Лабораторная работа

Определение скорости пули с помощью крутильно-баллистического маятника.

Описание целей работы

Конкретная цель	Критерии достижения целей
I.Изучение теории	
1. Основные понятия кинематики и динамики вращательного движения твердого тела	Студент правильно отвечает на вопросы № 1-3
2. Законы сохранения в механике	Студент должен указать, какие величины сохраняются в данной задаче и при каких условиях.
3. Теория метода	Студент (по конспекту) может объяснить ход решения
Практические навыки	
Студент должен научиться: 1. Определять угол отклонения маятника. 2. Определять период крутильных колебаний.	

Оборудование: лабораторная установка «Крутильно-баллистический маятник », линейка, секундомер.

Описание установки

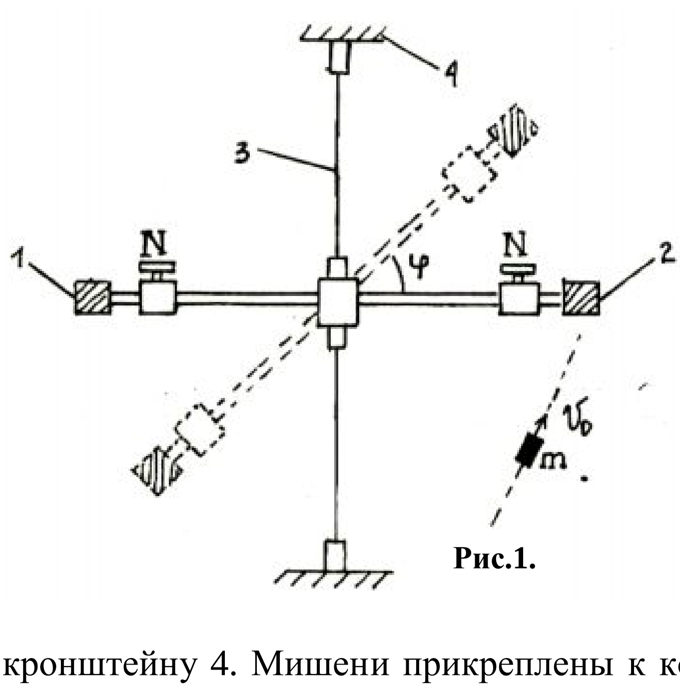


Рис.1.

Крутильно-баллистический маятник представляет собой массивное тело со значительным моментом инерции I, подвешенное на упругой нити. В настоящей работе крутильно-баллистический маятник выполнен в виде крестовины с двумя передвигающимися грузами N одинаковой массы m_0, двумя мишенями 1 и 2 и подвесом 3 (рис.1).

Крестовина подвешена на стальной проволоке к кронштейну 4. Мишени прикреплены к концам горизонтальных стержней наглухо и имеют пластилиновые прокладки для задержания пули. Угол отклонения маятника при попадании пули в мишень отсчитывается по шкале, нанесенной на прозрачный цилиндр из оргстекла. В результате удара пули в мишень маятник начинает закручиваться. В момент удара момент импульса пули передается маятнику с застрявшей в нем пулей. На основании закона сохранения момента импульса, можно записать:

$$m\upsilon\ell = \left(I + I_n\right)\omega ,$$

где m - масса пули,

υ- скорость пули,

ℓ - прицельное расстояние (расстояние от точки удара пули до оси вращения мятника),

I - момент инерции маятника,

I_n - момент инерции пули,

ω - угловая скорость маятника, полученная при ударе.

Так как $I_n \ll I$, то

$$\upsilon = \frac{I\omega}{m\ell} \qquad (1)$$

Величины m и ℓ могут быть непосредственно измерены. Поэтому для определения скорости пули υ нужно найти момент инерции I и начальную угловую скорость ω маятника. Для этого воспользуемся законом сохранения механической энергии и основным законом динамики вращательного движения. При закручивании маятника его кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию закручивающейся нити. По закону сохранения энергии, (пренебрегая потерями на трение) получаем

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{Д\varphi_m^2}{2} \qquad (2)$$

где φ_m - максимальный угол поворота маятника,

Д - постоянная момента упругих сил (модуль кручения) нити подвеса.

Из уравнения (1) и (2) получаем

$$\upsilon^2 = \frac{Д\varphi_m^2 I}{m^2\ell^2} \quad \upsilon = \frac{\varphi_m\sqrt{ДI}}{m\ell} \qquad (3)$$

Чем больше закручивается нить, тем больше её деформация и тем больше момент упругих сил нити М, тормозящий маятник. Согласно закону Гука упругий момент М нити пропорционален углу поворота φ маятника

$$M = -Д\varphi \qquad (4)$$

Знак минус означает, что упругий момент нити направлен в сторону, противоположную направлению отклонения маятника.

Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид

M= Iε , где $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение. (5)

Подставив (4) в (5) получим:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Д\varphi = 0 \qquad (6)$$

Функция $\varphi = A\cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{Д / I}$ является решением уравнения (6) в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Полученное решение означает, что маятник будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Д}} \qquad (7)$$

Из уравнения (3) и (7) получим

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi_m I}{m\ell T} \qquad (8)$$

Для нахождения момента инерции маятника I (грузы расположены на расстоянии R от оси вращения) поступим следующим образом. Изменим момент инерции маятника, установив грузы в другое положение (на расстоянии R_2 от оси вращения) . Тогда

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{I}{Д}} \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{Д}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$I - I_2 = \Delta I \qquad (10)$$

где T_2 - период колебаний при новом значении момента инерции I_2 ,

ΔI - разность моментов инерции.

Уравнения (9) дают

$$\frac{I}{I_2} = \frac{T^2}{T_2^2} \qquad (11)$$

Из уравнений (10) и (11), исключая I_2 , находим

$$I = \frac{T_1^2 \Delta I}{T^2 - T_2^2} \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (8), получим

$$\upsilon = \frac{2\pi\varphi_m T^2 \Delta I}{m\ell\left(T^2 - T_2\right)} \tag{13}$$

Величину ΔI можно определить, пользуясь теоремой Штейнера. Из этой теоремы следует, что

$$I = I_0 + 2m_0\, R^2 \tag{14}$$

$$I_2 = I_0 + 2m_0\, R_2^2 \tag{15}$$

где I_0 - момент инерции маятника, в случае, когда центры тяжести грузов N (рис.1) совпадают с осью вращения маятника, I- момент инерции маятника, когда оба груза находятся на расстоянии R от оси вращения, I_2 - момент инерции, когда оба груза находятся на расстоянии R_2 , m_0 - масса одного груза.

Пусть $R > R_2$, тогда из уравнений (14) и (15) получаем

$$I - I_2 = \Delta I = 2m_0\left(R^2 - R_2^2\right) \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13) получим окончательное выражение для скорости пули

$$\upsilon = \frac{4\pi\varphi_m m_0 T}{m\ell\left(T^2 - T_2^2\right)}\left(R^2 - R_2^2\right) \tag{17}$$

Измерения

1. Начните с того, что оба груза N на стержне установите в положение максимального удаления от оси маятника (грузы должны быть равноудалены). Линейкой измерьте величину R - расстояние между осью маятника и серединой одного из грузов.
2. Затем расположите маятник так, чтобы черта на боковой стороне одной из мишеней совпадала с нулевым делением шкалы отсчета углов поворота. Это достигается вращением головки верхнего крепления подвеса.
3. Нажмите кнопку «сброс»: Секундомер и счетчик числа колебаний показывают нули и готовы к работе. После этого производят «выстрел» и отсчитывают угол φ_m наибольшего отклонения маятника от положения равновесия.
4. Для измерения периода колебаний T , не останавливая маятник (секундомер уже запущен), через девять полных колебаний нажимают кнопку «стоп». В этом случае секундомер остановится после десятого

колебания и покажет время десяти (n =10) полных колебаний. Период колебаний T, вычисляют по формуле $T = \frac{t}{n}$, где t - время, за которое совершено n полных колебаний. Затем останавливают маятник и измеряют величину ℓ- расстояние между осью маятника и точкой попадания пули.

5. Измерение угла отклонения φ_m, периода колебаний T и расстояние ℓ повторяют в серии из четырех «выстрелов» и определяют средние арифметические значения этих величин.

6. Передвигают оба груза N в другое положение на стержне (как можно ближе к оси маятника) и измеряют величину R_2 - расстояние между осью маятника и серединой одного из грузов.

7. Определения периода колебаний T_2 производят так же, как и периода T (измерять угол отклонения φ_m в этом случае не следует). Период колебаний T_2 измеряют не менее четырех раз и находят его среднее арифметическое значение.

Таблица

R,м	φ_m, рад	t, с	n	T	ℓ м	R_2, м	t, с	n	T_2	m, кг	m_0, кг	υ, м/с	$υ_{ср}$ м/с	Δυ, м/с	$Δυ_{ср}$, м/с	σ %

Примечание: в формуле (17) угол φ_m должен быть выражен в радианах $\varphi_m(рад) = \frac{\pi\varphi^0}{180^0}$, $\Delta\varphi_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi_{mi} - \overline{\varphi_m}\right|}{n}$.

Используя соотношение (17), определяют скорость пули и оценивают точность ее измерения.

Окончательный результат записывают в виде υ = (υ ± Δυ), м/с.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение и укажите единицы измерения следующих физических величин, используемых для описания вращательного движения твердого тела:
   - угловая скорость;
   - угловое ускорение;
   - момент сил;
   - момент инерции;
   - импульс тела;
   - момент импульса.
2. Как определяется направление перечисленных величин?
3. Из чего складывается момент инерции маятника? Как меняется момент инерции маятника при перемещении грузов от оси маятника к краям крестовины? При обратном перемещении?
4. Почему при ударе пули о мишень мы используем закон сохранения момента импульса, а не закон сохранения импульса?
5. Напишите выражение для основного уравнения вращательного движения твердого тела и укажите смысл входящих в него величин. Объясните применение этого закона в вашей задаче.
6. Перечислите законы сохранения используемые в задаче. При каких условиях они применимы? Выполняются ли эти условия в работе?

Лабораторная работа

Определение радиуса кривизны вогнутой поверхности методом катающегося шарика

Конкретная цель	Критерии достижения цели
I. Изучение теории	
1. Основные сведения о механической энергии. 2. Основные сведения о механических колебаниях. 3. Теория метода	Студент правильно отвечает на вопросы № 1 - 4 Студент правильно отвечает на вопросы № 5 - 10 Студент может объяснить решение задачи и ответить на вопросы № 11 - 14
II. Практические навыки	
Студент должен научиться: - определять период малых колебаний шарика; - измерять радиусы шариков; - определять радиус кривизны поверхности и погрешность его определения.	

Описание целей работы

Оборудование: вогнутая сферическая поверхность, шарики, секундомер, штангенциркуль.

1.1 **Механическими колебаниями** называют движения, обладающие той или иной степенью повторяемости. Например, колебания маятника часов, груза на пружине, качелей, поплавка на воде и др.

Периодом колебаний T называется время, за которое совершается одно полное колебание. Величина, обратная периоду, $\nu = \frac{1}{T}$ называется **частотой колебаний.** Она показывает, сколько колебаний совершает тело за единицу времени. Частота измеряется в герцах (1 Гц = 1с$^{-1}$).

Для математического описания колебаний используются периодические функции sin и cos. Наиболее простой вид имеют зависимости:

$x(t) = x_{max} \cos\varphi(t)$ или $x(t) = x_{max} \sin\varphi(t)$, (1)

произвольный момент времени t, причем
ии колеблющейся точки, а начало оси – в
с.1).

Рис.1.

x_{max} – амплитуда колебаний – модуль максимального отклонения точки от положения равновесия. Вместо x_{max} можно использовать любую букву. $\varphi(t)$ – фаза колебаний: $\varphi(t) = \omega t + \varphi_o$, где величина $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ называется **круговой** (или циклической) **частотой**. Она измеряется в $с^{-1}$.

Величина φ_o– начальная фаза колебаний. Она равна фазе колебаний в начальный момент времени, т.е. $\varphi_o = \varphi(t = 0)$.

1.2 Колебательное движение происходит с переменными скоростью и ускорением.

Если $x(t) = x_{мах} \cos(\omega t + \varphi_0)$

То скорость

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -x_{\max}\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -\upsilon_{\text{мах}}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $x_{\max}\omega = \upsilon_{\max}$ – амплитуда изменений скорости. Мы видим, что наибольшую скорость колеблющаяся точка имеет в положении равновесия, а в крайних точках (при $x = \pm x_{мах}$) скорость точки равна нулю.

Ускорение колеблющейся точки:

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_{\max}\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -a_{мах} cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $x_{\max}\omega^2 = a_{\max}$ – амплитуда изменений ускорения точки. Наибольшее ускорение точка будет иметь в крайних положениях. В положении равновесия ускорение точки равно нулю.

Колебания, совершающиеся в соответствии с законом (1) называются **гармоническими.**

1.3 Полная энергия колеблющейся точки складывается из кинетической и потенциальной энергий. В соответствии с законом сохранения полной энергии имеем:

$$E_{ПОЛН} = E_K + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П = \frac{m\upsilon_{MAX}^2}{2} = E_{П\ MAX}$$

В крайних положениях кинетическая энергия равна нулю (т.к. $\upsilon = 0$), в положении равновесия нулевое значение имеет потенциальная энергия.

Т.к. при гармонических колебаниях

$$x_{\max}\omega = \upsilon_{\max} \text{ ,то } E_{ПОЛН} = \frac{m}{2}(x_{мах}\omega)^2 = \frac{m\omega^2 x_{мах}^2}{2} \sim x_{мах}^2,$$

т.е. полная энергия точки при гармонических колебаниях пропорциональна квадрату амплитуды.

Теория метода

В данной работе предлагается определить радиус кривизны сферической поверхности методом катающегося шарика. Если шар поместить на вогнутую поверхность, то равновесным для него является положение, при котором его центр тяжести находится в низшей точке поверхности (точка С на рис.2)

Если шар вывести из положения равновесия и предоставить ему возможность свободно кататься по вогнутой поверхности, то он будет совершать колебания около положения равновесия. Покажем, что в отсутствии трения, движение шарика представляет собой гармоническое колебание.

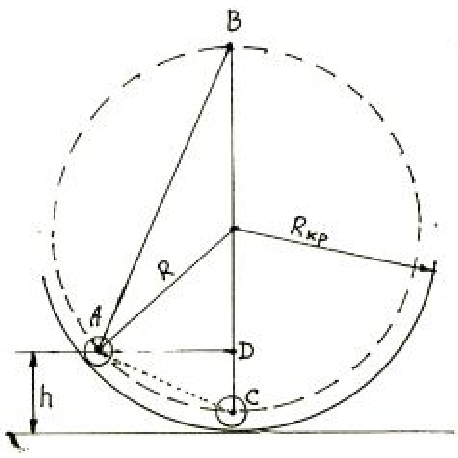


Рис.2.

Шарик массой m, поднятый на высоту h относительно положения устойчивого равновесия, обладает потенциальной энергией $E_П$=mgh. Расстояние АС, на которое перемещается центр шара в обе стороны от положения равновесия, соответствует амплитуде колебаний. Если амплитуда колебаний *а* мала, то дуга АС, хорда АС и амплитуда колебаний шарика практически равны между собой. Из подобия ΔАВС и ΔАСД получим

$$AC^2 = СД \times CB. \qquad (*)$$

Учитывая, что АС= *а*, СД=h и СВ=2R (рис.2), перепишем (*) в виде a^2=2Rh, где R – расстояние от центра кривизны вогнутой поверхности до центра шарика. Отсюда $h = \frac{a^2}{2R}$.

Тогда потенциальная энергия шарика в точке А равна

$$E_П = mgh = \frac{mg}{2R} a^2 \qquad (2)$$

Из уравнения (2) видно, что потенциальная энергия $E_П$ в конечной точке движения пропорциональна квадрату амплитуды *а*, что характерно для гармонических колебаний. Следовательно, колебания шарика на вогнутой поверхности при малых амплитудах можно считать гармоническими, т.е.

совершающимися по закону S = $a \cdot cos\omega_0 t$, где ω_0- циклическая частота колебаний шарика.

Если пренебречь трением, (оно мало), то должен выполняться закон сохранения энергии. Это значит, что при движении шарика из точки А в точку С потенциальная энергия (в т.А) полностью переходит в кинетическую (в т.С)

$E_П$ (в т.А)=$E_К$(в т.С) Кинетическая энергия в точке С складывается из кинетической энергии поступательного движения центра тяжести $E_{Кпост}$ и кинетической энергии вращательного движения шарика вокруг его центра $E_{К\ вращ}$;

Кинетическая энергия поступательного движения в т.С равна

$$E_{K\ пост} = \frac{m\upsilon_{мах}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \qquad (4)$$

где $\upsilon_{\max} = \omega_0 a = \frac{2\pi a}{T}$, а T – период колебаний шарика,

Кинетическая энергия вращательного движения равна

$$E_{K\ вращ} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\times\left(\frac{2\pi a}{Tr}\right)^2 \qquad (5)$$

где $I = \frac{2}{5}mr^2$ -момент инерции шарика относительно его центра тяжести, r – радиус шарика, $\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{2\pi a}{Tr}$ - угловая скорость вращения шарика вокруг собственной оси в точке С. Подставляя выражения (2), (4), (5) в уравнение (3) получим

$$\frac{mga^2}{2R} = \frac{m}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\times\left(\frac{2\pi a}{Tr}\right)^2$$

или $$\frac{mga^2}{2R} = \frac{14}{5}\cdot\frac{m\pi^2 a^2}{T^2}; \qquad \frac{g}{2R} = \frac{14\pi^2}{5T^2}$$

Отсюда $$R = \frac{5gT^2}{28\pi^2}. \qquad (6)$$

Если R – расстояние от центра кривизны вогнутой поверхности до центра шарика, r – радиус шарика, то радиус кривизны этой поверхности равен

$$R_{КР} = R + r \qquad (7).$$

Таким образом, измерив период колебаний T и радиус шарика r можно определить радиус кривизны сферической поверхности.

3. Измерения

1. Протрите чистой, сухой тряпкой вогнутую поверхность и шарики.
2. Выберите один из шариков и определите период его колебаний. Для этого, отклонив шарик из положения равновесия, измерьте время t, за которое шарик совершит n=10÷20 полных колебаний. Период $T = \dfrac{t}{n}$.
3. Повторите опыт не менее трех раз и определите среднее значение периода колебаний и среднюю погрешность его определения.

P.S! Амплитуда колебаний шарика должна быть очень небольшой

(малые колебания)

4. Вычислить значение R, подставив найденное значение периода колебаний T в формулу (6).
5. Измерьте микрометром (или штангенциркулем) радиус r шарика.
6. Найдите радиус кривизны вогнутой поверхности по формуле (7).
7. Возьмите другой шарик и повторите измерения п.п.2-6.
8. Сравните найденные значения радиуса кривизны поверхности и найдите его среднее значение.
9. Рассчитайте погрешности этих измерений.
10. Результаты измерений и расчетов внесите в таблицу.

Таблица

№ п/п	r, м	Δr,м	n	t,c	T,c	R,м	ΔR,м	$R_{КР}$,м	$\Delta R_{КР}$,м

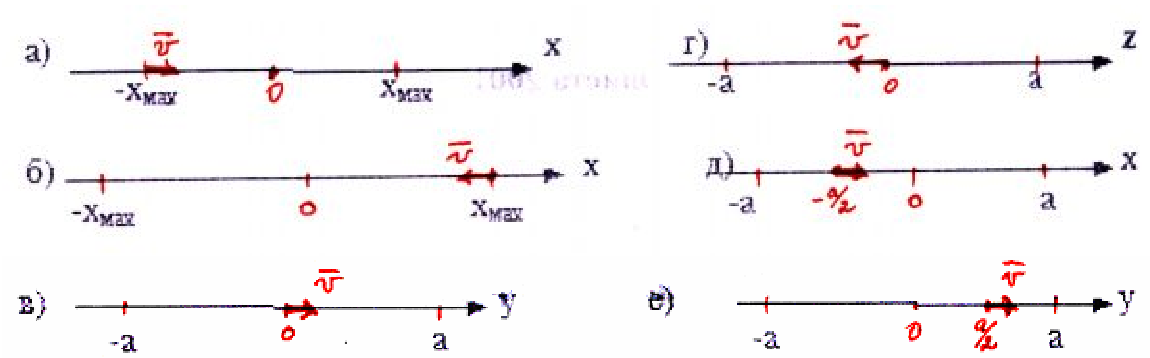
Контрольные вопросы:

1. Что в физике называется “энергией”? Какие виды энергии Вы знаете?
2. Что такое кинетическая энергия? Как вычисляют ее величину: для поступательного движения? для вращательного движения тела?
3. Что такое потенциальная энергия? В каких случаях потенциальную энергию тела, можно считать по формуле $E_П$ = mqh?
4. Сформулируйте закон сохранения энергии. В каких случаях сохраняется механическая энергия?
5. Дайте определение и приведите примеры механических колебаний.
6. Дайте определение понятий: период колебаний, частота колебаний, циклическая частота, амплитуда.

7. Как меняется положение колеблющегося тела со временем? Какие колебания называются гармоническими?

8. Каков математический смысл понятия «фаза»? Ее физический смысл?

9. Напишите зависимость x(t) для следующих случаев: (на рис. указаны положение тела и направление его движения при t=0)



10. Как определить скорость колеблющейся точки? Ее ускорение?

11. Объясните, почему шарик, вернувшись в положение равновесия, не останавливается?

12. Объясните, почему колебания шарика можно считать гармоническими только при малых амплитудах?

13. В каком случае потенциальная энергия шарика в верхнем положении полностью перейдет в кинетическую в его низшем положении?

14. Поясните, как вы нашли угловую скорость вращения шарика в его низшем положении? В каком случае она будет равна нулю?

15. Вы использовали два шарика разных радиусов. В каком случае Вы получили большую погрешность?