызывающий вращение вала равен: M=TR, где R-радиус шкива.

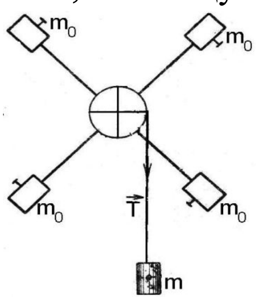


Рис.1.

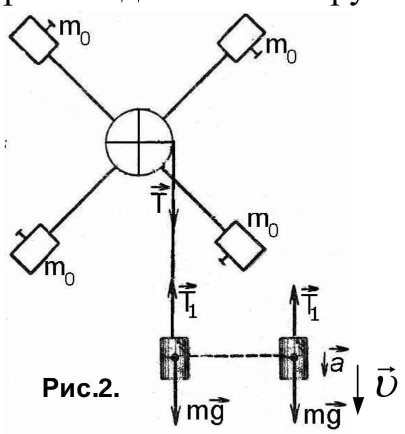


Рис.2.

В данной работе радиус шкива мы можем измерить штангенциркулем. Для определения натяжения нити T, составим уравнение движения груза m. На нее действуют две силы: сила натяжения нити T_1 и сила тяжести m$\vec{g}$. При этом она движется вниз с ускорением $\vec{a}$.

По второму закону динамики имеем:
$mg - T_1 = ma$, откуда $T_1 = m(g - a)$,
где g = 9,8 м/с^2. Если пренебречь массой нити, то сила T_1=T

$$T = m(g - a); \qquad M = Rm(g - a) \qquad (1)$$

Чтобы найти ускорение a груза m, определим время t, за которое он опустится на некоторое расстояние h от начального положения.

Тогда $h = \frac{at^2}{2}$, откуда $a = \frac{2h}{t^2}$ (2)

Так как нить при сматывании со шкива не растягивается, ускорение нити будет равно тангенциальному ускорению точек поверхности шкива, откуда

$$\varepsilon = a\ /R. \tag{3}$$

1.3.3. Если во время опытов, положение цилиндров на стержнях маятника не изменится, то момент инерции маятника также не изменится: I = const .

Мы можем изменить вращающий момент, изменяя массу груза m и радиус шкива R. Однако, по основному закону вращательного движения, отношение момента силы, действующего на маятник со стороны нити, к получаемому маятником угловому ускорению должно оставаться неизменным:

$$\frac{M}{\varepsilon} = I = const. \tag{4}$$

Выполнение этого соотношения является подтверждением основного закона динамики. Подставим значения (1), (2), (3) в (4) получим:

$$\frac{M}{\varepsilon} = I = \frac{m\ R^2 t^2 (g - \frac{2h}{t^2})}{2h}. \tag{5}$$

Выполнение измерений и их обработка.

Приступая к выполнению работы, ознакомьтесь с установкой и порядком выполнения работы.

Работу выполняйте в следующем порядке:

1. Укрепите цилиндры на стержнях маятника в самом крайнем положении.
2. Измерьте с помощью штангенциркуля диаметр большого шкива R несколько раз в разных сечениях.

Определите среднее значение R и погрешность ΔR .

$$\langle R \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} R_i = \frac{\text{сумма всех результатов измерений } R}{\text{число измерений } n}$$

Например: при измерении радиуса получены значения:

R=10,5 мм; 9,8 мм; 10,3 мм; 11,0 мм; 10,1 мм; 10,7 мм.

$$\langle R \rangle = \frac{10,5 + 9,8 + 10,3 + 11,0 + 10,1 + 10,7}{6} = 10,4 \text{ мм}$$

Абсолютные погрешности каждого измерения

$\Delta R_i = \langle R \rangle - R_i$, т.е.

ΔR_1= 10,4 - 10,5 = - 0,1 мм

ΔR_2 = 10,4 - 9,8 = 0,6 мм

ΔR_3 = 10,4 - 10,3 = 0,1 мм

ΔR_4 = 10,4 - 11,0 = - 0,6 мм

ΔR_5 = 10,4 - 10,1 = 0,3 мм

ΔR_6 = 10,4 - 10,7 = - 0,3 мм

Средняя погрешность измерения радиуса шкива равна

$$<\Delta R>=\frac{\textit{сумма модулей всех абсолютных погрешностей } \Delta R_i}{\textit{число измерений } n}=\frac{\sum|\Delta R_i|}{n}$$

$$<\Delta R>=\frac{0{,}1+0{,}6+0{,}1+0{,}6+0{,}3+0{,}3}{6}=0{,}3 \text{ мм}$$

За радиус шкива примем среднее значение <R>, за погрешность – среднее значение погрешности. Таким образом, имеем:

Радиус шкива равен (10,4 ±0,3)мм

Измерьте аналогично радиус малого шкива и определите погрешность его измерения.

3. Определите массу m груза и ее погрешность (взвешиванием).

4. Намотайте на шкив с радиусом R нить, на конце которой прикреплен груз m так, чтобы он находился чуть ниже цилиндров маятника. Отметьте начальное положение груза по линейке, укрепленной на стене.

P.S! Глаза наблюдателя должны при этом находиться на уровне груза.

5. Расстояние h отсчитайте по линейке вниз и запомните деление или сделайте отметку мелом.

6. Измерьте время, за которое груз m опустится на расстояние h.

При этом:

- секундомер нужно включить одновременно с началом движения гирьки m;
- секундомер нужно выключить в тот момент, когда груз будет проходить мимо отметки на линейке.

Так как время, отмеренное таким образом, всегда имеет погрешность, надо повторить опыт несколько раз (не менее трех) и найти среднее значение времени и его погрешность.

7. Подставьте значения m, h, t в (5) и рассчитайте момент инерции маятника.

8. Измените массу груза m и повторите измерения (п.п. 4-6).

9. Намотайте нить на другой шкив и повторите измерения с разными грузами m.

Все значения занесите в таблицу 1.

Таблица 1

$R_{шкива}$, м	ΔR, м	m, кг	Δm, кг	h, м	Δh, м	t, сек	Δt, сек	a, м/с^2	M, н·м	I, кг·м^2

Сравните полученные значения I и сделайте вывод.

10. Укрепите цилиндры на стержнях маятника в другом (но также симметричном положении) и проделайте аналогичные измерения.

Контрольные вопросы

1. В каких случаях тело можно принять за материальную точку? Твердое тело? Приведите примеры.
2. В каком случае движение тела можно считать поступательным? Вращательным? Какие еще виды движения Вы знаете? Приведите примеры.
3. Какими величинами пользуются для характеристики изменения движения при поступательном движении? Вращательном движении? Сформулируйте их определения.
4. Сформулируйте определение понятий: сила, момент силы. В чем состоит их сходство и различие? Приведите примеры.
5. Сформулируйте определение понятий: масса, момент инерции. Как определяются их величины?
6. Укажите, от чего зависит момент инерции тела при вращательном движении тела? Приведите примеры. Может ли одно и тоже тело иметь различные массы? Различные моменты инерции?
7. Сформулируйте основной закон динамики поступательного движения тела и основной закон динамики вращательного движения тела.
8. Объясните, в чем состоит проверка основного уравнения динамики вращательного движения тела в данной работе.
9. Как определяется вращающий момент в работе? Угловое ускорение? Момент инерции?
10. Как изменится время падения груза m, если момент инерции маятника увеличить? Уменьшить? Как это выполнить?
11. Какова должна быть размерность вашего результата.

Лабораторная работа
Определение момента инерции и проверка теоремы Штейнера методом крутильных колебаний

Описание целей работы

Конкретные цели	Критерий достижения цели
Изучение теоретических вопросов	
1. Момент инерции	1.Студент должен сформулировать определение понятий: момент инерции точки относительно оси, момент инерции тела и проиллюстрировать их на примерах.
2. Теорема Штейнера о переносе осей.	2. Студент должен сформулировать теорему Штейнера и объяснить, как она используется в данной работе.
3. Закон сохранения энергии	3. Студент должен назвать виды энергии, их расчетные формулы и условия сохранения энергии.
Практические навыки	
Студент должен научиться: - определять период крутильных колебаний; - определять момент инерции тела.	

Приборы и оборудование: трифилярный подвес, секундомер, набор грузов, штангенциркуль.

1. Описание установки

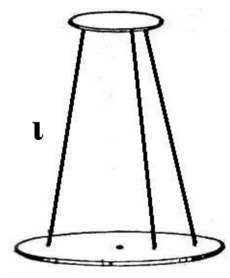


Рис.1.

В данной работе предлагается проверить теорему Штейнера, определяя моменты инерции тел методом крутильных колебаний трифилярного подвеса (рис.1).

Трифилярный подвес (рис.1) состоит из круглой платформы, подвешенной на трех нитях, симметрично расположенных относительно оси симметрии платформы. Наверху эти нити также симметрично прикреплены к неподвижной платформе, радиус которой меньше, чем у нижней подвижной платформы. При закручивании нижней платформы относительно оси симметрии происходит её перемещение вверх, т.е. ее центр тяжести поднимается по оси вращения. При этом возникает момент сил, стремящийся вернуть платформу в исходное положение равновесия. Опускаясь и раскручиваясь в обратном направлении, платформа приобретает кинетическую энергию вращательного движения. Вследствие этого, в положении равновесия она не остановится и продолжает раскручиваться в другом направлении, что и приводит к периодическому движению: центр тяжести периодически смещается вверх-вниз, а сама платформа в то же время совершает крутильные колебания. Период таких колебаний определяется величиной момента инерции платформы и тел, помещенных на ней. Это позволяет, определив период колебаний трифилярного подвеса, вычислить моменты инерции тел, помещенных на нижнюю платформу.

2. Вывод формулы периода крутильных колебаний.

Пусть платформа массы m, вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту h. При этом увеличивается потенциальная энергия платформы, приращение которой обозначим U=mgh . Вращаясь в обратном направлении, платформа возвращается в положение равновесия с кинетической энергией $T = \frac{1}{2} I\omega_0^2$, где I - момент инерции платформы, ω_0- угловая скорость вращения платформы в момент достижения ею положения равновесия, т.е. в самой нижней точке движения. Если пренебречь силами трения в подвесе и сопротивлением воздуха (они малы), то можно применить закон сохранения механической энергии. В произвольный момент движения, полная энергия платформы E складывается из её потенциальной и кинетической:

$$E = U + T = Mgh + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (1)$$

Здесь E - полная энергия системы, M - полная масса нагруженной платформы, I – её момент инерции, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ - угловая скорость вращения. В уравнении (1) величина h - высота поднятия центра тяжести платформы - может быть выражена через угол поворота платформы φ, что позволит упростить уравнение закона сохранения энергии.

Для этого рассмотрим геометрические соотношения для данной платформы (рис.2).

Пусть R_1 - радиус верхней платформы, а R_2 - нижней платформы соответственно. Тогда высота, на которую поднимается платформа, будет равна:

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC - BC_1)(BC + BC_1)}{BC + BC_1} = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1} \quad (2)$$

Так как длина нити подвеса равна ℓ, то

$$(BC)^2=(BA)^2-(CA)^2= \ell^2 -(R_2-R_{!})^2 \quad (3)$$

А величина $(BC_1)^2=(BA_1)^2-(A_1C_1)^2= \ell^2 - (R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\varphi)$, (4) где φ - угол, на который поворачивается платформа.

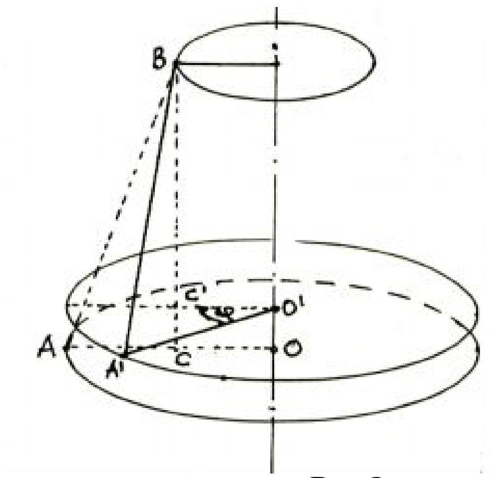


Рис.2.

Таким образом, из уравнений (2), (3), (4) получим:

$$h = \frac{2R_1R_2(1-\cos\varphi)}{BC + BC_1} = \frac{4R_1R_2 \sin\frac{\varphi}{2}}{BC + BC_1}$$

Если учесть, что углы поворота платформы должны быть малы, (не более 5^0), то при малых φ значение функции sinφ можно заменить на значение угла φ

$$\sin\frac{\varphi}{2} \to \frac{\varphi}{2}$$

В знаменателе $BC + BC_1 \approx 2\ell$. Таким образом, для h имеем:

$$h = \frac{R_1R_2\varphi^2}{2\ell} \quad (5)$$

Это позволяет в выражении (1), для закона сохранения энергии произвести замену:

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Mg\frac{R_1R_2\varphi^2}{2\ell} = E$$

(6)

Учитывая, что полная энергия системы сохраняется, т.е. не меняется во времени, продифференцируем это уравнение по времени:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Mg\frac{R_1R_2}{\ell}\varphi = 0$$

(7)

Последнее уравнение имеет вид: $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, причем $\omega^2 = \frac{MgR_1R_2}{I\ell}$ (8)

Если уравнение движения тела имеет вид $\varphi''+\omega^2\varphi = 0$, то это означает, что оно совершает гармонические колебания с круговой частотой ω. Такое уравнение имеет решение $\varphi = \varphi_{\max}\sin\omega t = \varphi_{\max}\sin\frac{2\pi t}{T}$ (9),

где

φ_{max} – амплитудное значение угла φ.

В данном случае $\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{MgR_1R_2}{I\ell}$, откуда получим выражение для периода колебаний платформы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I\ell}{MgR_1R_2}} \qquad (10)$$

Таким образом, экспериментально измеряя период колебаний платформы и все остальные необходимые параметры, можем определить момент инерции платформы:

$$I = \frac{MgR_1R_2T^2}{4\pi^2\ell} \qquad (11)$$

Для данного Вам прибора геометрические параметры известны:

R_1= (70±1)мм, R_2= (80±1)мм, ℓ = (76±0,5)мм.

Масса пустой платформы M = (150±1)г.

Полученная нами формула (11) справедлива при полном отсутствии потерь энергии в системе. Чтобы убедиться в выполнении этого условия, надо измерить время τ, в течение которого амплитуда колебаний платформы уменьшается в два раза. Если $\tau \gg T$, то потери энергии на трение невелики и ими можно пренебречь.

3. Порядок выполнения работы

1. Получив допуск к работе, приведите нижнюю платформу в колебательное движение (с помощью рычага на верхней платформе).

   PS! Возвратно – поступательное движение платформы должно отсутствовать (т.е. ось вращения должна быть неподвижна).

2. Измерьте период колебаний пустой платформы. Для этого:

- измерьте несколько раз время t, за которое платформа совершит *n* полных колебаний ($n \approx 20$) и найдите среднее значение времени <t>;
- найдите среднюю погрешность измерения времени <Δt>;
- определите период колебаний $T = \frac{\langle t\rangle}{n}$;
- определите погрешность определения периода $\Delta T = \frac{\langle \Delta t\rangle}{n}$.

3. Убедитесь, что закон сохранения энергии выполняется в данном случае. Для этого определите время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшится вдвое. Если $\tau \gg T$, то работу можно продолжать.

4. Используя полученное значение периода колебаний пустой платформы вычислите по формуле (11) момент инерции пустой платформы $I_{пп}$ и погрешность её измерения $\Delta I_{пп}$.

5. Расположите оба груза (цилиндры) в центре платформы так, чтобы их ось симметрии совпадала с осью вращения платформы, и определите (см.п.2) период колебаний платформы с грузами.

6. Вычислите момент инерции платформы с двумя грузами $I_{пгр}$. Так как момент инерции (как и масса) величина аддитивная, то должно выполняться соотношение: $I_{пгр} = I_{пп} + 2 I_0$, (*)

где I_0 – момент инерции одного груза относительно оси, проходящей через центр груза.

Из соотношения (*) вычислите I_0.

7. Расположите оба груза ближе к краям платформы, но симметрично относительно оси вращения платформы. Определите расстояние от оси вращения платформы до центра грузов a. Определите период колебаний платформы и погрешность этого измерения.

8. Вычислите момент инерции платформы с грузами, расположенными на расстоянии a от оси вращения I' по формуле (11).

9. Так как $I' = I_{пп} + 2I$, где I – момент инерции одного цилиндра относительно оси вращения платформы, найдите I.

10. Согласно теореме Штейнера $I = I_0 + m\cdot a^2$, где m – масса грузов. Проверьте это соотношение. Определите погрешность, с которой выполняется это соотношение.

11. Момент инерции цилиндра относительно его оси можно рассчитать по формуле $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$, где r-радиус цилиндра. Сравните рассчитанное значение I_0 с полученным Вами экспериментально.

Таблица

№п/п	n	m, кг	t,сек	T, сек	I, $\frac{нсек}{м}$	$I_{ср}$, $\frac{нсек}{м}$	ΔI, $\frac{нсек}{м}$	$\Delta I_{ср}$, $\frac{нсек}{м}$	σ,%

Контрольные вопросы

1. От чего зависит момент инерции тела? Приведите примеры.
2. Что происходит с моментом инерции тела, если оно удаляется от оси вращения? Приближается к ней?
3. В каких случаях момент инерции тела равен нулю? Приведите примеры. Как оно может двигаться в этом случае?
4. Сформулируйте теорему Штейнера и укажите:
   - условия, при которых она выполняется;
   - смысл величин, входящих в формулу.
5. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. При каких

   условиях от может быть применен? Приведите примеры.
6. Объясните (можно по конспекту) вывод формулы для периода крутильных колебаний платформы.
7. Объясните цель работы и ход её выполнения.

Лабораторная работа

Определение скорости пули с помощью крутильно-баллистического маятника.

Описание целей работы

Конкретная цель	Критерии достижения целей
I.Изучение теории	
1. Основные понятия кинематики и динамики вращательного движения твердого тела	Студент правильно отвечает на вопросы № 1-3
2. Законы сохранения в механике	Студент должен указать, какие величины сохраняются в данной задаче и при каких условиях.
3. Теория метода	Студент (по конспекту) может объяснить ход решения
Практические навыки	
Студент должен научиться: 1. Определять угол отклонения маятника. 2. Определять период крутильных колебаний.	

Оборудование: лабораторная установка «Крутильно-баллистический маятник », линейка, секундомер.

Описание установки

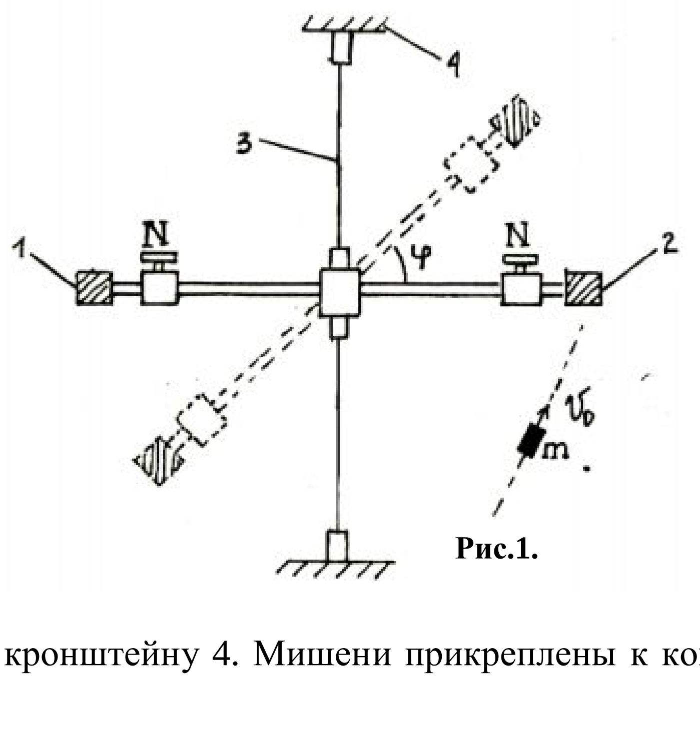


Рис.1.

Крутильно-баллистический маятник представляет собой массивное тело со значительным моментом инерции I, подвешенное на упругой нити. В настоящей работе крутильно-баллистический маятник выполнен в виде крестовины с двумя передвигающимися грузами N одинаковой массы m_0, двумя мишенями 1 и 2 и подвесом 3 (рис.1).

Крестовина подвешена на стальной проволоке к кронштейну 4. Мишени прикреплены к концам горизонтальных стержней наглухо и имеют пластилиновые прокладки для задержания пули. Угол отклонения маятника при попадании пули в мишень отсчитывается по шкале, нанесенной на прозрачный цилиндр из оргстекла. В результате удара пули в мишень маятник начинает закручиваться. В момент удара момент импульса пули передается маятнику с застрявшей в нем пулей. На основании закона сохранения момента импульса, можно записать:

$$m\upsilon\ell = \left(I + I_n\right)\omega ,$$

где m - масса пули,

υ- скорость пули,

ℓ - прицельное расстояние (расстояние от точки удара пули до оси вращения мятника),

I - момент инерции маятника,

I_n - момент инерции пули,

ω - угловая скорость маятника, полученная при ударе.

Так как $I_n \ll I$, то

$$\upsilon = \frac{I\omega}{m\ell} \qquad (1)$$

Величины m и ℓ могут быть непосредственно измерены. Поэтому для определения скорости пули υ нужно найти момент инерции I и начальную угловую скорость ω маятника. Для этого воспользуемся законом сохранения механической энергии и основным законом динамики вращательного движения. При закручивании маятника его кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию закручивающейся нити. По закону сохранения энергии, (пренебрегая потерями на трение) получаем

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{Д\varphi_m^2}{2} \qquad (2)$$

где φ_m - максимальный угол поворота маятника,

Д - постоянная момента упругих сил (модуль кручения) нити подвеса.

Из уравнения (1) и (2) получаем

$$\upsilon^2 = \frac{Д\varphi_m^2 I}{m^2\ell^2} \; \upsilon = \frac{\varphi_m\sqrt{ДI}}{m\ell} \qquad (3)$$

Чем больше закручивается нить, тем больше её деформация и тем больше момент упругих сил нити М, тормозящий маятник. Согласно закону Гука упругий момент М нити пропорционален углу поворота φ маятника

$$M = -Д\varphi \qquad (4)$$

Знак минус означает, что упругий момент нити направлен в сторону, противоположную направлению отклонения маятника.

Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид

M= Iε , где $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение. (5)

Подставив (4) в (5) получим:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Д\varphi = 0 \qquad (6)$$

Функция $\varphi = A\cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{Д / I}$ является решением уравнения (6) в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Полученное решение означает, что маятник будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Д}} \qquad (7)$$

Из уравнения (3) и (7) получим

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi_m I}{m\ell T} \qquad (8)$$

Для нахождения момента инерции маятника I (грузы расположены на расстоянии R от оси вращения) поступим следующим образом. Изменим момент инерции маятника, установив грузы в другое положение (на расстоянии R_2 от оси вращения) . Тогда

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{Д}} \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{Д}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$I - I_2 = \Delta I \qquad (10)$$

где T_2 - период колебаний при новом значении момента инерции I_2 ,

ΔI - разность моментов инерции.

Уравнения (9) дают

$$\frac{I}{I_2} = \frac{T^2}{T_2^2} \qquad (11)$$

Из уравнений (10) и (11), исключая I_2 , находим

$$I = \frac{T_1^2 \Delta I}{T^2 - T_2^2} \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (8), получим

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi_m T^2 \Delta I}{m\ell\left(T^2 - T_2\right)} \tag{13}$$

Величину ΔI можно определить, пользуясь теоремой Штейнера. Из этой теоремы следует, что

$$I = I_0 + 2m_0\ R^2 \tag{14}$$

$$I_2 = I_0 + 2m_0\ R_2^2 \tag{15}$$

где I_0 - момент инерции маятника, в случае, когда центры тяжести грузов N (рис.1) совпадают с осью вращения маятника, I- момент инерции маятника, когда оба груза находятся на расстоянии R от оси вращения, I_2 - момент инерции, когда оба груза находятся на расстоянии R_2, m_0 - масса одного груза.

Пусть $R > R_2$, тогда из уравнений (14) и (15) получаем

$$I - I_2 = \Delta I = 2m_0\left(R^2 - R_2^2\right) \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13) получим окончательное выражение для скорости пули

$$\upsilon = \frac{4\pi\varphi_m m_0 T}{m\ell\left(T^2 - T_2^2\right)}\left(R^2 - R_2^2\right) \tag{17}$$

Измерения

1. Начните с того, что оба груза N на стержне установите в положение максимального удаления от оси маятника (грузы должны быть равноудалены). Линейкой измерьте величину R - расстояние между осью маятника и серединой одного из грузов.
2. Затем расположите маятник так, чтобы черта на боковой стороне одной из мишеней совпадала с нулевым делением шкалы отсчета углов поворота. Это достигается вращением головки верхнего крепления подвеса.
3. Нажмите кнопку «сброс»: Секундомер и счетчик числа колебаний показывают нули и готовы к работе. После этого производят «выстрел» и отсчитывают угол φ_m наибольшего отклонения маятника от положения равновесия.
4. Для измерения периода колебаний T , не останавливая маятник (секундомер уже запущен), через девять полных колебаний нажимают кнопку «стоп». В этом случае секундомер остановится после десятого

колебания и покажет время десяти (n =10) полных колебаний. Период колебаний T, вычисляют по формуле $T = \frac{t}{n}$, где t - время, за которое совершено n полных колебаний. Затем останавливают маятник и измеряют величину ℓ- расстояние между осью маятника и точкой попадания пули.

5. Измерение угла отклонения φ_m, периода колебаний T и расстояние ℓ повторяют в серии из четырех «выстрелов» и определяют средние арифметические значения этих величин.

6. Передвигают оба груза N в другое положение на стержне (как можно ближе к оси маятника) и измеряют величину R_2 - расстояние между осью маятника и серединой одного из грузов.

7. Определения периода колебаний T_2 производят так же, как и периода T (измерять угол отклонения φ_m в этом случае не следует). Период колебаний T_2 измеряют не менее четырех раз и находят его среднее арифметическое значение.

Таблица

R,м	φ_m, рад	t, с	n	T	ℓ м	R_2, м	t, с	n	T_2	m, кг	m_0, кг	υ, м/с	$\upsilon_{ср}$ м/с	$\Delta\upsilon$, м/с	$\Delta\upsilon_{ср}$, м/с	σ %

Примечание: в формуле (17) угол φ_m должен быть выражен в радианах $\varphi_m(рад) = \frac{\pi\varphi^0}{180^0}$, $\Delta\varphi_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{mi} - \overline{\varphi_m}\right|}{n}$.

Используя соотношение (17), определяют скорость пули и оценивают точность ее измерения.

Окончательный результат записывают в виде $\upsilon = (\upsilon \pm \Delta\upsilon)$, м/с.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение и укажите единицы измерения следующих физических величин, используемых для описания вращательного движения твердого тела:
   - угловая скорость;
   - угловое ускорение;
   - момент сил;
   - момент инерции;
   - импульс тела;
   - момент импульса.
2. Как определяется направление перечисленных величин?
3. Из чего складывается момент инерции маятника? Как меняется момент инерции маятника при перемещении грузов от оси маятника к краям крестовины? При обратном перемещении?
4. Почему при ударе пули о мишень мы используем закон сохранения момента импульса, а не закон сохранения импульса?
5. Напишите выражение для основного уравнения вращательного движения твердого тела и укажите смысл входящих в него величин. Объясните применение этого закона в вашей задаче.
6. Перечислите законы сохранения используемые в задаче. При каких условиях они применимы? Выполняются ли эти условия в работе?

Лабораторная работа

Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика

Конкретная цель	Критерии достижения цели
I. Изучение теории	
1. Основные сведения о механической энергии. 2. Основные сведения о механических колебаниях. 3. Теория метода	Студент правильно отвечает на вопросы № 1 - 4 Студент правильно отвечает на вопросы № 5 - 10 Студент может объяснить решение задачи и ответить на вопросы № 11 - 14
II. Практические навыки	
Студент должен научиться: - определять период малых колебаний шарика; - измерять радиусы шариков; - определять радиус кривизны поверхности и погрешность его определения.	

Описание целей работы

Оборудование: вогнутая сферическая поверхность, шарики, секундомер, штангенциркуль.

1.1 **Механическими колебаниями** называют движения, обладающие той или иной степенью повторяемости. Например, колебания маятника часов, груза на пружине, качелей, поплавка на воде и др.

Периодом колебаний Т называется время, за которое совершается одно полное колебание. Величина, обратная периоду, $\nu = \frac{1}{T}$ называется **частотой колебаний.** Она показывает, сколько колебаний совершает тело за единицу времени. Частота измеряется в герцах (1 Гц = 1$с^{-1}$).

Для математического описания колебаний используются периодические функции sin и cos. Наиболее простой вид имеют зависимости:

$x(t) = x_{max} \cos\varphi(t)$ или $x(t) = x_{max} \sin\varphi(t)$, (1)

Рис.1.

где x(t) – координата точки в произвольный момент времени t, причем ось x выбирается вдоль траектории колеблющейся точки, а начало оси – в положении равновесия точки (рис.1). x_{max} – амплитуда колебаний – модуль максимального отклонения точки от положения равновесия. Вместо x_{max} можно использовать любую букву. φ(t) – фаза колебаний: $\varphi(t) = \omega t + \varphi_o$,

где величина $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ называется **круговой** (или циклической) **частотой**. Она измеряется в $с^{-1}$.

Величина φ_o– начальная фаза колебаний. Она равна фазе колебаний в начальный момент времени, т.е. $\varphi_o = \varphi(t = 0)$.

1.2 Колебательное движение происходит с переменными скоростью и ускорением.

Если $x(t) = x_{мах} \cos(\omega t + \varphi_0)$

То скорость

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -x_{\max}\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -\upsilon_{\text{мах}} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $x_{\max}\omega = \upsilon_{\max}$ – амплитуда изменений скорости. Мы видим, что наибольшую скорость колеблющаяся точка имеет в положении равновесия, а в крайних точках (при $x = \pm x_{мах}$) скорость точки равна нулю.

Ускорение колеблющейся точки:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_{\max}\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -a_{мах} cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $x_{\max}\omega^2 = a_{\max}$ – амплитуда изменений ускорения точки. Наибольшее ускорение точка будет иметь в крайних положениях. В положении равновесия ускорение точки равно нулю.

Колебания, совершающиеся в соответствии с законом (1) называются **гармоническими.**

1.3 Полная энергия колеблющейся точки складывается из кинетической и потенциальной энергий. В соответствии с законом сохранения полной энергии имеем:

$$E_{ПОЛН} = E_К + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П = \frac{m\upsilon_{MAX}^2}{2} = E_{П\ MAX}$$

В крайних положениях кинетическая энергия равна нулю (т.к. υ = 0), в положении равновесия нулевое значение имеет потенциальная энергия.

Т.к. при гармонических колебаниях

$$x_{\max}\,\omega = \upsilon_{\max} \quad \text{,то } E_{ПОЛН} = \frac{m}{2}\left(x_{мах}\omega\right)^2 = \frac{m\omega^2 x_{мах}^2}{2} \sim x_{мах}^2,$$

т.е. полная энергия точки при гармонических колебаниях пропорциональна квадрату амплитуды.

Теория метода

В данной работе предлагается определить радиус кривизны сферической поверхности методом катающегося шарика. Если шар поместить на вогнутую поверхность, то равновесным для него является положение, при котором его центр тяжести находится в низшей точке поверхности (точка С на рис.2)

Если шар вывести из положения равновесия и предоставить ему возможность свободно кататься по вогнутой поверхности, то он будет совершать колебания около положения равновесия. Покажем, что в отсутствии трения, движение шарика представляет собой гармоническое колебание.

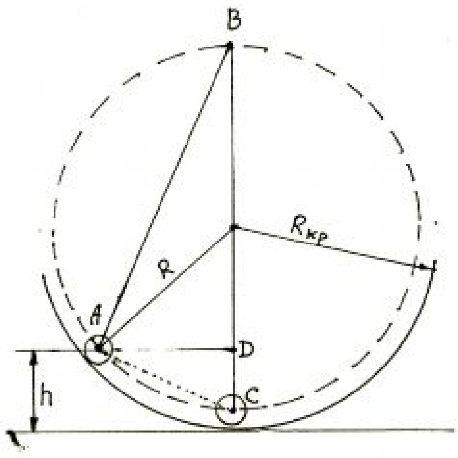


Рис.2.

Шарик массой m, поднятый на высоту h относительно положения устойчивого равновесия, обладает потенциальной энергией $E_П$=mgh. Расстояние АС, на которое перемещается центр шара в обе стороны от положения равновесия, соответствует амплитуде колебаний. <u>Если амплитуда колебаний *a* мала</u>, то дуга АС, хорда АС и амплитуда колебаний шарика практически равны между собой. Из подобия ΔАВС и ΔАСД получим

$$AC^2 = CД \times CB. \qquad (*)$$

Учитывая, что АС= *a*, СД=h и СВ=2R (рис.2), перепишем (*) в виде a^2=2Rh, где R – расстояние от центра кривизны вогнутой поверхности до центра шарика. Отсюда $h = \dfrac{a^2}{2R}$.

Тогда потенциальная энергия шарика в точке А равна

$$E_П = mgh = \frac{mg}{2R}a^2 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) видно, что потенциальная энергия $E_П$ в конечной точке движения пропорциональна квадрату амплитуды *a*, что характерно для гармонических колебаний. Следовательно, колебания шарика на вогнутой поверхности при малых амплитудах можно считать гармоническими, т.е. совершающимися по закону S = $a \cdot \cos\omega_0 t$, где ω_0- циклическая частота колебаний шарика.

Если пренебречь трением, (оно мало), то должен выполняться закон сохранения энергии. Это значит, что при движении шарика из точки А в точку С потенциальная энергия (в т.А) полностью переходит в кинетическую (в т.С)

$E_П$ (в т.А)=$E_К$(в т.С) Кинетическая энергия в точке С складывается из кинетической энергии поступательного движения центра тяжести $E_{Кпост}$ и кинетической энергии вращательного движения шарика вокруг его центра $E_{К\ вращ}$;

Кинетическая энергия поступательного движения в т.С равна

$$E_{К\ пост} = \frac{m\upsilon_{мах}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \qquad (4)$$

где $\upsilon_{\max} = \omega_0 a = \frac{2\pi a}{T}$, а T – период колебаний шарика,

Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$E_{К\ вращ} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\times\left(\frac{2\pi a}{Tr}\right)^2 \qquad (5)$$

где $I = \frac{2}{5}mr^2$ -момент инерции шарика относительно его центра тяжести, r – радиус шарика, $\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{2\pi a}{Tr}$ - угловая скорость вращения шарика вокруг собственной оси в точке С. Подставляя выражения (2), (4), (5) в уравнение (3) получим

$$\frac{mga^2}{2R} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\times\left(\frac{2\pi a}{Tr}\right)^2$$

или $\frac{mga^2}{2R} = \frac{14}{5}\cdot\frac{m\pi^2 a^2}{T^2}$; $\frac{g}{2R} = \frac{14\pi^2}{5T^2}$

Отсюда $R = \frac{5gT^2}{28\pi^2}$. (6)

Если R – расстояние от центра кривизны вогнутой поверхности до центра шарика, r – радиус шарика, то радиус кривизны этой поверхности равен

$$R_{KP} = R + r \qquad (7).$$

Таким образом, измерив период колебаний T и радиус шарика r можно определить радиус кривизны сферической поверхности.

3. Измерения

1. Протрите чистой, сухой тряпкой вогнутую поверхность и шарики.
2. Выберите один из шариков и определите период его колебаний. Для этого, отклонив шарик из положения равновесия, измерьте время t, за которое шарик совершит n=10÷20 полных колебаний. Период $T = \dfrac{t}{n}$.
3. Повторите опыт не менее трех раз и определите среднее значение периода колебаний и среднюю погрешность его определения.

P.S! Амплитуда колебаний шарика должна быть очень небольшой

(малые колебания)

4. Вычислить значение R, подставив найденное значение периода колебаний T в формулу (6).
5. Измерьте микрометром (или штангенциркулем) радиус r шарика.
6. Найдите радиус кривизны вогнутой поверхности по формуле (7).
7. Возьмите другой шарик и повторите измерения п.п.2-6.
8. Сравните найденные значения радиуса кривизны поверхности и найдите его среднее значение.
9. Рассчитайте погрешности этих измерений.
10. Результаты измерений и расчетов внесите в таблицу.

Таблица

№ п/п	r, м	Δr,м	n	t,с	T,с	R,м	ΔR,м	R_{KP} ,м	ΔR_{KP} ,м

Контрольные вопросы:

1. Что в физике называется “энергией”? Какие виды энергии Вы знаете?
2. Что такое кинетическая энергия? Как вычисляют ее величину: для поступательного движения? для вращательного движения тела?
3. Что такое потенциальная энергия? В каких случаях потенциальную энергию тела, можно считать по формуле $E_П = mqh$?
4. Сформулируйте закон сохранения энергии. В каких случаях

сохраняется механическая энергия?

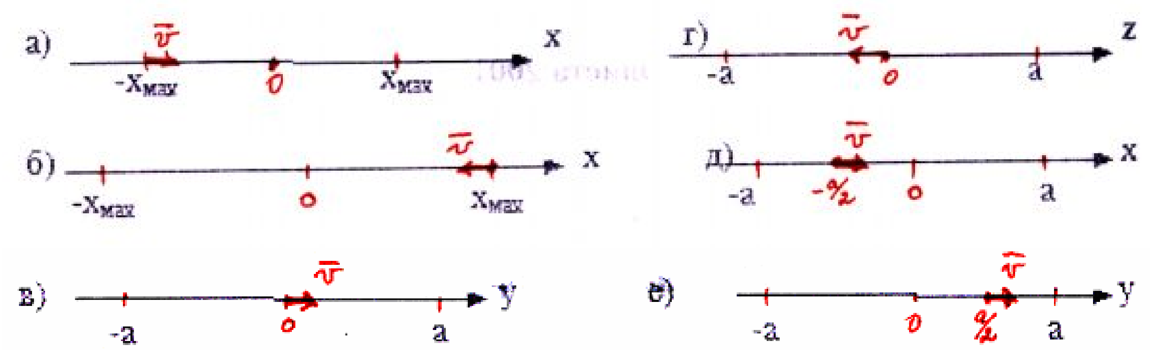
5. Дайте определение и приведите примеры механических колебаний.

6. Дайте определение понятий: период колебаний, частота колебаний, циклическая частота, амплитуда.

7. Как меняется положение колеблющегося тела со временем? Какие колебания называются гармоническими?

8. Каков математический смысл понятия «фаза»? Ее физический смысл?

9. Напишите зависимость x(t) для следующих случаев: (на рис. указаны положение тела и направление его движения при t=0)



10. Как определить скорость колеблющейся точки? Ее ускорение?

11. Объясните, почему шарик, вернувшись в положение равновесия, не останавливается?

12. Объясните, почему колебания шарика можно считать гармоническими только при малых амплитудах?

13. В каком случае потенциальная энергия шарика в верхнем положении полностью перейдет в кинетическую в его низшем положении?

14. Поясните, как вы нашли угловую скорость вращения шарика в его низшем положении? В каком случае она будет равна нулю?

15. Вы использовали два шарика разных радиусов. В каком случае Вы получили большую погрешность?